Bab 4: Sinyal dan Sistem di Domain Frekuensi

1 Konsep Spektrum Frekuensi

Suatu Sinyal dapat didekomposisi menjadi komponen-komponen sinusoidal (atau eksponensial kompleks). Dengan dekomposisi semacam itu, sebuah sinyal dikatakan direpresentasikan dalam *Domain Frekuensi*.

Pada sinyal periodik, dekomposisi menjadi komponen sinusoidal disebut *Deret Fourier*. Sedangkan pada sinyal aperiodik (finite energy) disebut sebagai *Transformasi Fourier*. Transformasi Fourier dan Deret Fourier adalah alat matematis yang sangat penting dalam analisis dan desain sistem LTI.

Dengan melakukan analisis frekuensi, kita dapat melihat representasi matematis komponen-komponen frekuensi yang terkandung dalam suatu sinyal. Rangkaian frekuensi yang terkandung dalam sinyal tersebut disebut *spectrum*.

1.1 Frekuensi Sinyal Kontinue Periodik

Tujuan Belajar 1

Peserta dapat menghitung spektrum (deret Fourier) dari sinyal kontinu yang periodik.

Representasi matematis dasar dari sinyal periodik adalah Deret Fourier, yang merupakan penjumlahan berbobot linear *(linear weighted sum)* dari sinyal sinusoidal atau eksponensial kompleks.

Kombinasi linear dari eksponensial kompleks harmonis dalam bentuk $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2pkF_o t}$ adalah sinyal periodik dengan periode fundamental: $T_p = \frac{1}{T_o}$.

Oleh karena itu, kita dapat berpikir bahwa sinyal eksponensial { $e^{j2pkF_o t}$ k = …, -2, -1, 0, 1, 2, …} adalah "building block" dasar, yang darinya kita dapat mengkonstruksi sinyal periodik dengan berbagai tipe dengan memilih frekuensi fundamental dan koefisen-koenfisien $\{c_k\}$. F_o menentukan periode fundamental dari x(t) dan koefisien $\{c_k\}$ menentukan bentuk dari gelombang (waveform).

Bila diberikan sinyal periodik x(t) dengan periode T_p. Kita dapat merepresentasikan sinyal tersebut dengan suatu deret yang disebut Deret Fourier, dimana frekuensi fundamental F_o dipilih timbal balik dengan periode T_p. Untuk menentukan ekpresi dari koefisen-koenfisien $\{c_k\}$, kita pertama-tama harus mengalikan kedua sisi dengan eksponensial kompleks $e^{-j2pF_o lt}$, dimana l adalah integer, dan kemudian mengintegrasikan kedua sisi pada satu periode, dari t_o ke t_o+T_p. Akan kita dapatkan :

$$\int_{t_o}^{t_o+T_p} x(t)e^{-j2plF_ot}dt = \int_{t_o}^{t_o+T_p} e^{-j2plF_ot}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2pkF_ot}\right)dt$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_o}^{t_o+T_p} e^{j2pF_o(k-l)t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left[\frac{e^{j2pF_o(k-l)t}}{j2pF_o(k-l)}\right]_{t_o}^{t_o+T_p}$$

$$\downarrow$$

0 bila $k \neq l$

karena $e^{j2pF_o(k-l)(t_o+T_p)} = e^{j2pF_o(k-l)t_o}$

tapi bila $k=l$

$$\int_{t_o}^{t_o+T_p} dt = t\Big|_{t_o}^{t_o+T_p} = T_p$$

Jadi $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{t_o}^{t_o+T_p} e^{j2pF_o(k-l)t}dt = c_l T_p$

Karena t_o adalah sembarang, maka integral dapat dievaluasi dalm setiap interval T_p. Konsekuensinya, integral untuk koefisien Deret Fourier dapat ditulis sebagai

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2pkF_ot}dt$$

Tujuan Belajar 2

Peserta mengerti konvergensi deret Fourier melalui kondisi Dirichlet.

Hal penting yang muncul dalam merepresentasikan sinyal periodik dalam Deret Fourier adalah apakah deret tersebut konvergen untuk x(t) pada setiap nilai t, yaitu bila sinyal x(t) dan representasi Deret Fourier-nya $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2pkF_ot}$ adalah sama untuk setiap nilai t.

Kondisi Dirichlet menjamin bahwa deret tersebut akan sama dengan x(t), kecuali pada nilai t dimana x(t) diskontinyu.

Kondisi Dirichlet adalah :

1. Sinyal x(t) memiliki discontinuitas dalam setiap perioda dalam jumlah yang terbatas.
2. Sinyal x(t) mengandung maxima dan minima dalam suatu perioda dalam jumlah yang terbatas.
3. Sinyal x(t) dapat diintegralkan secara absolut dalam sembarang periode,

$$\int_{T_p} |x(t)|\,dt < \infty$$

Sebagai kesimpulan, bila sinyal x(t) adalah periodik dan memenuhi Kondisi Dirichlet, maka sinyal tersebut dapat direpresentasikan sebagai Deret Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2pkF_o t} \text{ dimana } c_k = \frac{1}{T_p}\int_{T_p} x(t)e^{-j2pkF_o t}dt$$

Tujuan Belajar 3

Peserta dapat menghitung variant dari deret Fourier dalam bentuk cos dan sin.

