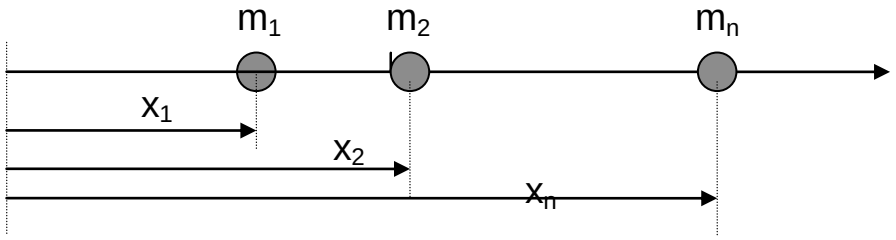
VII. MOMENTUM LINEAR DAN TUMBUKAN

1. PUSAT MASSA

Dalam gerak translasi, tiap titik pada benda mengalami pergeseran yang sama dengan titik lainnya sepanjang waktu, sehingga gerak dari salah satu partikel dapat menggambarkan gerak seluruh benda. Tetapi, walaupun di dalam geraknya, benda juga berotasi atau bervibrasi, akan ada satu titik pada benda yang bergerak serupa dengan gerak partikel, titik tersebut disebut *pusat massa*.



Misalkan terdapat n buah partikel dengan massa masing-masing, m_1, m_2, ..., m_n, sepanjang garis lurus dengan jarak dari titik asal masing-masing x_1, x_2, ..., x_n didefinisikan mempunyai koordinat pusat massa :

$$\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2, + \ldots + m_n}$$

$$\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$\frac{\sum m_i x_i}{M}$$

Dengan cara yang sama bila partikel terdistribusi dalam 3 dimensi (ruang), koordinat pusat massanya adalah

$$\frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$\frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$\frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Untuk benda pejal, misalkan bola, silinder dsb, dianggap benda tersebut tersusun atas partikel-partikel yang terdistribusi secara kontinu. Bila benda terbagi menjadi n buah elemen dengan massa masing-masing Δm dan untuk $\Delta m \rightarrow 0$ koordinat pusat massanya :

$$\frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i} \qquad \frac{\int x\, dm}{\int dm} \qquad \frac{\int x\, dm}{M}$$

$$\frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} \qquad \frac{\int y\, dm}{\int dm} \qquad \frac{\int y\, dm}{M}$$

$$\frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} \qquad \frac{\int z\, dm}{\int dm} \qquad \frac{\int z\, dm}{M}$$

2. GERAK PUSAT MASSA

Terdapat sekumpulan partikel dengan massa masing-masing : m_1, m_2 , ... , m_n dengan massa total M. Dari teori pusat massa diperoleh :

$$M\, r_{pm} = m_1 r_1 + m_2 r_2 + \ldots + m_n\, r_n$$

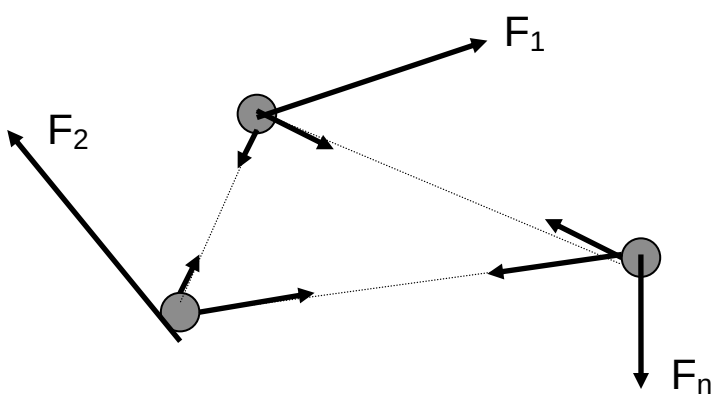
dengan r_{pm} adalah pusat massa susunan partikel tersebut.
Bila persamaan tersebut dideferensialkan terhadap waktu t, diperoleh

$$M\, dr_{pm}/dt = m_1\, dr_1/dt + m_2\, dr_2/dt + \ldots + m_n\, dr_n/dt$$
$$M\, v_{pm} = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_n\, v_n$$

Bila dideferensialkan sekali lagi, diperoleh

$$M\, dv_{pm}/dt = m_1\, dv_1/dt + m_2\, dv_2/dt + \ldots + m_n\, dv_n/dt$$
$$M\, a_{pm} = m_1\, a_1 + m_2\, a_2 + \ldots + m_n\, a_n$$

Menurut hukum Newton, $F = m\, a$, maka $F_1 = m_1\, a_1$, $F_2 = m_2\, a_2$ dst.



$$M\, a_{pm} = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$$

Jadi massa total dikalikan percepatan pusat massa sama dengan jumlah vektor semua gaya yang bekerja pada sekelompok partikel tersebut. Karena gaya

internal selalu muncul berpasangan (saling meniadakan), maka tinggal gaya eksternal saja

$$M\, a_{pm} = F_{eks}$$

Pusat massa suatu sistem partikel bergerak seolah-olah dengan seluruh sistem dipusatkan di pusat massa itu dan semua gaya eksternal bekerja di titik tersebut.

