7 FUNGSI VEKTOR

Jika untuk setiap nilai skalar u dikaitkan dengan suatu vektor A, maka A dinamakan suatu fungsi dari u dan dinyatakan dengan A(u). Dalam tiga dimensi kita menulis $\bar{A}(u) = A_1(u)\bar{i} + A_2(u)\bar{j} + A_3(u)\bar{k}$.

Konsep fungsi ini dapat dengan mudah diperluas. Jadi kita untuk setiap titik (x, y, z) dikaitkan dengan suatu vektor A, maka A adalah fungsi dari (x, y, z) dan dinyatakan dengan $\bar{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\bar{i} + A_2(x, y, z)\bar{j} + A_3(x, y, z)\bar{k}$.

Kita kadang-kadang menyatakan bahwa sebuah fungsi vektor $\bar{A}(x, y, z)$ mendefinisikan suatu medan vektor karena mengaitkan suatu vektor dengan setiap titik di suatu daerah. Dengan cara yang sama $\phi(x, y, z)$ mendefinisikan suatu medan skalar karena mengaitkan suatu skalar dengan setiap titik di suatu daerah.

7.1. LIMIT, KONTINUITAS DAN TURUNAN FUNGSI VEKTOR

Limit, kontinuitas dan turunan fungsi vektor mengikuti aturan yang serupa untuk fungsi skalar yang bersangkutan. Pernyataan berikut menunjukkan kesamaan yang ada.

1. Fungsi vektor $\bar{A}(u)$ dikatakan kontinu di u_0 jika diberikan suatu bilangan positif ε, kita dapat menentukan suatu bilangan positif δ sehingga $|\bar{A}(u) - \bar{A}(u_0) < \varepsilon$ bilamana

$|u - u_0| < \delta$. Hal ini ekivalen dengan pernyataan $\lim_{\Delta \to u_0} \bar{A}(u) = \bar{A}(u_0)$.

2. Turunan dari A(u) didefinisikan sebagai

$$\frac{d\bar{A}}{du} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\bar{A}(u + \Delta u) - \bar{A}(u)}{\Delta u} \qquad \text{.....(7)}$$

asalkan limit ini ada. Dalam kasus $\bar{A}(u) = A_1(u)\bar{i} + A_2(u)\bar{j} + A_3(u)\bar{k}$; maka

$$\frac{d\bar{A}}{du} = \frac{dA_1}{du}\bar{i} + \frac{dA_2}{du}\bar{j} + \frac{dA_3}{du}\bar{k}$$

Turunan tingkat tinggi seperti misalnya d^2A/du^2, dan seterusnya dapat didefinisikan dengan cara yang sama.

3. Jika $\bar{A}(x, y, z) = A_1(x, y, z)\bar{i} + A_2(x, y, z)\bar{j} + A_3(x, y, z)\bar{k}$, maka

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz \qquad \text{.....(8)}$$

adalah differensial dari A

4. Turunan dari hasil kali memenuhi aturan yang sama dengan aturan untuk fungsi skalar. Tetapi dalam hasil kali silang, urutannya menjadi penting. Beberapa contah adalah:

$$\text{(a)}\ \frac{d}{du}(\phi\bar{A}) = \phi\frac{d\bar{A}}{du} + \frac{d\phi}{du}\bar{A},$$

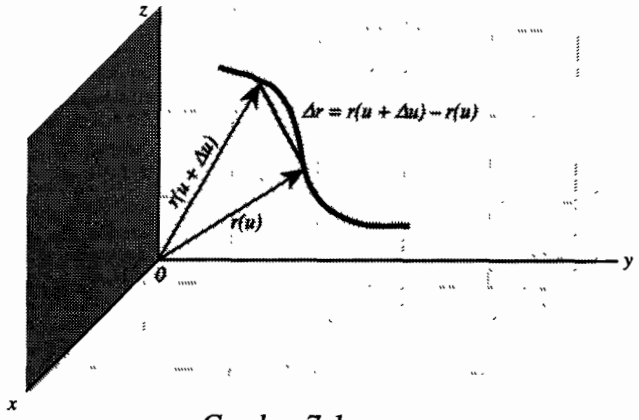
$$\text{(b)}\ \frac{\partial}{\partial y}(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \bar{A} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial y} \cdot \bar{B},$$

$$\text{(c)}\ \frac{\partial}{\partial z}(\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{A} \times \frac{\partial \bar{B}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial z} \times \bar{B}$$

7.2. TAFSIRAN ILMU UKUR DARI TURUNAN VEKTOR

Jika r adalah vektor yang menghubungkan titik asal 0 pada suatu sistem koordinat dan titik (x, y, z), maka ciri fungsi vektor r(u) mendefinisikan x, y dan z sebagai fungsi dari u. Sesuai dengan perubahan u, titik ujung dari r menyatakan suatu kurva ruang (lihat Gambar 7-1) yang mempunyai persamaan parameter x = x(u), y = y(u), z = z(u). Jika parameter u tersebut adalah panjang busur s yang diukur dari suatu titik tetap pada kurva, maka

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{T} \qquad \text{.....(9)}$$



Gambar 7-1

adalah suatu vektor satuan dalam arah menyinggung kurva dan dinamakan vektor singgung satuan. Jika u adalah waktu t, maka

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} \qquad \text{.....(10)}$$

adalah suatu vektor satuan dalam arah menyinggung kurva dan dinamakan vektor singgung satuan. Jika

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}\bar{T} = \vartheta\bar{T} \qquad \text{.....(11)}$$

adalah kecepatan titik ujung r yang menyatakan kurva. Maka di mana besarnya ϑ seringkali dinamakan kepesatan (speed), yaitu ϑ = ds/dt. Dengan cara yang sama.

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = a \qquad \text{.....(12)}$$

adalah percepatan dari titik ujung r yang menyatakan kurva. Penerapan konsep ini penting dalam mekanika.

7.3. GRADIEN, DIVERGENSI DAN CURL

Perhatikanlah operator vektor ∇ (del) yang didefinisikan dengan

$$\nabla \equiv \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{.....(13)}$$

Kemudian jika $\phi(x, y, z)$ dan A (x, y, z) mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada suatu daerah (suatu syarat yang dalam banyak hal lebih kuat daripada

keperluannya), jika dapat mendefinisikan hal berikut ini.

1. **Gradien.** Gradien dari ϕ didefinisikan dengan

$$\text{grad } \nabla = \nabla \phi = (\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z})\phi = \bar{i}\frac{\partial \phi}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial \phi}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad \text{.....(14)}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\bar{k}$$

Suatu tafsiran yang menarik adalah bahwa jika $\phi(x, y, z) = c$ adalah persamaan sebuah permukaan, maka $\nabla \phi$ adalah suatu normal untuk permukaan ini (lihat soal 11).

2. **Divergensi.** Divergensi dari A didefinisikan dengan

$$\text{div } A = \nabla \cdot \bar{A} = (\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (A_1\bar{i} + a_2\bar{j} + A_3\bar{k}) \quad \text{.....(15)}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

3. **Curl.** Curl dari a didefinisikan dengan

$$\text{curl } A = \nabla \times \bar{A} = (\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}) \times (A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}) \quad \text{.....(16)}$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \bar{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$= (\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\bar{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\bar{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\bar{k}$$

Perhatikan bahwa dalam menguraikan determinan tersebut, operator $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ harus mendahului A_1, A_2, A_3.