Secara umum, C_k adalah bilangan kompleks. Lebih jauh lagi, bila sinyal periodik tersebut adalah, maka C_k dan C_{-k} adalah *complex conjugate*.

$$c_k = |c_k|\,e^{jq_k}$$

$$c_{-k} = |c_k|\,e^{-jq_k}$$

maka :

$$c_k + c_{-k} = |c_k|\left(e^{jq_k} + e^{-jq_k}\right)$$

$$= 2|c_k|\cos q_k$$

Sehingga Deret Fourier dapat direpresentaskan dalam bentuk :

$$x(t) = c_o + 2\sum_{k=1}^{\infty}\cos(2pkF_o t + q_k)$$

dimana c_o adalah real ketika x(t) adalah real.

Persamaan tersebut dapat jabarkan menjadi :

$$\cos(2pkF_o t + q_k) = \cos 2pkF_o t\cos q_k - \sin 2pkF_o t\sin q_k$$

Sehingga kita dapat merepresentasikan Deret Fourier dalam bentuk :

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2pkF_o t - b_k\sin 2pkF_o t)$$

dimana $a_0 = c_o$

$a_k = 2|c_k|\cos\theta_k$
$b_k = 2|c_k|\sin\theta_k$

Tujuan Belajar 4

Peserta dapat menghitung Power Density Spectrum atau Power Spectrum dari sinyal kontinu yang periodik, dalam term domain waktu maupun domain Fourier *(Parseval's relation).*

Suatu sinyal periodik memiliki energi tak terhingga *(infinite)* dan daya rata-rata yang terhingga *(finite)*, yang diberikan sebagai

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} |x(t)|^2 \, dt$$

Kita ingat bahwa $|x| = \sqrt{xx^*}$, maka :

$$P_x = \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t)x^*(t)dt$$

$$= \frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k{}^* e^{-j2pF_o k t} dt$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k{}^* \left[\frac{1}{T_p} \int_{T_p} x(t) e^{-j2pkF_o t} dt \right]$$

$$\uparrow c_k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Ini disebut *Parseval's Relation*, yang dihitung dalam term c_k.

Tujuan Belajar 5

Peserta dapat memplot spektrum secara alternatif berbetuk power spectrum maupun magnitude dan fasa.

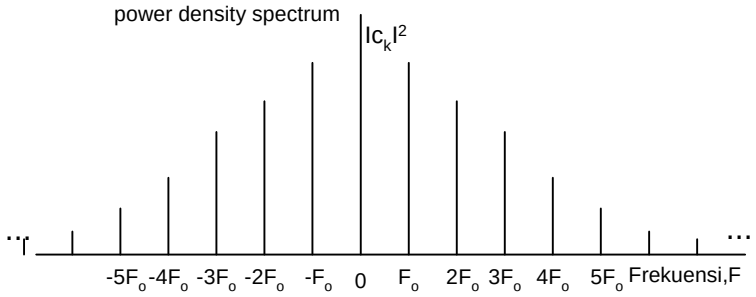
Kita dapat melihat bahwa x(t) adalah deret dari harmonic :

$$... + C_{-2} e^{-j2pFo2t} + C_{-1} e^{-j2pFot} + Co + C_1 e^{j2pFot} + C_2 e^{j2pFo2t} + ...$$

Daya rata-rata pada masing-masing komponen frekuensi adalah :

$$P_x = |c_k|^2$$

Bila kita memplot $|c_k|^2$ sebagai fungsi dari frekuensi kF_0, k= …-2,-1,0,1,2, … , maka dapat dibuat suatu diagram yang disebut *Power Density Spectrum*, yang menggambarkan bagaimana daya dari sinyal periodik didistribusikan diantara komponen-komponen frekuensi.



Gambar 1. $|c_k|^2$ adalah daya dari komponen pada frekuensi kF_o

Karena daya pada sinyal periodik ada hanya pada nilai diskrit frekuensi (F= … $-2F_0$, $-F_0$, 0, F_0,$2F_0$ …), makanya sinyal tersebut dikatakan memiliki *line spectrum*. Spasi diantara garis spectral yang bersebelahan adalah sebanding dengan periode fundamental T_p.

Sebagai alternatif dari memplot *Power Density Spectrum*, kita dapat memplot *Magnitude Spectrum* $\{|c_k|\}$ dan *Phase spectrum* $\{|q_k|\}$ sebagai fungsi dari frekuensi.

Koefisien Detet Fourier yang merupakan bilangan kompleks dapat direpresentasikan sebagai :

$$c_k = |c_k| e^{jq_k}$$

dimana

$$q_k = /_ c_k$$

Power Density Spectrum adalah kuadrat dari Magnitude Spectrum, jadi tidak mengandung info θ_k.