3. MOMENTUM LINEAR

Untuk sebuah partikel dengan massa m dan bergerak dengan kecepatan v, didefinikan mempunyai momentum :

$$p = m\, v.$$

Untuk n buah partikel, yang masing, masing dengan momentum p_1, p_2 , ... , p_n, secara kesuluruhan mempunyai momentum P,

$$P = p_1 + p_2 + ... + p_n$$

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 + ... + m_n\, v_n$$

$$P = M\, v_{pm}$$

"Momentum total sistem partikel sama dengan perkalian massa total sistem partikel dengan kecepatan pusat massanya".

$$dP/dt = d(Mv_{pm})/dt$$

$$= M\, dv_{pm}/dt$$

$$dP/dt = M\, a_{pm}$$

Jadi

$$F_{eks} = dP/dt$$

4. KEKEKALAN MOMENTUM LINEAR

Jika jumlah semua gaya eksternal sama dengan nol maka,

$$dP/dt = 0$$

atau

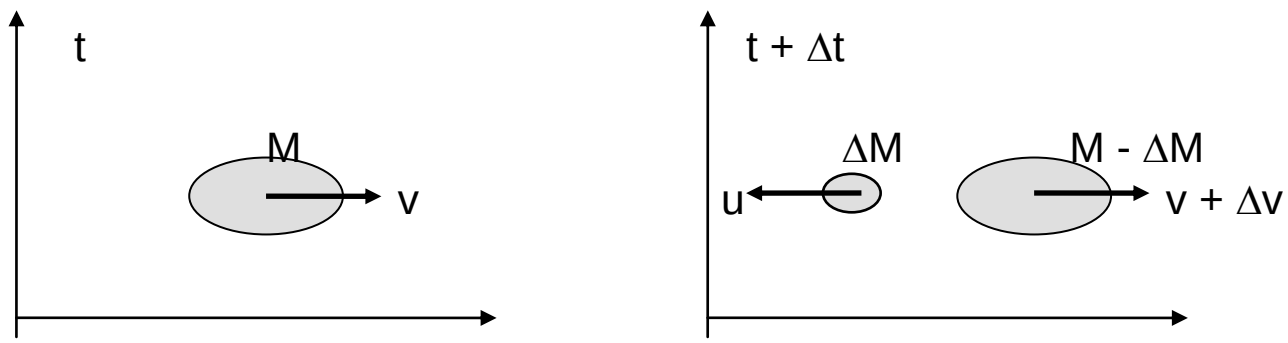
$$P = \text{konstan}$$

Bila momentul total sistem $P = p_1 + p_2 + ... + p_n$, maka

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = \text{konstanta} = P_0$$

Momentum masing-masing partikel dapat berubah, tetapi momentum sistem tetap konstan.

5. SISTEM DENGAN MASSA BERUBAH



Sebuah sistem bermassa M dengan pusat massa bergerak dengan kecepatan v. Pada sistem bekerja gaya eksternal Feks.
Selang waktu Δt sistem melepaskan massaΔM yang pusat massanya bergerak dengan kecepatan u terhadap pengamat dan massa sistem berubah menjadi $M - \Delta M$ dan kecepatannya menjadi $v + \Delta v$.
Dari hukum Newton,

$$F_{eks} = dP/dt$$
$$F_{eks} \cong \Delta P/\Delta t = (P_f - P_i)/\Delta t$$

dengan P_i adalah momentum mula-mula = M v, dan
P_f adalah momentum akhir = $(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M\, u$

$$F_{eks} \cong [\{(M - \Delta M)(v + \Delta v) + \Delta M\, u\} - M.v\,] / \Delta t$$
$$F_{eks} = M\, \Delta v/\Delta t + [\, u - (v + \Delta v)\,]\, \Delta M/\Delta t$$