7.4. RUMUS-RUMUS YANG MENGANDUNG ∇

Jika turunan parsial dari A, B, U dan V diandaikan ada, maka :

1. $\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$ atau grad $(U + V)$ = grad U + grad V
2. $\nabla \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = \nabla \cdot \bar{A} + \nabla \cdot \bar{B}$ atau div $(A + B)$ = div A + div B
3. $\nabla \times (\bar{A} + \bar{B}) = \nabla \times \bar{A} + \nabla \times \bar{B}$ atau curl $(A + B)$ = curl A + curl B
4. $\nabla \cdot (U\bar{A}) = (\nabla U) \cdot \bar{A} + U(\nabla \cdot \bar{A})$
5. $\nabla \times (U\bar{A}) = (\nabla U) \times \bar{A} + U(\nabla \times \bar{A})$
6. $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$
7. $\nabla \times (\bar{A} \times \bar{B}) = (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{A} - \bar{B}(\nabla \cdot \bar{A}) - (\bar{A} \cdot \nabla)\bar{B} + \bar{A}(\nabla \cdot \bar{B})$
8. $\nabla(\bar{A} \cdot \bar{B}) = (\bar{B} \cdot \nabla)\bar{A} + (\bar{A} \cdot \nabla)\bar{B} + \bar{B} \times (\nabla \times \bar{A}) + \bar{A} \times (\nabla \times \bar{B})$
9. $\nabla \cdot (\nabla U) \equiv \nabla^2 U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ dinamakan Laplace dari U

   dan $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ dinamakan operator Laplace

10. $\nabla \times (\nabla U) = 0$. Curl dari gradien U adalah nol.
11. $\nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$. Divergensi dari curl $\bar{A}$ adalah nol.
12. $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$

7.5. KOORDINAT KURVILINIER TEGAKLURUS DAN JACOBIAN

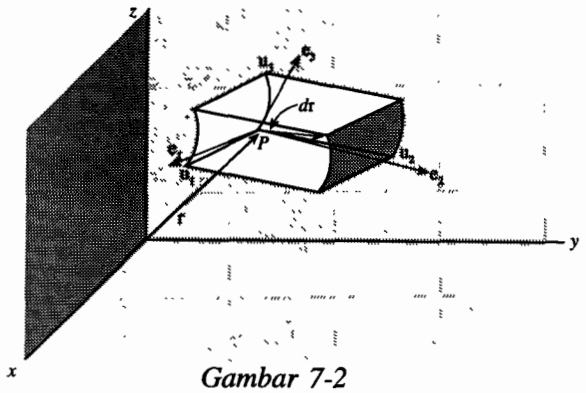
Persamaan transformasi :

$$x = f(u_1, u_2, u_3), \quad y = g(u_1, u_2, u_3), \quad z = h(u_1, u_2, u_3) \quad \text{.....(17)}$$

[diandaikan bahwa f, g, h kontinu, mempunyai turunan parsial yang kuntinu dan mempunyai invers bernilai tunggal] memberikan penyesuaian di antara titik dalam sistem koordinat tegak lurus xyz dan u_1, u_2, u_3. Dalam notasi vektor, transformasi (17)' dapat ditulis sebagai

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = f(u_1, u_2, u_3)\bar{i} + g(u_1, u_2, u_3)\bar{j} + h(u_1, u_2, u_3)\bar{k} \quad \text{.....(18)}$$

Suatu titik P pada Gambar 7-2 dapat didefinisikan tidak hanya dengan koordinat tegaklurus (x, y, z) tetapi juga dengan koordinat (u_1, u_2, u_3). Kita menamakan (u_1, u_2, u_3) sebagai koordinat kurvilinier dari titik tersebut.



Gambar 7-2

Jika u_2 dan u_3 konstanta dan u_1 berubah, maka r menyatakan suatu kurva yang dinamakan kurva koordinat u_1. Dengan cara yang sama, kita mendefinisikan u_2 dan u_3 sebagai kurva koordinat yang melalui P.

Dari (18) kita memperoleh

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} du_3 \qquad \text{.....(19)}$$

Vektor $\partial r/\partial u_1$ menyinggung kurva koordinat u_1 di P. Jika e1 adalah suatu vektor satuan di P dalam arah ini, maka kita dapat menulis $\partial r/\partial u_1 = h_1 \bar{e}_1$ dimana $h_1 = |\partial r/\partial u_1|$. Dengan cara yang sama kita dapat menulis $\partial r/\partial u_2 = h_2 \bar{e}_2$ dan $\partial r/\partial u_3 = h_3 \bar{e}_3$, di mana $h_2 = |\partial r/\partial u_2|$ dan $h_3 = |\partial r/\partial u_3|$. Kemudian, (19) dapat dituliskan sebagai

$$d\bar{r} = h_1 \, du \, \bar{e}_1 + h_2 \, du_2 \bar{e}_2 + h_3 \, du_3 \bar{e}_3 \qquad \text{.....(20)}$$

Besaran h_1, h_2, h_3 kadang-kadang dinamakan faktor-faktor skala.

Jika $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ saling tegaklurus di suatu titik P, maka koordinat kurviliniernya dinamakan tegaklurus. Dalam kasus ini elemen dari panjang busur ds diberikan dengan

$$ds^2 = dr \cdot dr = h^2_1 du^2_1 + h^2_2 du^2_2 + h^2_3 du^2_3 \qquad \text{.....(21)}$$

dan bersesuaian dengan panjang kuadrat diagonal paralelepipedum di atas.

Juga dalam kasus koordinat tegaklurus, isi paralelepipedumnya diberikan dengan

$$dV = |(h_1, du_1 \, e_1) \cdot (h_2 \, du_2 \, e_2) \times (h_3 \, du_3 \, e_3)| = h_1 h_2 h_3 \, du_1 \, du_2 \, du_3 \qquad \text{.....(22)}$$

yang dapat dituliskan sebagai

$$dV = \left| \frac{\partial r}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial r}{\partial u_2} \times \frac{\partial r}{\partial u_3} \right| du_1 \, du_2 \, du_3 = = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 \, du_2 \, du_3 \qquad \text{.....(23)}$$

di mana $$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{vmatrix} \quad \text{.....(24)}$$

dinamakan Jacobian dari transformasi tersebut.

Jelaslah bahwa bilamana Jacobian ini identik dengan nol, maka tidak ada paralelepipedum yang terbentuk. Dalam kasus seperti itu ada suatu hubungan fungsional di antara x, y dan z, maka ada suatu fungsi ϕ sehinga kesamaan $\phi(x, y, z) = 0$ berlaku.

7.6. GRADIEN, DIVERGENSI, CURL DAN LAPLACIAN DALAM KOORDINAT KURVILINIER TEGAKLURUS

Jika Φ adalah suatu fungsi skalar dan $\bar{A} = A_1\bar{e}_1 + A_2\bar{e}_2 + A_3\bar{e}_3$ suatu fungsi vektor dari koordinat kurvilinier tegaklurus u_1, u_2, u_3, kita memperoleh hasil berikut ini.

1. $$\nabla\Phi = \text{grad } \Phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\bar{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\bar{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\bar{e}_3$$

2. $$\nabla \cdot A = \text{div } \bar{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

3. $$\nabla \times \bar{A} = \text{curl } \bar{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\bar{e}_1 & h_2\bar{e}_2 & h_3\bar{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}$$

4. $$\nabla^2\Phi = \text{Laplacian dari } \Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$$

Ini menghasilkan bentuk yang biasa dalam koordinat tegaklurus jika kita mengganti (u_1, u_2, u_3) dengan (x, y, z), dalam hal ini $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ dan $\bar{e}_3$ diganti oleh $\bar{i}$, $\bar{j}$ dan $\bar{k}$ dan $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

7.7. KOORDINAT KURVILINIER KHUSUS

1. Koordinat silinder (ρ, ϕ, z). Lihat Gambar *7-3.*

   Persamaan transfromasi :

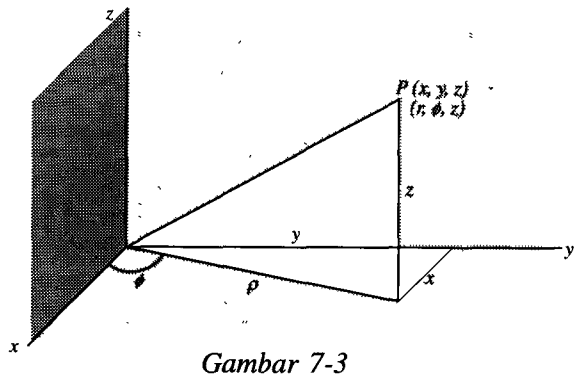
   $$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

   di mana $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.$

   Faktor skala : $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$

   Elemen panjang busur : $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\phi^2 + dz^2$