Bila sinyal periodik adalah x(t) real, maka koefisien deret Fourier-nya memenuhi kondisi

$$c_{-k} = c_k^* \text{ sehingga } |c_k|^2 = |c_k^*|^2$$

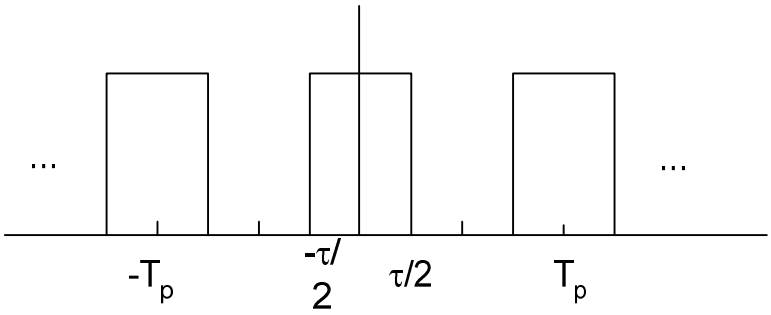
Oleh karena itu, power spectrum adalah fungsi symetric/even dari frekuensi. Kondisi ini berrati pula bahwa Magnitude spectrum adalah fungsi symetric/even dan Phase spectrum adalah fungsi ganjil. Sebagai konsekuensi dari adanya simetri tersebut, spektrum dari fungsi real cukup dispesifikasi pada frekuensi positif saja.

$$P_x = C_o^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = a_o^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

Tujuan Belajar 6

Peserta dapat menghitung spektrum dari deret pulsa rektangular waktu kontinu.

Bagaimana menentukan Deret Fourier dan Power Density Spectrum dari pulsa *rectangular train*?



Gambar 2. Pulsa *rectangular train*.

Untuk menyelesaikannya, pertama-tama kita lihat bahwa x(t) adalah periodik dengan periode dasar $T_p \Rightarrow F_o = 1/T_p$, jadi kita bisa menggunakan deret Fourier. Selain itu, x(t) adalah sinyal genap sehingga x(t) = x(-t), maka kita dapat memilih interval integrasi dari $-T_p/2$ s.d. $T_p/2$

Untuk k=0, kita dapatkan :

$$Co = \frac{1}{T_p}\int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t)dt = \frac{1}{T_p}\int_{-t/2}^{t/2} A dt = A\Big|_{-t/2}^{t/2} = \frac{At}{T_p}$$

Untuk *k* tidak sama dengan nol, kita dapatkan :

$$c_k = \frac{1}{T_p}\int_{-t/2}^{t/2} Ae^{-j2p(kF_o)t}dt = \frac{A}{T_p}\left[\frac{e^{j2pF_okt}}{-j2pkF_o}\right]_{-t/2}^{t/2}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{A}{pkF_oT_p}\left[\frac{e^{jpkF_ot} - e^{-jpkF_ot}}{j2}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2\text{j}}$$

maka :

$$c_k = \frac{A}{pkF_oT_p}\sin(pkF_ot) \qquad k = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

karena $\frac{\sin\Phi}{\Phi} = \sin c\Phi$, maka

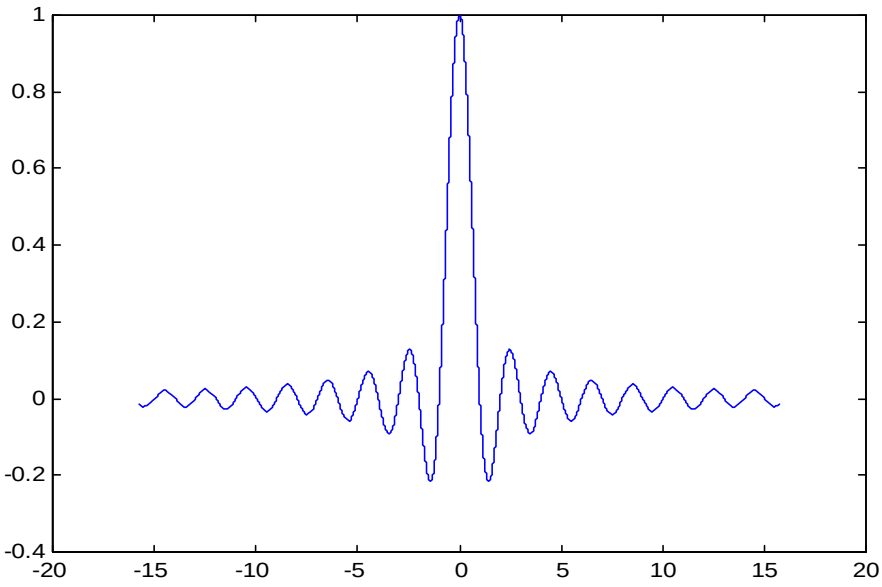
$$c_k = \frac{At}{T_p}\frac{\sin(pkF_o t)}{pkF_o t} = \frac{At}{T_p}\text{sinc}(pkF_o t)$$

$$\downarrow \varnothing_k$$

$\varnothing_k$ bernilai diskrit karena F_o dan τ fixed bergantung k .
Tapi bila $\varnothing$ kontinu

sinc $\varnothing$

- decays to zero as $|\varnothing| \rightarrow 0$
- bernilai nol pada $\varnothing = m\pi$, m = ±1, ±2, …



Gambar 3. Fungsi sinc.