Untuk $\Delta v \rightarrow 0$,

$$\Delta v/\Delta t \rightarrow dv/dt$$
$$\Delta M/\Delta t \rightarrow - dM/dt$$
$$\Delta v \rightarrow 0$$

maka $F_{eks} = M\, dv/dt + v\, dM/dt - u\, dM/dt$
atau

$$F_{eks} = d(Mv)/dt - u\, dM/dt$$

atau

$$F_{eks} = M\, dv/dt + (v - u)\, dM/dt$$

$$M\, dv/dt = F_{eks} + (u - v)\, dM/dt$$

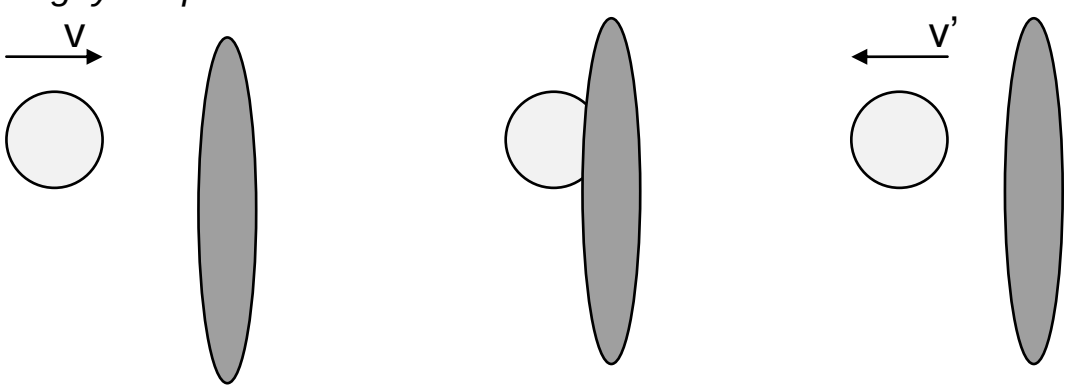
dimana (u - v) merupakan kecepatan relatif massa yang ditolakkan terhadap benda utamanya.

$$M\, dv/dt = F_{eks} + v_{rel}\, dM/dt$$

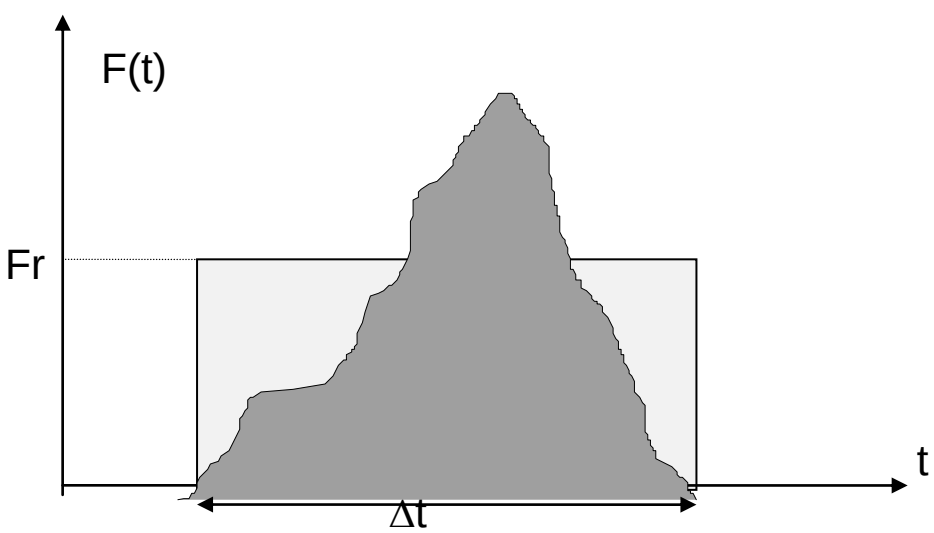
Untuk kasus roket, $v_{rel}\, dM/dt$ merupakan daya dorong roket.

6. IMPULS dan MOMENTUM

Dalam suatu tumbukan, misalnya bola yang dihantam tongkat pemukul, tongkat bersentuhan dengan bola hanya dalam waktu yang sangat singkat, sedangkan pada waktu tersebut tongkat memberikan gaya yang sangat besar pada bola. Gaya yang cukup besar dan terjadi dalam waktu yang relatif singkat ini disebut *gaya impulsif*.