   Jacobian : $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, z)} = \rho$



Gambar 7-3

   Elemen volume : $dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$

   Laplacian :

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

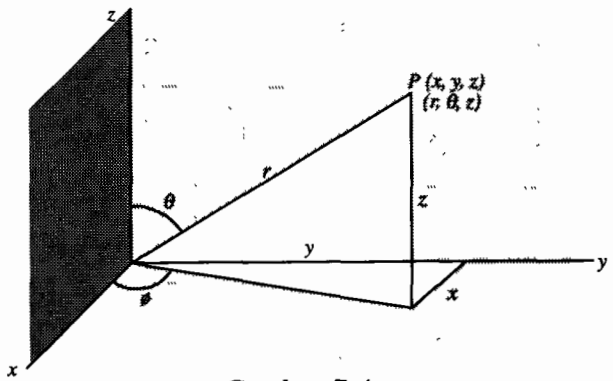
   Perhatikanlah bahwa hasil yang bersesuaian dapat diperoleh untuk koordinat kutub di bidang dengan menghilangkan ketakbebasan z. Sebagai contoh untuk kasus ini; $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 \, d\phi^2$, sedangkan elemen volume diganti oleh elemen luas, $dA = \rho \, d\rho \, d\phi$.

2. Koordinat bola (r, θ, ϕ). Lihat *gambar 7-4*

   Persamaan transformasi :

   $x = r \sin \theta \cos \phi, \; y = r \sin \theta \sin \phi, \; z = r \cos \theta$

   di mana $r \geq 0, \; 0 \leq \theta \leq \pi, \; 0 \leq \phi < 2\pi.$



Gambar 7-4

Faktor skala : $h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r \sin\theta$

Elemen panjang busur :

$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2$

Jacobian : $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$

Elemen volume : $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$

Laplacian : $\nabla^2 U = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial U}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$

Jenis lainnya dari sistem koordinat mungkin terjadi.

7.8. SOAL & PEMECAHANNYA

TURUNAN

1. Jika $\bar{r} = (t^3 + 2t)\bar{i} - 3e^{-2t}\bar{j} + 2 \sin 5t\bar{k}$, tentukanlah (a) $\dfrac{d\bar{r}}{dt}$, (b) $\left|\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right|$, (c) $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, (d) $\left|\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|$ di $t = 0$ dan berikan suatu arti fisis yang mungkin.

(a) $\dfrac{d\bar{r}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(t^3 + 2t)\bar{i} + \dfrac{d}{dt}(-3e^{-2t})\bar{j} + \dfrac{d}{dt}(2 \sin 5t)\bar{k} = (3t^2 + 2)\bar{i} + 6e^{-2t}\bar{j} + 10 \cos 5t\, \bar{k}$

Di $t = 0$. $d\bar{r}/dt = 2\bar{i} + 6\bar{j} + 10\bar{k}$.

(b) Dari (a), $|d\bar{r}/dt| = \sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (10)^2} = \sqrt{140} = 2\sqrt{35}$ di $t = 0$.

(c) $\dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\bar{r}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\{(3t^2 + 2)\bar{i} + 6e^{-2t}\bar{j} + 10\cos 5t\,\bar{k}\} = 6\bar{i} - 12e^{-2t}\bar{j} -$

$50 \sin 5t\,\bar{k}$

Di $t = 0$, $d^2\bar{r}/dt^2 = -12\bar{j}$.

(d) Dari (c), $|d^2\bar{r}/dt^2| = 12$ di $t = 0$.

Jika t menyatakan waktu, maka hal ini berturut-turut menyatakan kecepatan, besarnya kecepatan percepatan dan besarnya percepatan pada $t = 0$ dari suatu partikel yang bergerak sepanjang kurva ruang $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2 \sin 5t$.

2. Buktikanlah bahwa $\dfrac{d}{du}(A \cdot B) = A \cdot \dfrac{dB}{du} + \dfrac{dA}{du} \cdot B$, dimana A dan B adalah fungsi yang mempunyai turunan terhadap u.

Metode 1. $\dfrac{d}{du}(A \cdot B) = \lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{(\bar{A} + \Delta\bar{A}) \cdot (\bar{B} + \Delta\bar{B}) - \bar{A} \cdot \bar{B}}{\Delta u}$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\bar{A} \cdot \Delta\bar{B} + \Delta\bar{A} \cdot \bar{B} + \Delta\bar{A} \cdot \Delta\bar{B}}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0}\left(\bar{A} \cdot \frac{\Delta\bar{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta\bar{A}}{\Delta u} \cdot \bar{B} + \frac{\Delta\bar{A}}{\Delta u} \cdot \Delta\bar{B}\right) = \bar{A} \cdot \frac{d\bar{B}}{du} + \frac{d\bar{A}}{du} \cdot \bar{B}$$

Metode 2. Misalkan $\bar{A} = A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}$, $B = B_1\bar{i} + B_2\bar{j} + B_3\bar{k}$. Maka

$$\frac{d}{du}(\bar{A} \cdot \bar{B}) = \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

$$= \left(A_1\frac{dB}{du} + A_2\frac{dB_2}{du} + A_3\frac{dB_3}{du}\right) + \left(\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3\right)$$

$$= A \cdot \frac{dB}{du} + \frac{dA}{du} \cdot B$$

3. Jika $\phi(x, y, z) = x^2yz$ dan $\bar{A} = 3x^2y\bar{i} + yz^2\bar{j} - xz\bar{k}$, tentukanlah $\dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi A)$ di titik $(1, -2, 1)$.

$$\phi A = (x^2yz)(3x^2y\bar{i} + yz^2\bar{j} - xz\bar{k}) = 3x^4y^2z\bar{i} + x^2y^2z^3\bar{j} - x^3yz^2\bar{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial z}(3x^4y^2z\bar{i} + x^2y^2z^3\bar{j} - x^3yz^2\bar{k}) = 3x^4y^2\bar{i} + 3x^2y^2z^2\bar{j} - 2x^3yz\bar{k}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}(\phi\bar{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^4y^2\bar{i} + 3x^2y^2z^2\bar{j} - 2x^3yz\bar{k}) = 6x^4y\bar{i} + 6x^2yz^2\bar{j} - 2x^3z\bar{k}$$

Jika $x = 1$, $y = -2$, $z = -1$, maka $-12\bar{i} - 12\bar{j} + 2\bar{k}$.

4. Jika $\bar{A} = x^2 \sin y\bar{i} + z^2 \cos y\,\bar{j} - xy^2\bar{k}$, tentukanlah $d\bar{A}$.

Metode 1.

$$\frac{\partial\bar{A}}{\partial x} = 2x \sin y\,\bar{i} - y^2\bar{k}, \quad \frac{\partial\bar{A}}{\partial y} = x^2 \cos y\,\bar{i} - z^2 \sin y\,\bar{j} - 2xyk, \quad \frac{\partial\bar{A}}{\partial z} = 2x \cos y\,\bar{j}$$

$$d\bar{A} = \frac{\partial\bar{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial\bar{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial\bar{A}}{\partial z}dz$$

$$= (2x \sin y\,\bar{i} - y^2\bar{k})\,dx + (x^2 \cos y\,\bar{i} - z^2 \sin y\,\bar{j} - 2xy\bar{k})\,dy + (2z \cos y\,\bar{j})\,dz$$

$$= (2x \sin y\,dx + x^2 \cos y\,dy)\bar{i} + (2z \cos y\,dz - z^2 \sin y\,dy)\bar{j} - (y^2\,dx + 2xy\,dy)\bar{k}$$

Metode 2.

$$dA = d(x^2 \sin y)\bar{i} + d(z^2 \cos y)\bar{j} - d(xy^2)\bar{k}$$

$$= (2x \sin y\,dx + x^2 \cos y\,dy)\bar{i} + (2z \cos y\,dz - z^2 \sin y\,dy)\bar{j} - (y^2\,dx + 2xy\,dy)\bar{k}$$

