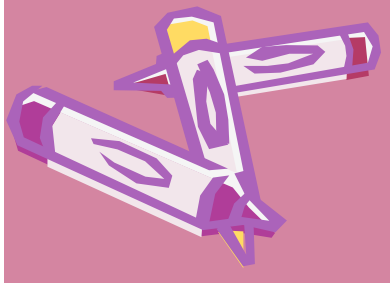

ALJABAR MATRIKS

Pemecahan untuk mencari titik ekuilibrium sebelumnya adalah relative sederhana. Bila semakin banyak barang yang dimasukkan kedalam model, maka penyelesaian dengan rumus tsb menjadi tidak praktis. Metoda yang lebih baik untuk pemecahan persamaan simultan dengan beberapa variable adalah menggunakan aljabar matriks.

Aljabar matriks membantu kita :

a. Memberikan sistem persamaan yang ringkas.
b. Pemecahannya melalui determinan.
c. Memberi cara pemecahan jika ada



Pengertian :

Matriks adalah susunan/daftar/array dari suatu angka2 yang mempunyai ikatan berdasar baris atau kolom dan yang mempunyai kegunaan tertentu.

Susunan Baris : angka2 diurutkan secara horizontal (ke arah kanan – kiri)

Susunan Kolom : angka2 diurutkan secara vertikal (dari atas – bawah)

Ikatan : menunjukkan hubungan secara berturut. Misal, krn matriks merpkan nilai paramater dari suatu persamaan.

Kegunaan : untuk menyederhanakan, memudahkan ataupun mempercepat perhitungan suatu persamaan.

Perhatikan matriks A berikut :

$$A : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

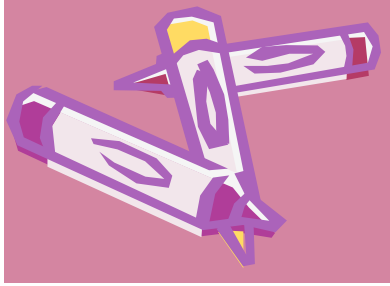
Pengertian baris (raw) dan kolom (lajur/coloumn) :

a_{13} : menunjukkan element (unsur) matriks A yang terletak pada baris ke 1 dan kolom ke 3, 5

a_{21} : menunjukkan element (unsur) matriks A yang terletak pada baris ke 2 dan kolom ke 1, 0

Analog :

b_{ij} : menunjukkan element (unsur) matriks B yang terletak pada baris ke i dan kolom ke j



4.1. Matriks dan vektor

Secara umum sistem dengan m persamaan linear dan n variabel ($x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$) dapat disusun dalam bentuk :

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n &&= d_1 \\
a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n &&= d_2 \\
\vdots &\quad\ \vdots &&\quad\ \vdots \\
a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n &&= d_m
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

Dalam sistem persamaan (4.1) terdapat 3 macam bahan pokok, yaitu :

1. Himpunan koefisien a_{ij},
2. Himpunan variabel $x_1, \ldots\ldots, x_n$,
3. Himpunan konstanta $d_1, \ldots\ldots, d_m$.

(4.2) $A : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad x : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad d : \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$

Contoh :

(4.3)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 + x_3 &= 22 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 12 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

Dapat ditulis

(4.4) $A : \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad x : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix} \quad d : \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$

Setiap susunan dalam (4.2) atau (4.4) merupakan suatu matriks

Vektor sebagai matriks khusus

Jumlah baris dan kolom dalam suatu matriks menunjukkan dimensi dari matriks.

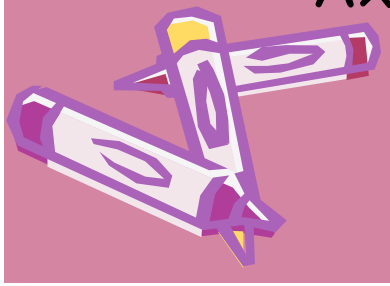
Sebuah matriks yang memiliki banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom, disebut matriks kuadrat (square matrix).

Matriks yang berisi satu kolom, disebut vektor kolom.