Script Matlab 1

```
» clear
» x=-5*pi:0.001:5*pi;
» y=sinc(x);
» plot(x,y);
```

Jadi $\varnothing_k$ adalah sample dari $\varnothing$ pada posisi $(\pi F_o\tau)k$. Jadi c_k adalah sample dari sin$\varnothing$ pada posisi tersebut dengan amplitudo terskala sebesar $A\tau/T_p$

Ctt.

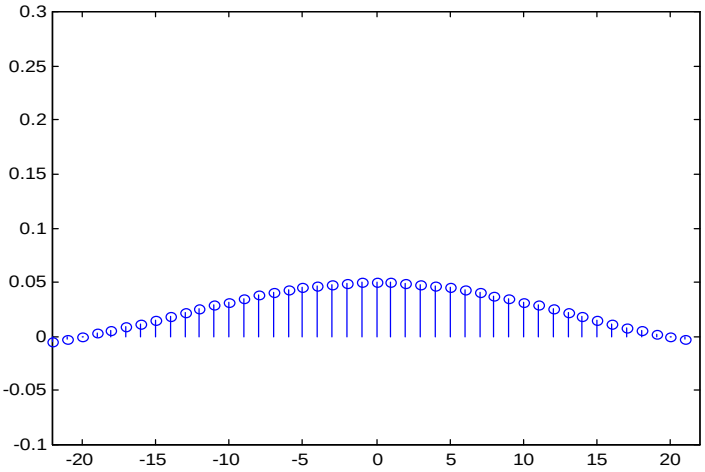
Karena x(t) even → c_k real → fase spectrum

$0 \rightarrow c_k$ positive
$\pi \rightarrow c_k$ negative

$c_k = | c_k | e^{jq_k}$ → jadi plot saja c_k tanpa perlu phase dan magnitude

Akibat dari perubahan T_p dan τ pada spektrum

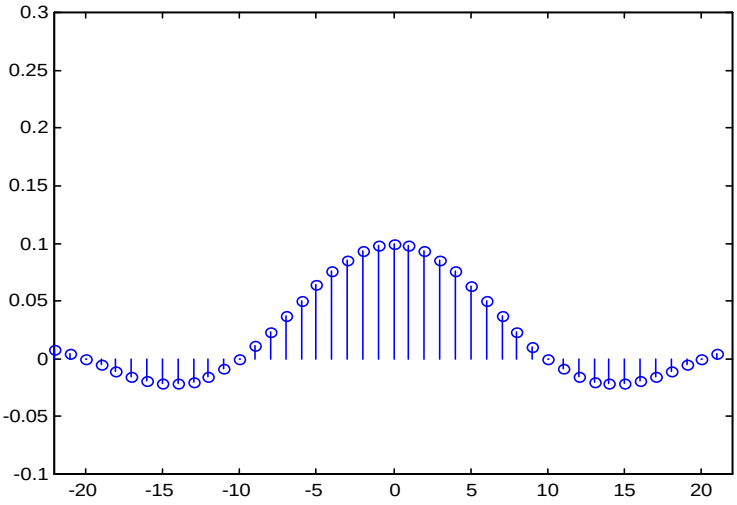
- Fix T_p dan varies τ



Gambar 4. Hasil mengubah $t = 0.05$.

Script Matlab 2

```
» a=1;
» tp=1;
» tau=0.05;
» x=-7*pi:1:7*pi;
» y=((a*tau)/tp)*sinc(x*tau);
» stem(x,y);
» axis([-7*pi 7*pi -0.1 0.3]);
```

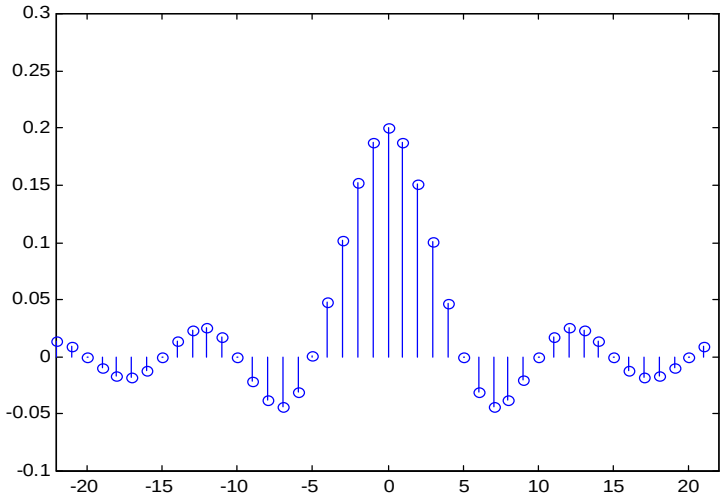


Gambar 5. Hasil mengubah $t = 0.1$.

Script Matlab 3

```
» a=1;
» tp=1;
» tau=0.1;
» x=-7*pi:1:7*pi;
» y=((a*tau)/tp)*sinc(x*tau);
» stem(x,y);
» axis([-7*pi 7*pi -0.1 0.3]);
```

- Fix τ, vary T_p



Gambar 6. Hasil mengubah $t = 0.2$.