5. Suatu partikel bergerak sepanjang suatu kurva ruang r(t), di mana t adalah waktu yang diukur dari suatu saat awal. Jika $v = |dr/dt| = ds/dt$ adalah besarnya kecepatan partikel tersebut, (s adalah panjang busur sepanjang kurva ruang yang diukur dari posisi awal), buktikanlah bahwa percepatan partikel a ditentukan oleh

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{T} + \frac{v^2}{\rho}\bar{N}$$

di mana $\bar{T}$ dan $\bar{N}$ adalah vektor singgung dan normal satuan terhadap kurva ruang dan

$$\rho = \left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|^{-1/2} = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-1/2}$$

Kecepatan partikel dinyatakan dengan $v = \upsilon T$. Maka percepatannya adalah

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(\upsilon\bar{T}) = \frac{d\upsilon}{dt}\bar{T} + \upsilon\frac{d\bar{T}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\bar{T} + \upsilon\frac{d\bar{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt}\bar{T} + \upsilon^2\frac{d\bar{T}}{ds} \quad .....(1)$$

Karena T mempunyai panjang satu satuan, kita memperoleh $\bar{T} \cdot \bar{T} = 1$. Kemudian, dengan mendifferensialkannya terhadap s, kita memperoleh

$$\bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} + \frac{d\bar{T}}{ds} \cdot \bar{T} = 0, \quad 2\bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 0 \quad \text{atau} \quad \bar{T} \cdot \frac{d\bar{T}}{ds} = 0$$

dan dari sini diperoleh $d\bar{T}/ds$ tegaklurus $\bar{T}$. Nyatakanlah vektor satuan sepanjang dT/ds ini dengan N, yang dinamakan normal utama pada kurva ruang; kita memperoleh

$$\frac{dT}{ds} = kN \qquad \text{.....(2)}$$

di mana κ adalah panjang dT/ds. Sekarang, karena T = dr/ds [lihat persamaan (9) di halaman 136], kita memperoleh $dT/ds = d^2r/ds^2$. Karena itu

$$\kappa = \left| \frac{d^2r}{ds^2} \right| = \left\{ \left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

Definisikan $\rho = 1/k$, maka (2) menjadi $d\bar{T}/ds = \bar{N}/\rho$. Jadi dari (1) kita memperoleh seperti yang diinginkan, yaitu

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{T} + \frac{v^2}{\rho}\bar{N}$$

Komponen dv/dt dan v^2/ρ dalam arah $\bar{T}$ dan $\bar{N}$ dinamakan komponen tangensial percepatan dan normal percepatan, yang terakhir kadang-kadang dinamakan percepatan sentripetal. Besaran ρ dan κ berturut-turut dinamakan jari-jari kelengkungan (radius of curvature) dan kelengkungan (curvature) dari kurva ruang tersebut.

GRADIEN, DIVERGENSI DAN CURL

6. Jika $\phi = x^2y^3$ dan $\bar{A} = xz\bar{i} - y^2\bar{j} + 2x^2y\bar{k}$, tentukan (a) $\nabla\phi$, (b) $\nabla \cdot A$, (c) $\nabla \times \bar{A}$, (d) div (ϕA), (e) curl (ϕA).

(a) $$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \right)\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)i +$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\bar{k} = 2xyz^3\bar{i} + x^2z^3\bar{j} + 3x^2yz^2\bar{k}$$

(b) $$\nabla \cdot \bar{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \right) \cdot (xz\bar{i} - y^2\bar{j} + 2x^2y\bar{k}) = z - 2y$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) = z - 2y$$

(c) $$\nabla \times \bar{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \right) \times (xz\bar{i} - y^2\bar{j} + 2x^2y\bar{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial z & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(2x^2y) - \frac{\partial}{\partial z}(-y^2)\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(xz) - \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y)\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-y^2)\right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(xz)\right)\bar{k}$$

$$= 2x^2\bar{i} + (x - 4xy)\bar{j}$$

(d) $\text{div}\,(\phi\bar{A}) = \nabla \cdot (\phi\bar{A}) = \nabla \cdot (x^3yz^4\bar{i} - x^2y^3z^3\bar{j} + 2x^4y^2z^3\bar{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3) = 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2$$

(e) $\text{curl}\,(\phi\bar{A}) = \nabla \times (\phi\bar{A}) = \nabla \times (x^3yz^4\bar{i} - z^2y^3z^3\bar{j} + 2x^4y^2z^3\bar{k})$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x^3yz & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix}$$

$$= (4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^3)\bar{i} + (4x^3yz^3 - 8x^3y^2z^3)\bar{j} - (2xy^3z^3 + x^3z^4)\bar{k}$$

7. Buktikanlah $\nabla \cdot (\phi\bar{A}) = (\nabla\phi) \cdot \bar{A} + \phi(\nabla \cdot \bar{A})$.

$$\nabla \cdot (\phi\bar{A}) = \nabla \cdot (\phi A_1\bar{i} + \phi A_2\bar{j} + \phi A_3\bar{k})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_1 + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_2 + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3 + \phi\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot (A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k})$$

$$+ \phi\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot (A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k})$$

$$= (\nabla\phi) \cdot \bar{A} + \phi(\nabla \cdot \bar{A})$$

8. Buktikanlah bahwa $\nabla\phi$ adalah suatu vektor yang tegaklurus pada permukaan $\phi(x, y, z) = c$, di mana c suatu konstanta.

Misalkan $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ adalah vektor posisi suatu titik P(x, y, z) pada permukaan.

Maka $dr = dz\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$ terletak pada bidang singgung di permukaan tersebut di P. Tetapi

$$\partial\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0 \text{ atau } \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k\right) \cdot (dxi + dyj + dzk)$$

$$= 0$$

yaitu $\nabla\phi \cdot dr = 0$ sehingga $\nabla\phi$ tegaklurus pada dr dan karena itu tegaklurus pada permukaan.

9. Tentukanlah suatu normal satuan pada permukaan $2x^2 + 4yz - 5z^2 = -10$ di titik P(3, –1, 2).

Menurut Soal 8, suatu vektor normal pada permukaan adalah

$$\nabla (2x^2 + 4yz - 5z^2) = 4x\bar{i} + 4z\bar{j} + (4y - 10z)\bar{k} = 12\bar{i} + 8\bar{j} - 24\bar{k} \text{ di } (3, -1, 2)$$

Maka suatu normal satuan pada permukaan di P adalah $\dfrac{12i + 8j - 24k}{\sqrt{(12)^2 + (8)^2 + (-24)^2}}$

$$= \frac{3i + 2j - 6k}{7}$$

Normal satuan lainnya pada permukaan di P adalah $-\dfrac{3i + 2j - 6k}{7}$

10. Jika $\phi = 2x^2y - xz^3$, tentukanlah (a) $\nabla\phi$ dan (b) $\nabla^2\phi$.

(a) $\nabla\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\bar{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\bar{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\bar{k} = (4xy - z^3)\bar{i} + 2x^2\bar{j} - 3xz^2\bar{k}$

(b) $\nabla^2\phi$ = Laplacian dari $\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \dfrac{\partial}{\partial x}(4xy - z^3) + \dfrac{\partial}{\partial y}(2x^2) + \dfrac{\partial}{\partial z}(-3xz^2)$

$= 4y - 6xz$

Metode lain :

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2x^2y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial y}(2x^2y - xz^3) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(2x^2y - xz^3)$$

$$= 4y - 6xz$$

11. Buktikanlah div curl $\bar{A} = 0$

$$\text{div curl } A = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \cdot [\ (\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z})\bar{i} + (\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x})\bar{j} + (\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})\bar{k}\ ]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0$$

andaikan bahwa A mempunyai turunan parsial kedua yang kontinu sehingga urutan pendifferensialannya tidak penting.

12. Tentukanlah persamaan (a) bidang singgung dan (b) garis normal pada permukaan $F(x, y, z) = 0$ di titik $P(x_0, y_0, z_0)$. Lihat Gambar 7-5.