Matriks yang berisi satu baris, disebut vektor baris, vektor baris menggunakan simbol $x' = [\ x_1 \quad x_2 \quad \ldots\ X_n\ ]$

Dengan menggunakan matriks dalam (4.4) kita dapat menyatakan persamaan (4.3) menjadi

$$Ax = d$$

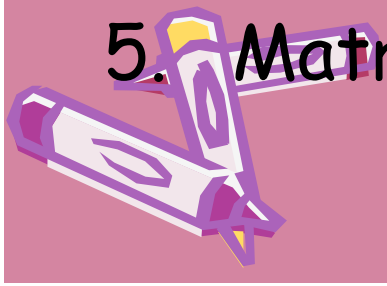


4.2. Operasi dengan matriks

1. Persamaan (equality).
2. Penjumlahan dan pengurangan matriks.
3. Perkalian bilangan (scalar multiplication)
4. Perkalian matriks

4.3. Beberapa jenis matriks

1. Matriks nol
2. Matriks identitas
3. Matriks diagonal
4. Matriks skalar
5. Matriks simetris
6. Skalar
7. Vektor
8. Matriks non singular
9. Matriks singular



4.6. Transpose dan inverse

Transpose suatu matriks A dapat ditulis A^T atau A'.
Diten-tukan dengan merubah elemen tiap baris matriks A men-jadi kolom2 matriks A' atau sebaliknya.

$$A : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A' : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Atau

$$B : \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B' : \begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat transpose

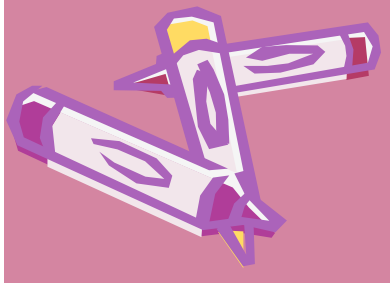
Sifat – sifat berikut meripakan ciri dari transpose :

1. $(A')' = A$
2. $(A + B)' = A' + B'$
3. $(AB)' = B'A'$

Inverse dan sifat-sifatnya

Inverse matriks A ditunjukkan dengan simbol A^{-1}, hanya dapat ditentukan bila A adalah matriks kuadrat, dimana inverse adalah matriks yang memenuhi kondisi

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

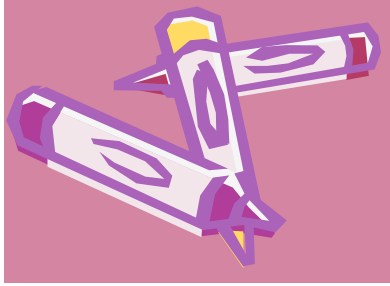


Beberapa yang perlu diperhatikan :

1. Tidak semua matriks kuadrat mempunyai inverse. Bila matriks kua-drat A dapat diinverse (dibalik), maka A dis non – singular. Bila A tdk bisa diinverse disebut matriks singular.
2. A dan A^{-1} merupakan inverse satu sama lain.
3. Bila A adl n x n, maka A^{-1} juga harus n x n. Matriks identitas yang diperoleh juga berdimensi n x n.
4. Bila suatu matriks mempunyai inverse, maka hanya memp satu inverse matriks. Bila A^{-1} adalah B, maka $AB = BA = I$

   terdapat matriks lain C, shg $AC = CA = I$. dengan mengalikan bagian $AB = I$ dengan C , kita peroleh $CAB = CI$

   karena $CA = I$ maka $IB = C$ atau $B = C$
5. $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$. Sebenarnya menyatakan bahwa kedua hubungan inverse antara A dan A^{-1}



Matriks inverse dan penyelesaian sistem persamaan linear

Penggunaan konsep matriks inverse dalam penyelesaian suatu sistem persamaan linear adalah langsung dan cepat. Dari sistem persama-an linear (4.3) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut :

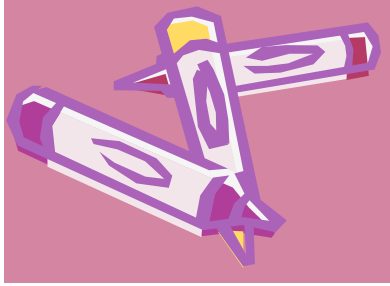
(4.17) $$\underset{(3\times3)}{A}\ \underset{(3\times1)}{x} = \underset{(3\times1)}{d}$$

sekarang bila terdapat matriks inverse A^{-1} perkalian kedua bagian persamaan (4.17) dengan A^{-1} akan menghasilkan

$$A^{-1}Ax = A^{-1}d$$

atau

(4.18) $$\underset{(3\times3)}{x} = \underset{(3\times3)}{A^{-1}}\ \underset{(3\times1)}{d}$$



Penyelesaian (perhitungan akan dibahas dalam bab berikutnya)

$$A^{-1} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 18 & -16 & -16 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{52}\begin{pmatrix} 18 & -16 & -10 \\ -13 & 26 & 13 \\ -17 & 18 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Maka jawabannya adalah : $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 1$