Perubahan gaya impulsif terhadap waktu ketika terjadi tumbukan :



Tampak bahwa gaya impulsif tersebut tidak konstan. Dari hukum ke-2 Newton diperoleh

$$F = dp/dt$$

$$\int_{t_i}^{t_f} F\,dt = \int_{p_i}^{p_f} dp$$

$$I = \int_{t_i}^{t_f} F\,dt = \Delta p = \text{Impuls}$$

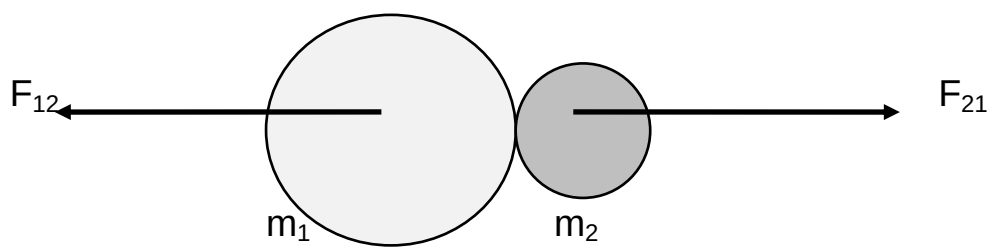
Dilihat dari grafik tersebut, impuls dapat dicari dengan menghitung luas daerah di bawah kurva F(t) (yang diarsir). Bila dibuat pendekatan bahwa gaya tersebut konstan, yaitu dari harga rata-ratanya, F_r , maka

$$I = F_r\ \Delta t = \Delta p$$

$$F_r = I/\Delta t = \Delta p/\Delta t$$

" Impuls dari sebuah gaya sama dengan perubahan momentum partikel ".

7. KEKEKALAN MOMENTUM DALAM TUMBUKAN



Dua buah partikel saling bertumbukan. Pada saat bertumbukan kedua partikel saling memberikan gaya (aksi-reaksi), F_{12} pada partikel 1 oleh partikel 2 dan F_{21} pada partikel 2 oleh partikel 1.

Perubahan momentum pada partikel 1 :

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} F_{12}\,dt = Fr_{12}\,\Delta t$$

Perubahan momentum pada partikel :

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} F_{21}\,dt = Fr_{21}\,\Delta t$$

Karena $F_{21} = -F_{12}$ maka $Fr_{21} = -Fr_{12}$

oleh karena itu $\Delta p_1 = -\Delta p_2$

Momentum total sistem : $P = p_1 + p_2$ dan perubahan momentum total sistem :

$$\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$$

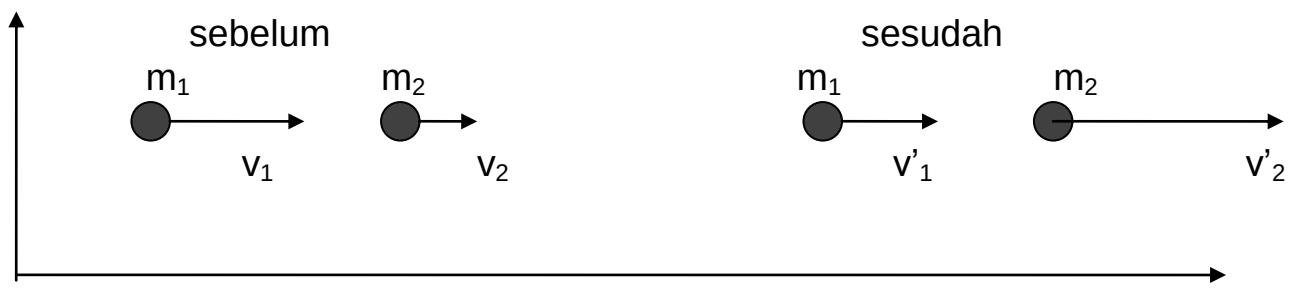
"Jika tidak ada gaya eksternal yang bekerja, maka tumbukan tidak mengubah momentum total sistem".

Catatan : selama tumbukan gaya eksternal (gaya grvitasi, gaya gesek) sangat kecil dibandingkan dengan gaya impulsif, sehingga gaya eksternal tersebut dapat diabaikan.

8. TUMBUKAN SATU DIMENSI

Tumbukan biasanya dibedakan dari kekal-tidaknya tenaga kinetik selama proses. Bila tenaga kinetiknya kekal, tumbukannya bersifat *elstik*. Sedangkan bila tenaga kinetiknya tidak kekal tumbukannya *tidak elastik*. Dalam kondisi setelah tumbukan kedua benda menempel dan bergerak bersama-sama, tumbukannya *tidak elastik sempurna*.