Script Matlab 4

```
» a=1;
» tp=1;
» tau=0.2;
» x=-7*pi:1:7*pi;
» y=((a*tau)/tp)*sinc(x*tau);
» stem(x,y);
» axis([-7*pi 7*pi -0.1 0.3]);
```

Perhatikan, bila $k \neq 0$ dan $\sin(\pi k F_o \tau)$, $c_k = 0$
Padahal pada kF_o tertentu
$(\pi(kF_o)\tau = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$
$\Rightarrow \sin \pi k F_o \tau = 0 \Rightarrow$ ini terjadi pada $kF_o = m/\tau$

Contoh :
Bila $F_o = 4$ Hz dan $\tau = 0.2T_p$, $(\tau = 0.2/4 = 0.1/2)$
$c_k = 0$ pada $kF_o = m.2/0.1 = 20m$
$\rightarrow kF_o = \pm 20, \pm 40, \pm 60, \ldots$
$\rightarrow$ pada $k = \pm 5, \pm 10, \pm 15, \ldots$

PDF:

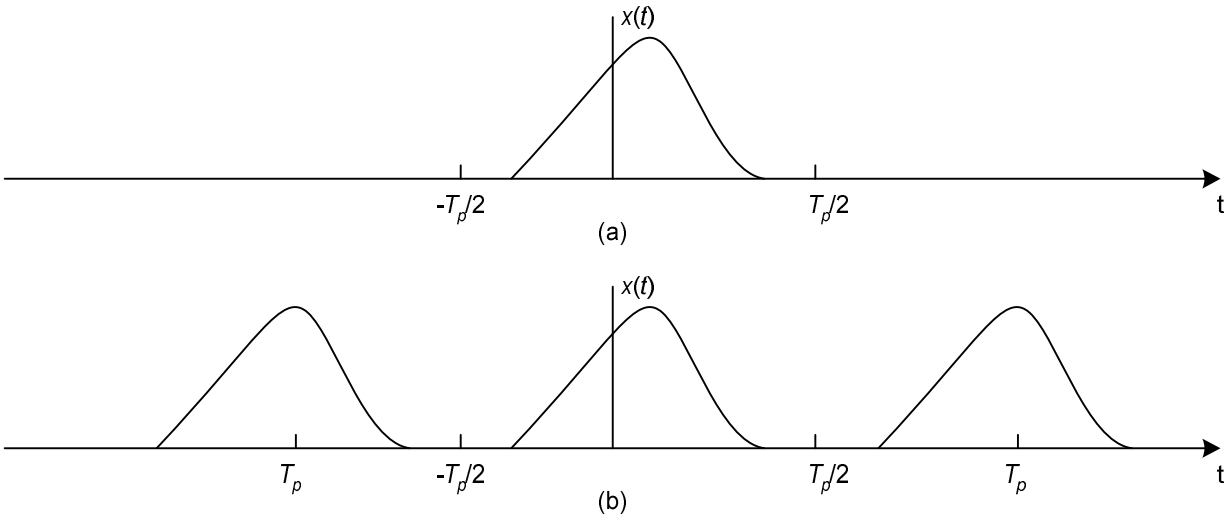
$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{At}{T_p}\right)^2, k = 0 \\ \left(\frac{At}{T_p}\right)^2 \sin c^2(pkF_o t) \end{cases}$$

1.2 Frekuensi Sinyal Kontinu Aperiodik

Tujuan Belajar 7

Peserta dapat menghitung spektrum ($X(F)$) dari sinyal kontinu yang aperiodik, serta mengerti hubungannya dengan kasus periodik.

Pada sinyal kontinyu periodik, kita melihat bahwa sinyal memiliki spektra garis dengan spasi yang sebanding dengan frekuensi fundamental. Bila periodenya dibuat menjadi tak terhingga (menjadi sinyal aperiodik), maka lebar spasi akan nol dan spectrum-nya menjadi kontinyu.



Gambar 7. Sinyal aperiodik dengan durasi terbatas dapat digunakan untuk membuat sinyal periodik.

Bila kita mengamati sinyal aperiodik dengan durasi finit pada gambar (a) diatas, maka kita dapat menyusun suatu sinyal periodik $x_p(t)$ dengan perioda T_p, seperti pada gambar (b).

Jelas, $x_p(t) = x(t)$ dengan T_p tak terhingga, yaitu $x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t)$.