(a) Sebuah vektor normal pada permukaan di P adalah $\bar{N}_0 = \nabla F|_p$. Kemudian, jika r_0 dan r masing-masing adalah vektor dari 0 ke $P(x_0, y_0, z_0)$ dan $Q(x, y, z)$ pada bidang tersebut, maka persamaan bidangnya adalah

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{N}_0 = (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \nabla F|_P = 0$$

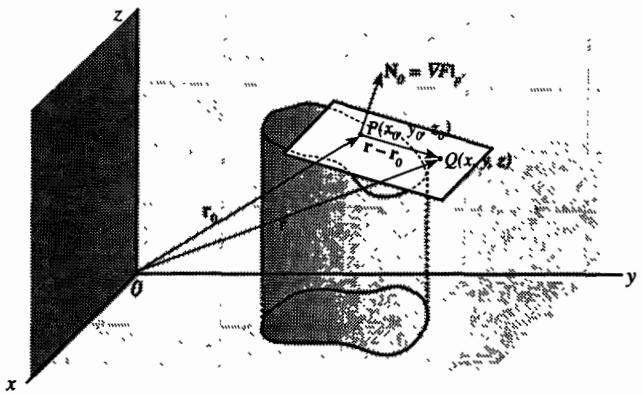
karena $\bar{r} - \bar{r}_0$ tegaklurus pada N_0. Dalam bentuk koordinat menjadi

$$F_x|_P\ (x - x_0) + F_y|_P\ (y - y_0) + F_z|_P\ (z - z_0) = 0$$

(b) Jika r adalah vektor dari titik 0 pada Gambar 7-5 ke suatu titik (x, y, z) pada garis normal, maka $\bar{r} - \bar{r}_0$ segaris dengan $\bar{N}_0$ sehingga

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{N}_0 = (\bar{r} - \bar{r}_0) \times \nabla F|_P = 0$$

yang dalam bentuk koordinat menjadi $\dfrac{x - x_0}{F_x|_P} = \dfrac{y - y_0}{F_y|_P} = \dfrac{z - z_0}{F_z|_P}$



Gambar 7-5

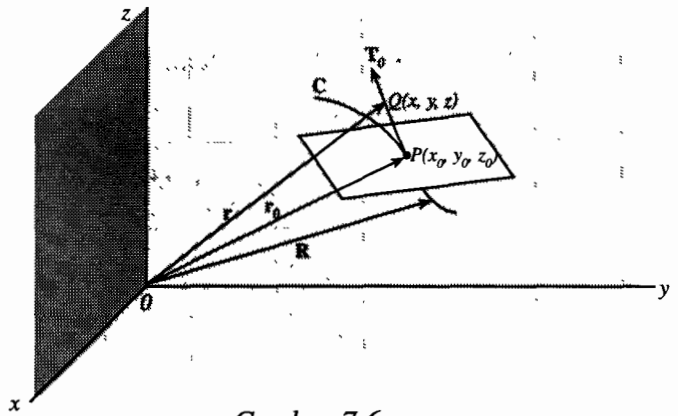
13. Tentukanlah persamaan untuk (a) garis singgung, (b) bidang normal pada kurva ruang $x = f(u)$, $y = g(u)$, $z = h(u)$ pada suatu titik di mana $u = u_0$. Lihat gambar 7-6.

(a) Jika $\bar{R} = f(u)\bar{i} + g(u)\bar{j} + h(u)\bar{k}$, maka sebuah vektor singgung pada kurva G di titik P dinyatakan oleh $\bar{T}_0 = \left.\dfrac{d\bar{R}}{du}\right|_P$. kemudian, jika $\bar{r}_0$ dan $\bar{r}$ adalah vektor yang masing-masing digambarkan dari O ke P dan Q pada garis singgung, kita memperoleh

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{T}_0 = (\bar{r} - \bar{r}_0) \times \left.\frac{d\bar{R}}{du}\right|_P = 0$$

karena $r - r_0$ segaris dengan T_0. Dalam bentuk koordinat menjadi

$$\frac{x - x_0}{f'(u_0)} = \frac{y - y_0}{g'(u_0)} = \frac{z - z_0}{h'(u_0)}$$



Gambar 7-6

(b) Jika $\bar{r}$ adalah vektor dari 0 ke suatu titik (x, y, z) pada bidang normal, maka $\bar{r} - \bar{r}_0$ tegaklurus T_0.

Jadi persamaan yang diinginkan adalah

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{T}_0 = (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \left.\frac{d\bar{R}}{du}\right|_P = 0$$

atau dalam bentuk koordinat menjadi

$$g'(u_0)(x - x_0) + g'(u_0)(y - y_0) + h'(u_0)(z - z_0) = 0$$

14. Jika F(x, y, z) didefinisikan sebagai suatu titik pada kurva ruang C dan s adalah panjang busurnya ke titik (x, y, z) dari suatu titik yang diberikan pada C, tunjukkanlah bahwa

$$\frac{d\bar{F}}{ds} = \nabla F \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} = \nabla \bar{F} \cdot \bar{T}$$

di mana T = dr/ds adalah vektor singgung satuan pada C di titik (x, y, z).

Diketahui :
$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\bar{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{ds}\bar{i} + \frac{dy}{ds}\bar{j} + \frac{dz}{ds}\bar{l}\right)$$

$$= \nabla \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} = \nabla \bar{F} \cdot \bar{T}$$

Kenyataan bahwa $\bar{T} = d\bar{r}/ds$ adalah suatu vektor satuan yang diperoleh dari bentuk $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Kita seringkali menamakan dF/ds sebagai turunan berarah dari F di (x, y, z) sepanjang C.

KOORDINAT KURVILINIER DAN JACOBIAN

15. Tentukan ds^2 dalam koordinat (a) silinder dan (b) bola kemudian tentukan juga faktor skalanya.

(a) **Metode** 1.

$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$
$dx = -\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho, \quad dy = \rho \cos \phi \, d\phi + \sin \phi \, d\rho, \quad dz = dz$

Maka

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (-\rho \sin \phi \, d\phi + \cos \phi \, d\rho)^2 + (\rho \cos \phi \, d\phi + \sin \phi \, d\rho)^2 + (dz)^2$
$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = h_1^2(d\rho)^2 + h_2^2(d\phi)^2 + h_3^2(dz)^2$
dan $h_1 = h_\rho = 1$, $h_2 = h_\phi = \rho$, $h_3 = h_z = 1$ adalah faktor-faktor skalanya.

Metode 2. Vektor posisinya adalah $\bar{r} = \rho \cos \phi \, \bar{i} + \rho \sin \phi \, \bar{j} + z\bar{k}$. maka

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \bar{r}}{\partial z} dz$$

$$= (\cos\phi\,\bar{i} + \sin\phi\,\bar{j})\,d\rho + (-\rho\sin\phi\,\bar{i} + \rho\cos\phi\,\bar{j})\,d\phi + \bar{k}\,dz$$
$$= (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)\bar{i} + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)\bar{j} + \bar{k}\,dz$$

Jadi $ds^2 = dr \cdot dr = (\cos\phi\,d\rho - \rho\sin\phi\,d\phi)^2 + (\sin\phi\,d\rho + \rho\cos\phi\,d\phi)^2 + (dz)^2$
$= (d\rho)^2 + \rho^2(d\phi)^2 + (dz)^2$

(b) $x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$

Maka
$dx = -r\sin\theta\sin\phi\,d\phi + r\cos\theta\cos\phi\,d\theta + \sin\theta\cos\phi\,dr$
$dy = r\sin\theta\cos\phi\,d\phi + r\cos\theta\sin\phi\,d\theta + \sin\theta\sin\phi\,dr$
$dz = -r\sin\theta\,d\theta + \cos\theta\,dr$

dan $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (dr)^2 + r^2(d\rho)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\,(d\phi)^2$

Faktor-faktor skalanya adalah $h_1 = h_r = 1$, $h_2 = h_\theta = r$, $h_3 = h_\phi = r\sin\theta$.