8.1. Tumbukan elastik



Dari kekekalan momentum :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Dari kekekalan tenaga kinetik :

$$1/2\ m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 v_2^2 = 1/2 m_1 v'^2_1 + 1/2\ m_2 v'^2_2$$

Dan diperoleh : $v_1 - v_2 = v'_2 - v'_1$

8.2. Tumbukan tidak elastik

Dari kekekalan momentum :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

Kekekalan tenaga mekanik tidak berlaku, berkurang/bertambahnya tenaga mekanik ini berubah/berasal dari tenaga potensial deformasi (perubahan bentuk).

Dari persamaan ketiga tumbukan elastis dapat dimodifikasi menjadi :

$$v_1 - v_2$$
$$v'_1 - v'_2$$

e : koefisien elastisitas,

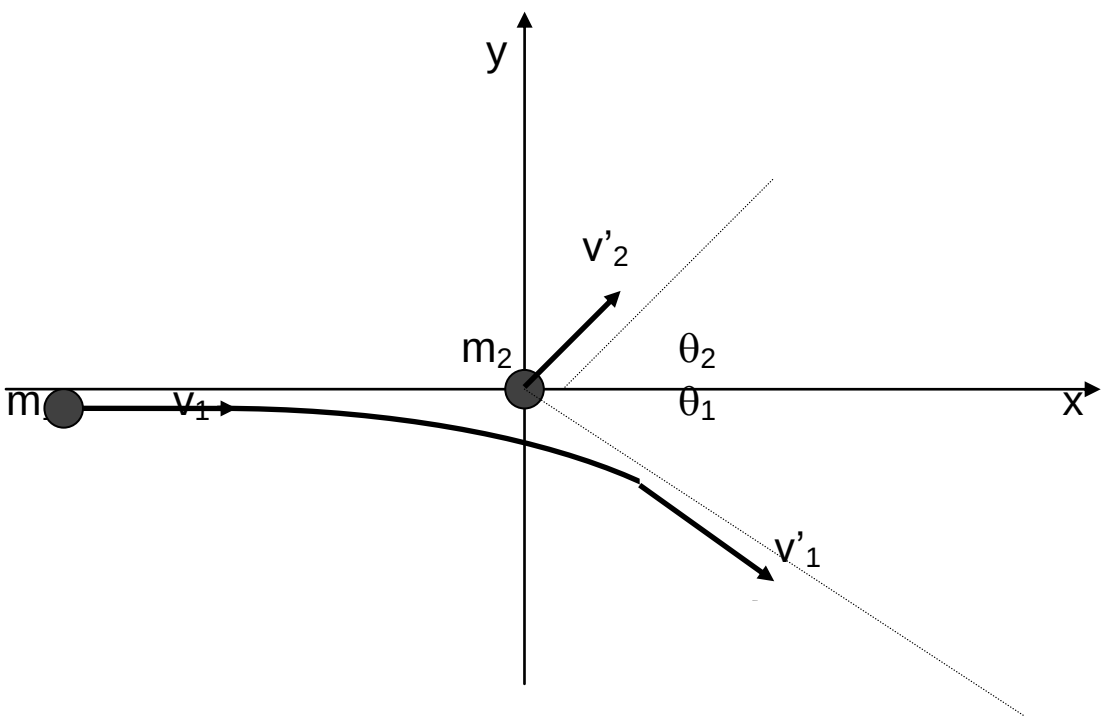
e = 1 untuk tumbukan elastis
0 < e < 1 untuk tumbukan tidak elastis
e = 0untuk tumbukan tidak elastis sempurna

8.3. Tumbukan tidak elastis sempurna.

Pada tumbukan ini setelah tumbukan kedua benda bersatu dan bergerak bersama-sama. Dari kekekalan momentum :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'$$

9. TUMBUKAN DUA DIMENSI



Dari kekekalan momentum , untuk komponen gerak dalam arah x :

$$m_1 v_1 = m_1 v'_1 \cos \theta_1 + m_2 v'_2 \cos \theta_2$$

untuk komponen gerak dalam komponen y :

$$0 = m_1 v'_1 \sin \theta_1 - m_2 v'_2 \sin \theta_2$$

Bila dianggap tumbukannya lenting :

$$1/2\ m_1\ v_1^2 + 1/2 m_2\ v_2^2 = 1/2 m_1 v'^2_1 + 1/2\ m_2 v'^2_2$$

Bila keadaan awal diketahui, masih ada 4 besaran yang tidak diketahui, tetapi persaamannya hanya 3, oleh karena itu slah satu besaran keadaan akhir harus diberikan.