Representasi Deret Fourier untuk sinyal periodik adalah :

$$x_p(t) = \sum c_k k^{j2p(kF_o)t} \qquad F_o = 1/T_p$$

dimana

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x_p(t) e^{-j2p(kF_o)t} dt$$

$$c_k = \frac{1}{T_p} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2p(kF_o)t} dt$$

Kini kita definisikan suatu fungsi, Tranformasi Fourier X(F) dari x(t), sebagai :

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2pFt} dt$$

X(F) adalah fungsi dengan variable kontinyu F. Koefisien Fourier dapat diekspresikan dengan term X(F) sebagai :

$$c_k = \frac{1}{T_p} X(kF_o) = F_o X(kF_o) = F_o X(kF_o)$$

maka :

$$X(kF_o) = X\left(\frac{k}{T_p}\right) = T_p c_k$$

Dengan demikian dapat dikatakan bahwa koefisien c_k adalah sampling dari X(F), yang diambil pada setiap kelipatan F_o dan diskala sebesar F_o (dikalikan dengan 1/ T_p). Dengan mensubstitusikan c_k diperoleh :

$$x_p(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{T_p}\right) e^{j2pkF_o t}$$

Untuk mencari x(t) dari X(F) maka didefiniskan :

$$x(t) = \lim_{T_p \to \infty} x_p(t) \qquad F_o = \Delta F = 1/T_p$$

sehingga :

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta F) e^{j2pk\Delta Ft} \Delta F \qquad k\Delta F \rightarrow F$$

Jelas bahwa pada T_p mendekati tak terhingga, $x_p(t)$ tereduksi menjadi x(t), juga ΔF menjadi differensial dF dan $k\Delta F$ menjadi variabel frekuensi kontinyu F. Maka diperoleh :

$$\lim_{T_p \to \infty} x_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2pFt} dF = x(t)$$

Dapat disimpulkan, untuk sinyal kontinyu aperiodik, berlaku :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2pFt} dF$$

dan

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2pFt} dt$$

Tujuan Belajar 8

Peserta dapat menghitung Power Density Spectrum atau Power Spectrum dari sinyal kontinu yang periodik, dalam term domain waktu maupun domain Fourier (Parseval's relation).

Bila x(t) adalah sinyal energi berhingga dengan tranformasi Fourier X(f), maka energinya dapat diekpresikan sebagai:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(t)|^2 \, dt$$

bila diekspresikan dalam X(F) persamaannya menjadi :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 \, dF$$

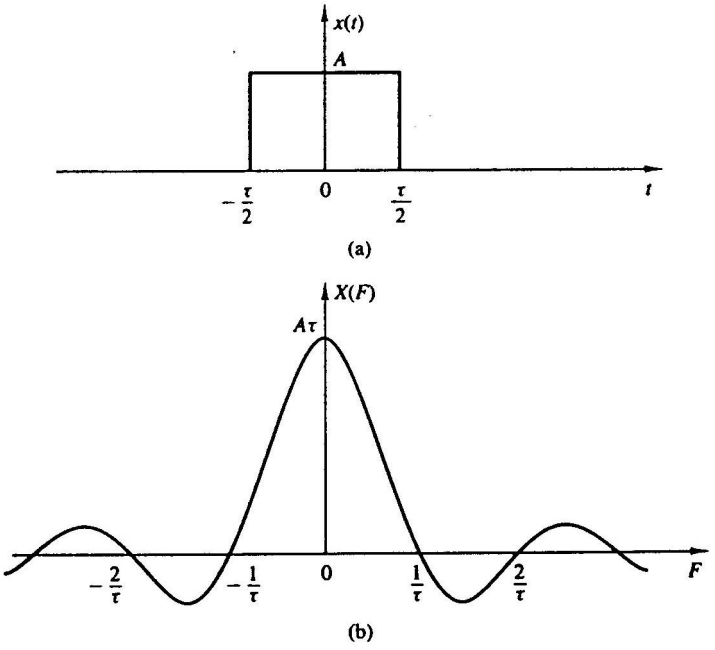
Ini adalah Parseval's Relation untuk sinyal aperiodik energi berhingga dan mengekspresikan prinsip konservasi energi dalam domain waktu dan frekuensi.

Sedangkan kuantitas $S_{xx}(F) = |X(F)|^2$ merepresentasikan distribusi energi dari sinyal sebagai fungsi frekuensi. Oleh karena itu $S_{xx}(F)$ disebut Energy Density Spectrum dari x(t). Intergral dari $S_{xx}(F)$ sepanjang semua frekuensi menghasilkan total energi dari sinyal tersebut.

Tujuan Belajar 9

Peserta dapat menghitung spektrum dari sebuah pulsa rektangular waktu kontinu.

Bagaimana menentukan Transformasi Fourier dan Energy Density Spectrum dari sinyal pulsa rektangular pada gambar (a) dibawah ini ?



Jelas bahwa sinyal tersebut aperiodik dan memenuhi Kondisi Dirichlet, oleh karena itu Transformasi Fourier-nya ada. Dengan mengaplikasikan persamaan transformasi fourier diperoleh :