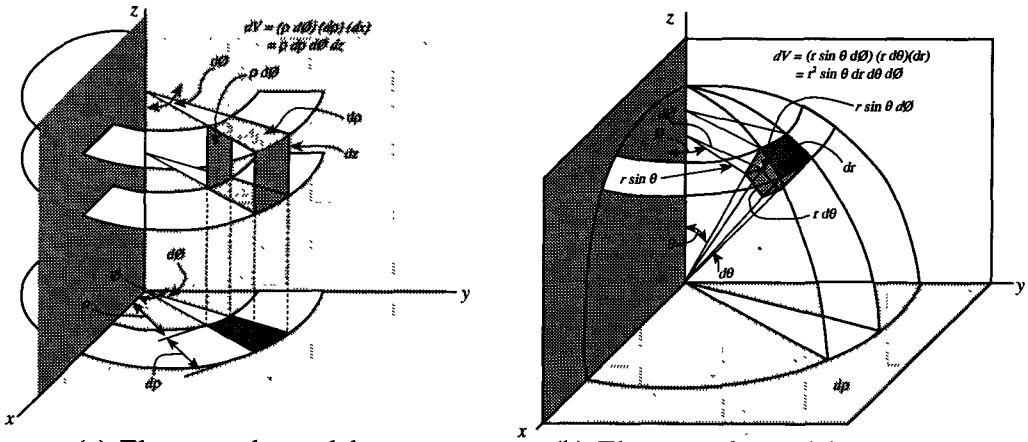
16. Tentukan elemen volume dV dalam koordinat (a) silinder (b) bola dan gambarkanlah.

Elemen volume dalam koordinat kurvilinier tegaklurus u_1, u_2, u_3 adalah

$$dV = h_1h_2h_3\,du_1\,du_2\,du_3 = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)}\right| du_1\,du_2\,du_3$$

(a) Dalam koordinat silinder, $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$, $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ (lihat Soal 15(a)]
Maka $dV = (1)(\rho)(1)\,d\rho\,d\phi\,dz = \rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

Hal ini dapat juga dilihat langsung dari Gambar 7-7(a) berikut.



(a) Elemen volume dalam koordinat silinder

(b) Elemen volume dalam koordinat bola.

Gambar 7-7

(b) Dalam koordinat silinder, $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \phi$, $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r \sin\theta$ [lihat soal 15(b)] Maka

$$dV = (1)(r)(r \sin\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

Hal ini dapat juga dilihat langsung dari Gambar 5-25(b).

17. Nyatakanlah dalam koordinat silinder (a) grad Φ, (b) div A, (c) $\nabla^2\Phi$.

Misalkan $u_1 = \rho$, $u_2 = \phi$, $u_3 = z$, $h_1 = 1$, $h_2 = \rho$, $h_3 = 1$ [lihat Soal 15(a) pada hasil 1 halaman 233, serta 2 dan 4 di halaman ..... Maka

(a) $$\text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bar{e}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\bar{e}_2 + \frac{1}{1}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{e}_3 = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bar{e}_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\bar{e}_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{e}_3$$

di mana e_1, e_2, e_3 adalah vektor satuan dalam arah pertambahan ρ, ϕ, z.

(b) $$\text{div } A = \nabla \cdot A = \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}((\rho)(1)A_1) + \frac{\partial}{\partial\phi}((1)(1)A_2) + \frac{\partial}{\partial z}((1)(\rho)A_3)\right]$$

di mana $\bar{A} = A_1\bar{e}_1 + A_2\bar{e}_2 + A_3\bar{e}_3$.

(c) $$\nabla^2\phi = \frac{1}{(1)(\rho)(1)}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{(\rho)(1)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{(1)(1)}{(\rho)}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1)(\rho)}{(1)}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

18. Jika $F(x, y, u, v) = 0$ dan $G(x, y, u, v) = 0$, tentukan (a) $\partial u/\partial x$, (b) $\partial u/\partial y$, (c) $\partial v/\partial x$, (d) $\partial v/\partial y$.

Ada dua persamaan yang secara umum mendefinisikan peubah tak bebas u dan v sebagai fungsi (implisit) terhadap peubah bebas x dan y. Dengan menggunakan lambang indeks, kita mempunyai

(1) $dF = F_x\, dx + F_y\, dy + F_u\, du + F_v\, dv = 0$

(2) $dG = G_x\, dx + G_y\, dy + G_u\, du + G_v\, dv = 0$

Juga, karena u dan v adalah fungsi dari x dan y, maka

(3) $du = u_x\, dx + u_y\, dy$ (4) $dv = v_x\, dx + v_y\, dy$

Dengan mensubstitusikan (3) dan (4) ke dalam (1) dan (2); yang menghasilkan

$$(5)\quad dF = (F_x + F_u u_x + F_v v_x)\,dx + (F_y + F_u u_y + F_v v_y)\,dy = 0$$

$$(6)\quad dG = (G_x + G_u u_x + G_v v_x)\,dx + (G_y + G_u u_y + G_v v_y)\,dy = 0$$

Karena x dan y bebas, koefisien dari dx dan dy dalam (5) dan (6) adalah nol. Karena itu kita memperoleh

$$(7)\quad \begin{cases} F_u u_x + F_v v_x = -F_x \\ G_u u_x + G_v v_x = -G_x \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} F_u u_y + F_v v_y = -F_y \\ G_u u_y + G_v v_y = -G_y \end{cases}$$

Selesaikanlah (7) dan (8), yang memberikan

$$(a)\quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} -F_x & F_v \\ -G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \qquad (b)\quad v_x = \frac{dv}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_x \\ G_u & -G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}$$

$$(c)\quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -F_y & F_v \\ -G_y & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}} \qquad (d)\quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} F_u & -F_y \\ G_u & -G_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}}{\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}$$

Determinan fungsional $\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$, dinyatakan dengan $\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}$ atau $J\left(\dfrac{F, G}{u, v}\right)$, adalah Jacobian dari f dan G terhadap u dan v diandaikan tak nol.

Perhatikanlah bahwa ini dibuat untuk mengikat aturannya dengan menuliskan sekali lagi turunan parsial yang diinginkan dalam suku-suku Jacobian.

7.9. SOAL-SOAL LATIHAN

ALJABAR VEKTOR

1. Diketahui dua vektor A dan B, gambarkanlah secara ilmu ukur kesamaan $4A + 3(B - A) = A + 3B$.

2. Seseorang berjalan 25 km ke arah timur laut, kemudian dilanjutkan ke arah timur 15 km dan ke arah selatan 10 km. Dengan menggunakan skala yang tepat, tentukanlah secara grafik (a) berapa jauh dan (b) dalam arah mana ia berada dari titik pemberangkatannya. Apakah mungkin menentukan jawaban soal ini secara analitis ?

3. Buktikanlah bahwa $m\bar{A} + n\bar{B}$ adalah suatu vektor yang terletak di bidang yang dibentang oleh $\bar{A}$ dan $\bar{B}$, jika $\bar{A}$ dan $\bar{B}$ adalah dua vektor bukan nol yang arahnya tidak sama.

4. Buktikanlah bahwa $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Jika $\bar{A}$, $\bar{B}$ dan $\bar{C}$ adalah tiga vektor yang tidak sebidang, dan $x_1\bar{A} + y_1\bar{B} + z_1\bar{C} = x_2\bar{A} + y_2\bar{B} + z_2\bar{C}$.

5. Misalkan ABCD adalah suatu segiempat dan titik-titik P, Q, R dan S adalah titik tengah dari sisi-sisi yang berurutan. Buktikanlah (a) PQRS adalah suatu jajaran genjang dan (b) keliling PQRS sama dengan jumlah panjang diagonal ABCD.

6. Buktikanlah bahwa ketiga garis berat suatu segitiga berpotongan di satu titik yang merupakan titik pertigaan dari setiap garis berat tersebut.

7. Tentukanlah suatu vektor satuan dalam arah vektor resultan dari vektor-vektor $A = 2\bar{i} - j + k$, $\bar{B} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, dan $C = 3\bar{i} = 2\bar{j} + 4\bar{k}$.

HASILKALI TITIK ATAU SKALAR

8. Hitunglah $|(\bar{A} + \bar{B}) \cdot (\bar{A} - \bar{B})|$ jika $\bar{A} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ dan $\bar{B} = 3\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$.