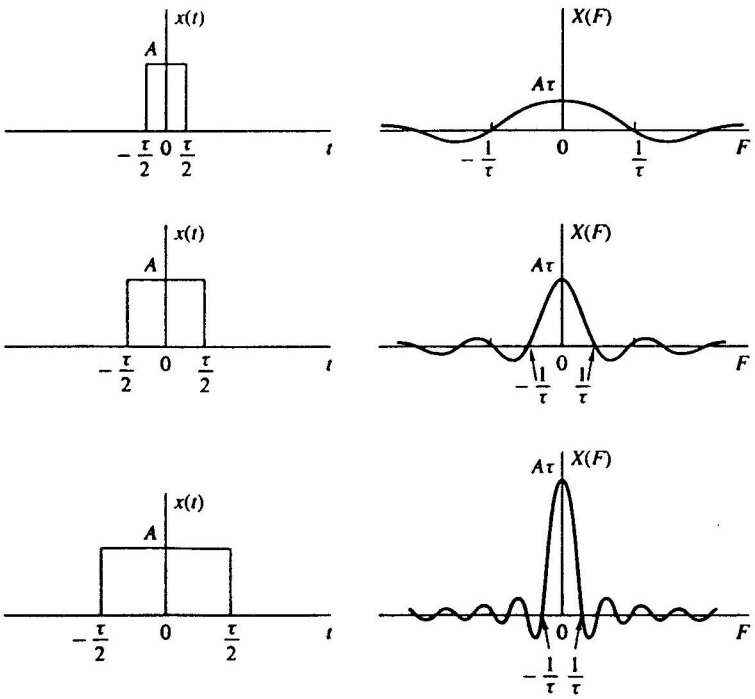
$$X(F) = \int_{-t/2}^{t/2} Ae^{-j2pFt} dt = At \frac{\sin pFt}{pFt}$$

Diagramnya dapat dilihat pada gambar atas bagian (b).

Energy Density Spectrum dari pulsa rektangular adalah :

$$S_{xx}(F) = (At)^2 \left(\frac{\sin pFt}{pFt} \right)^2$$

Berikut ini beberapa gambar pulsa rektangular dalam berbagai variasi lebar berserta Transformasi Fouriernya.



Gambar 8. Beberapa gambar pulsa rektangular dalam berbagai variasi lebar berserta Transformasi Fouriernya

1.3 Frekuensi Sinyal Diskrit Periodik

Tujuan Belajar 10

Peserta dapat menghitung spektrum (deret Fourier) untuk sinyal periodik waktu diskrit.

Kita diberi skuens periodik x(n) dengan periode N, dimana x(n)=x(n+N) untuk semua n. Representasi deret fourier untuk x(n) terdiri dari N harmonic yang berhubungan dengan fungsi eksponensial

$$s_k = e^{j2p\left(\frac{k}{N}\right)n} \quad k = 0, 1, \ldots, N\text{-}1$$

dan diekspresikan sebagai

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k$$

dimana $\{c_k\}$ adalah koefisien-koefisien dalam representasi deret.

Bagaimana mencari c_k ?

$$c_k = \left\langle x, s_k^{*} \right\rangle G$$

$$\downarrow \text{scaling factor}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n), e^{-j2p\left(\frac{k}{n}\right)n} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2p\,(k-l)\frac{n}{N}}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2p(k-l)\frac{n}{N}}$$

$$\downarrow$$

$$= \begin{cases} N & ,k-l = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0 & ,else \end{cases}$$

Sehingga diperoleh :

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2p\frac{k}{n}n}$$

Maka untuk sinya diskrit periodik :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2p\frac{k}{N}n} = S_k(n)$$

$$\downarrow \text{harmonically relate}$$

$$x(n) = x(n+N)$$

Ingat :

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, a = 1 \\ \dfrac{1-a^N}{1-a}, a \neq 1 \end{cases}$$

maka $\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2p\left(\frac{k}{n}\right)^n} = \begin{cases} N, k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, otherwise \end{cases}$

$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2pkn/N}$$

$\downarrow$ amplitudo dan fasa $x(n)$ pada

$$s_k(n) = e^{j2p\left(\frac{k}{N}\right)n} = e^{jw_k n}$$

$$C_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2p(k+N)\frac{n}{N}}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2p\frac{k}{N}n} = C_k$$

karena

$$\frac{1}{N}\sum_{n} x(n)e^{-j2pn}e^{j2pk\frac{n}{N}}$$

Berikut ini beberapa contoh pencarian spectrum untuk sinyal diskrit periodik:

a. $x(n) = \cos\sqrt{2}pn$

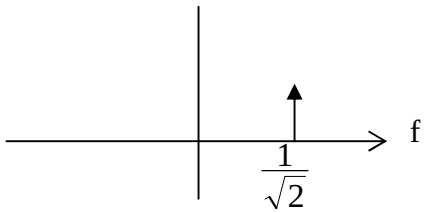
b. $x(n) = \cos\frac{p}{3}n$

c. $x(n) = x(n+4)$, x(n) = {1, 1, 0, 0}

Jawab :

a. $w_o = \sqrt{2}p \rightarrow f_o = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow$ non periodic

$\longrightarrow$ Spectrum



b. $f_o = 1/6 \rightarrow$ x(n) periodic N = 6

$$c_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x(n)e^{-j2pkn/6} \quad k = 0,1,...,5$$

ingat $x(n) = \cos\frac{2pn}{6} = \frac{1}{2}e^{j2pn/6} + \frac{1}{2}e^{-j2pn/6}$

$\rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \quad c_5 = \frac{1}{2}$

$c_o = c_2 = c_3 = c_4 = 0$

c. $C_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n)e^{-j2p\frac{k}{4}n}$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j2\frac{p}{4}k}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\rightarrow C_k = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-jp\frac{k}{2}}\right)$$

$C_o = 1/2$ $C_1 = 1/4(1-j)$ $C_2 = 0$ $C_3 = 1/4(1+j)$

Tujuan Belajar 11

Peserta dapat menghitung power density spectrum dalam term domain waktu maupun domain Fourier (Parseval's relation).