9. Buktikanlah rumus kosinus untuk suatu segitiga. [Petunjuk : Ambillah sisi segitiganya A, B, C di mana $\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}$. Kemudian gunakanlah $\bar{C} \cdot \bar{C} = (\bar{A} - \bar{B}) \cdot (\bar{A} - \bar{B})$].

10. Tentukanlah a sehingga $2\bar{i} - 3\bar{j} + 5\bar{k}$ tegaklurus $3\bar{i} + a\bar{j} - 2\bar{k}$.

11. Tentukan proyeksi $\vec{A} + \vec{C}$ dalam arah $\vec{B}$, jika $\bar{A} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $B = \bar{i} - 2\bar{j} + 2\bar{k}$ dan $C = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$.

12. Titik-titik sudut segitiga adalah A (2, 3, 1), B (–1, –2, 3). Tentukanlah (a) panjang garis berat yang digambarkan dari B ke sisi AC dan (b) sudut lancip antara garis berat ini dengan sisi BC.

13. Buktikanlah bahwa diagonal suatu belah ketupat saling tegaklurus.

14. Buktikanlah bahwa vektor $(\vec{AB} + \vec{BA})/(\bar{A} + \bar{B})$ menyatakan garis bagi sudut antara A dan B.

HASILKALI SILANG ATAU VEKTOR

15. Tentukanlah $|(2\bar{A} + \bar{B}) \times (\bar{A} - 2\bar{B})|$ jika $\bar{A} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ dan $\bar{B} = \bar{i} + 2\bar{j} - 3\bar{k}$.

16. Tentukanlah suatu vektor satuan yang tegaklurus bidang yang memuat vektor $\bar{A} = 3i - 2j + 4k$ dan $B = i + j - 2k$.

17. Apakah perlu berlaku $\bar{B} = \bar{C}$ jika $\bar{A} \times \bar{B} = \bar{A} \times \bar{C}$?

18. Tentukanlah jarak terpendek dari titik (3, 2, 1) ke bidang yang melalui titik (1, 1, 0), (3, –1, 1) dan (–1, , 2).

HASILKALI LIPAT TIGA

19. Jika $\bar{A} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$, $\bar{B} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{C} = -1\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$, tentukanlah (a) $\vec{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})$, (b) $\bar{C} \cdot (\bar{A} \times \bar{B})$, (c) $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C})$, (d) $(\bar{A} \times \bar{B}) \times \bar{C}$.

20. Buktikanlah bahwa (a) $\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C}) = \vec{B} \cdot (\bar{C} \times \bar{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$
(b) $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{B}(\bar{Z} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B})$.

21. Tentukanlah suatu persamaan bidang yang melalui titik (2, –1, –2), (–1, 2, –3), (4, 1, 0).

22. Tentukanlah volume tetrahedron dengan titik-titik sudut (2, 1, 1), (1, –1, 2), (0, 1, –1), (1, –2, 1).

23. Buktikanlah bahwa $(\bar{A} \times \bar{B}) \cdot (\bar{C} \times \bar{D}) + (\bar{B} \times \bar{C}) \cdot (\bar{A} \times \bar{D}) + (\bar{C} \times \bar{A}) \cdot (\bar{B} \times \bar{D}) = 0$.

TURUNAN

24. Suatu partikel bergerak sepanjang kurva ruang $\vec{r} = e^{-t} \cos t\, \bar{i} + \bar{e}^{-t} \sin t\, \vec{j} + e^{-t}\vec{k}$. Tentukanlah besarnya (a) kecepatan dan (b) percepatan pada setiap saat t.

25. Buktikanlah bahwa $\dfrac{d}{du}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \dfrac{d\bar{B}}{du} + \dfrac{d\bar{A}}{du} \times \bar{B}$

dimana $\bar{A}$ dan $\bar{B}$ adalah fungsi yang mempunyai turunan terhadap u.

26. Tentukanlah suatu vektor singgung satuan pada kurva ruang $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ di titik dengan $t = 1$.

27. Buktikan bahwa (a) $\bar{r} \times \dfrac{d\bar{r}}{dt} = \omega(\bar{a} \times \bar{b})$, (b) $\dfrac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0$,

jika $\bar{r} = \bar{a} \cos \omega t + \bar{b} \sin \omega t$, dimana a dan b adalah vektor-vektor tak-segaris dan ω skalar konstan.

28. Tentukan (a) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\bar{A} \times \bar{B})$ dan (b) $d[\bar{A} \cdot (\bar{B} \times \bar{C})]$ di titik (a, –1, 2).

Jika $\bar{A} = x^2\bar{i} - y\bar{j} + xz\bar{k}$, $\bar{B} = y\bar{i} + x\bar{j} - xyzk$ dan $\bar{C} = \bar{i} - y\bar{j} + x^3z\bar{k}$.

29. Tentukanlah $\left| \dfrac{\partial^2\bar{R}}{\partial x^2} \times \dfrac{\partial^2\bar{R}}{\partial y^2} \right|$ di titik (2, 1, –2). Jika $\bar{R} = x^2y\bar{i} - 2y^2z\bar{j} + xy^2z^2\bar{k}$.

30. Buktikan bahwa $d\bar{A}/du$ tegaklurus $\bar{A}$. Jika A adalah suatu fungsi yang mempunyai turunan terhadap u dan $|\bar{A}(u)| = 1$.

31. Misalkan $\bar{T}$ dan $\bar{N}$ berturut-turut menyatakan vektor singgung satuan dan vektor normal-utama satuan pada kurva ruang $\bar{r} = \bar{r}(u)$, di mana $\bar{r}(u)$ diandaikan mempunyai turunan. Definisikanlah suatu vektor $\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N}$ yang dinamakan vektor binormal satuan pada kurva ruang tersebut. Buktikanlah bahwa

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \kappa\bar{N}, \quad \frac{d\bar{B}}{ds} = -\tau\bar{N}, \quad \frac{d\bar{N}}{ds} = \tau\bar{B} - \kappa\bar{T}$$

Ini dinamakan Rumus Frenet-Serret. Dalam rumus ini κ dinamakan kelengkungan, τ dinamakan torsi; dan kebalikan dari keduanya, $p = 1/\kappa$ dan $\sigma = 1/\tau$, masing-masing dinamakan jari-jari kelengkungan dan jari-jari torsi.

GRADIEN, DIVERGENSI DAN CURL

32. Buktikanlah bahwa (a) $\nabla(\bar{U} + \bar{V}) = \nabla\bar{U} + \nabla\bar{V}$, (b) $\nabla \cdot (\bar{A} + \bar{B}) = \nabla \cdot \bar{A} + \nabla \cdot \bar{B}$, (c) $\nabla \times (\bar{A} + \bar{B}) = \nabla \times \bar{A} + \nabla \times \bar{B}$. Jika $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ mempunyai turunan parsial yang kontinu.

33. Tentukan (a) $\bar{A} \cdot \nabla\phi$, (b) $\phi\nabla \cdot \bar{A}$ dan (c) $(\nabla\phi) \times \bar{A}$ di titik (3, –1, 2). Jika $\phi = xy + yz + xz$ dan $\bar{A} = x^2y\bar{i} + y^2z\bar{j} + z^2x\bar{k}$.

34. Tunjukkanlah bahwa $\nabla \times (r^2r) = 0$ di maha $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ dan $r = |\bar{r}|$.

35. Buktikanlah (a) $\nabla \times (U\bar{A}) = (\nabla U) \times \bar{A} + U(\nabla \times \bar{A})$, (b) $\nabla \cdot (\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{B} \cdot (\nabla \times \bar{A}) - \bar{A} \cdot (\nabla \times \bar{B})$.

36. Buktikanlah bahwa curl grad U = 0, nyatakan syarat yang sesuai untuk U.

37. Tentukanlah sebuah normal satuan pada permukaan $x^2y - 2xz + 2y^2z^4 = 10$ di titik (2, 1, –1).

38. Tentukanlah curl $\bar{A}$, jika $\bar{A} = 3xz^2\bar{i} - yz\bar{j} + (x + 2z)\bar{k}$.

39. (a) Buktikanlah $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = -\nabla^2\bar{A} + \nabla(\nabla \cdot \bar{A})$. (b) Periksalah hasil pada (a) jika a diketahui seperti pada Soal 38.

40. Tentukanlah persamaan (a) dibidang singgung dan (b) garis normal pada permukaan $x^2 + y^2 = 4z$ di titik (2, –4, 5).

41. Tentukanlah persamaan (a) garis singgung (b) bidang normal paa kurva ruang $x = 6 \sin t$, $y = 4 \cos 3t$, $z = 2 \sin 5t$ di suatu titik dengan $t = \pi/4$.

42. (a) Tentukanlah turunan berarah dari $U = 2xy - z^2$ di (2, –1, 1) dalam arah menuju (3, 1, –1). (b) Dalam arah manakah turunan berarah di maksimum? (c) Tentukanlah nilai maksimum ini.

43. Buktikanlah bahwa sudut lancip γ di antara sumbu z dan normal pada permukaan F (x, y, z) = 0 di suatu titik diberikan oleh rumus $\sec \gamma = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}/|F_z|$.

44. (a) Bentuklah rumus untuk jarak terpendek dari titik (x_0, y_0, z_0) ke suatu permukaan (b) Berikan ilustrasi pada (a) dengan menentukan jarak terpendek dari titik (1, 1, –2) ke permukaan $z = x^2 + y^2$.

45. Misalkan $\bar{E}$ dan $\bar{H}$ adalah dua vektor yang diandaikan mempunyai turunan parsial yang kontinu (paling sedikit orde dua) terhadap posisi dan waktu. Selanjutnya, andaikan bahwa $\bar{E}$ dan $\bar{H}$ memenuhi persamaan

$$\nabla \cdot \bar{E} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{H} = 0, \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \bar{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \qquad \text{.....(1)}$$

Buktikanlah bahwa E dan H memenuhi persamaan.

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

(Vektor $\bar{E}$ dan $\bar{H}$ dinamakan vektor-vektor medan listrik dan magnet dalam teori elektromagnetik. Persamaan (1) adalah hal khusus dari persamaan Maxwell. Hasil (2) membawa Maxwell pada kesimpulan bahwa cahaya adalah suatu fenomena elektromagnetik. Konstanta c adalah kecepatan cahaya).

46. Gunakanlah hubungan dalam Soal 45 untuk menunjukkan bahwa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(E^2 + H^2)\right\} + c\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = 0$$

47. Buktikanlah bahwa $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| = \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial u_3} \right|$

48. Nyatakanlah (a) grad ϕ, (b) div $\bar{A}$ dalam koordinat bola.

49. Transformasi dari koordinat tegaklurus ke koordinat silinder parabolik didefinisikan oleh persamaan $x = {}^1/_2 (u^2 - v^2)$, $y = uv$, $z = z$. (a) Buktikanlah bahwa sistem tersebut tegaklurus. (b) Tentukan ds^2 dan faktor-faktor skalanya. (c) Tentukan Jacobian transformasi ini dan elemen volumenya.

50. Tuliskanlah (a) $\nabla^2\Phi$ dan (b) div $\bar{A}$ dalam koordinat silinder parabolik.

51. Buktikanlah bahwa untuk koordinat kurvilinier tegaklurus,

$$\nabla\Phi = \frac{\bar{e}_1}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial u_1} + \frac{\bar{e}_2}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial u_2} + \frac{\bar{e}_3}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial u_3}$$

(Petunjuk : Misalkan $\nabla\Phi = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$ dan gunakan kenyataan bahwa $d\Phi = \nabla\Phi \cdot dr$ harus sama dalam kedua koordinat tegaklurus dan kurvilinier).

52. Buktikanlah bahwa percepatan suatu partikel sepanjang suatu kurva ruang yang diberikan dalam koordinat (a) silinder, (b) bola, masing-masing adalah

$$(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\bar{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\bar{e}_\phi + \ddot{z}\bar{e}_z$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2\theta)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta)\bar{e}_\theta + (2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + r\ddot{\phi}\sin\theta)\bar{e}_\phi$$

di mana titik menyatakan turunan terhadap waktu dan $\bar{e}_\rho$, $\bar{e}_\phi$, $\bar{e}_z$, $\bar{e}_r$, $\bar{e}_\theta$, $\bar{e}_\phi$ berturut-turut adalah vektor satuan dalam arah ρ, ϕ, z, r, θ, ϕ.

53. Hitunglah $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$ di (1, −1, 0).

Jika $F = x + 3y^2 - z^3$, $G = 2x^2yz$, dan $H = 2z^2 - xy$.

54. Tentukan apakah ada hubungan fungsional di antara F, G dan H; dan jika ada, tentukan. Jika $F = xy + yz + zx$, $G = x^2 + y^2 + z^2$, dan $H = x + y + z$.

55. Jika F(P, V,T) = 0, buktikan bahwa

(a) $\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_P = -\frac{\partial P}{\partial V}\Big|_{\bar{r}}$, (b) $\frac{\partial P}{\partial T}\Big|_V \frac{\partial T}{\partial V}\Big|_P \frac{\partial V}{\partial P}\Big|_{\bar{r}} = -1$

di mana tanda garis menyatakan bahwa peubahnya dipandang tetap. Hasil ini digunakan dalam termodinamika di mana P, V, T adalah tekanan, volume dan temperatur dalam suatu sistem fisika.

56. (a) Jika x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), dan z = h(u, v, w), buktikanlah bahwa

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, w)} = 1 \text{ asalkan}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0.$$

(b) Berikanlah suatu tafsiran hasil (a) dalam suku-suku dari transformasi ini.

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

2. 33,6 km, 13,2° dari timur ke arah utara

7. $(6i - 2j + 7k)/\sqrt{89}$

8. 24

10. a = –4/3

11. 17/3

12. (a) $^1/_2\sqrt{26}$, (b) $\cos^{-1}\sqrt{91/14}$

15. $25\sqrt{3}$

16. $\pm(2j + k)/\sqrt{5}$

17. $^1/_2\sqrt{3}$

18. 2

19. (a) 20, (b) 20, (c) 8i – 19j – k, (d) 25i – 15j – 10k

21. $2x + y - 3z = 9$

22. $^4/_3$

24. (a) $\sqrt{3}e^{-t}$, (b) $\sqrt{5}e^{-t}$

26. $(\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k})/\sqrt{14}$

28. (a) $-4\bar{i} + 8\bar{j}$, (b) 8 dx

29. $16\sqrt{5}$

33. (a) 25, (b) 2, (c) $56\bar{i} - 30\bar{j} + 47\bar{k}$

37. $\pm(3\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k})/\sqrt{61}$

38. $-6x\bar{i} + (6z - 1)\bar{k}$

40. (a) $x - 2y - z + 5$, (b) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-5}{-1}$

41. (a) $\dfrac{x-3\sqrt{2}}{3} = \dfrac{y+2\sqrt{2}}{-6} = \dfrac{z+\sqrt{2}}{-5}$ (b) $3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2}$

42. (a) 10/3, (b) $-2\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$, (c) $2\sqrt{6}$

48. (a) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\bar{e}_1 + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\bar{e}_2 + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\phi}\bar{e}_3$

(b) $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_1) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, A_2) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial A_3}{\partial\phi}$

di mana $\bar{A} = A_1\bar{e}_1 + A_2\bar{e}_2 + A_3\bar{e}_3$

49. (b) $ds^2 = (u^2 + v^2)\,du^2 + (u^2 + v^2)\,dv^2 + dz^2$, $h_1 = h_2 = \sqrt{u^2 + v^2}$, $h_3 = 1$

(c) $u^2 + v^2$, $(u^2 + v^2)\,du\,dv\,dz$

50. (a) $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^3}\right) + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

(b) $\text{div}\,\bar{A} = \dfrac{1}{u^2 + v^2}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u^2 + v^2}\,A_1) + \dfrac{\partial}{\partial v}(\sqrt{u^2 + v^2}\,A_2)\right\} + \dfrac{\partial A_3}{\partial z}$

53. 10

54. $H^2 - G - 2F = 0$