Daya rata-rata dari sinyal waktu-diskrit periodik dengan periode N didefiniskan sebagai:

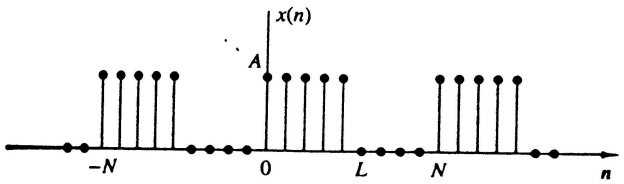
$$P_x = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |\, x(n)\,|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |\, c_k\,|^2$$

Skuens $|\, c_k\,|^2$ untuk k=0,1,…,N-1 adalah distribusi daya sebagai fungsi frekuensi dan disebut Power Density Spectrum dari sinyal periodik.

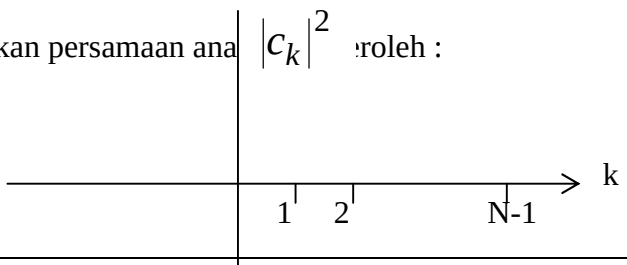
Energi dari skuens x(n) pada satu perioda

$$E_N = \sum_{n=0}^{N-1} |\, x(n)\,|^2 = N\sum_{k=0}^{N-1} |\, c_k\,|^2$$

Sebagai contoh, bagaimana mencari deret Fourier dan PDS dari sinyal waktu-diskrit kontinyu square-wave dibawah ini?



Dengan mengaplikasikan persamaan ana $|c_k|^2$ roleh :



$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2pkn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-j2p\frac{k}{N}n}, \quad k = 0,...N\text{-}1$$

$$Ck = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{-j2p\frac{k}{N}}\right)n = \begin{cases} \frac{A}{N}L, k = 0 \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{j2pkL/N}}{1-e^{-j2pk/N}} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$= e^{-j2pk(L-1)/N}\,\frac{\sin(pkL/N)}{\sin pk/N}$$

Power Density Spectrum dari sinyal tersebut adalah :

$$|C_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{AL}{N}\right)^2 \\ \left(\frac{A}{N}\right)^2\left(\frac{\sin pkL/N}{\sin pk/N}\right)^2 \end{cases}$$

1.4 Frekuensi Sinyal Diskrit Aperiodik

Tujuan Belajar 12

Peserta dapat menghitung spektrum ($X(w)$) untuk sinyal aperiodik waktu diskrit.

Tranformasi Fourier untuk sinyal waktu-diskrit energi berhingga x(n) didefinisikan sebagai :

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} = \langle x, s^* \rangle$$

$$\downarrow$$

$$X(w) = X(w + 2pk) \qquad k = \text{integer}$$

Cari x(n) $\rightarrow$ $x(n) = \sum \langle x, s^* \rangle s$

Mari kita mengevaluasi skeuens x(n) dari X(ω). Pertama-tama kita kalikan kedua sisi dengan $e^{j\omega n}$ dan mengintegralkannya dalam interval (-π,π).

$$\int_{-p}^{p} X(w)e^{jwn}dw = \int_{-p}^{p}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}\right]e^{jwn}dw$$

$$\downarrow$$

$$\lim_{N\to\infty} X_N(w)$$

$$X_N(w) = \sum_{n=-N}^{N} x(n)e^{-jwn}$$

Dengan asumsi konvergen

$$= \int_{-p}^{p}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jw(m-n)}dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\int_{-p}^{p} e^{jw(m-n)}dw$$

$$\downarrow$$

$$= \begin{cases} 2p, & m=n \\ 0, & 0 \end{cases}$$

$$= 2px(m)$$

maka didapat : $$x(n) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X(w)e^{jwn}dw$$

Maka untuk sinyal waktu-diskrit aperiodik berlaku :

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn}$$

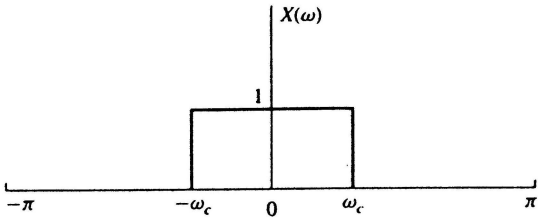
$$X(w+2pk) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(w+2pk)n} = X(w)$$

$$x(n) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X(w)e^{jwn}dw$$

Tujuan Belajar 13

Peserta dapat menghitung spektrum dari sebuah pulsa rektangular waktu diskrit.

Bagaimana menghitung spektrum dari sebuah pulsa rektangular waktu diskrit dibawah ini ?

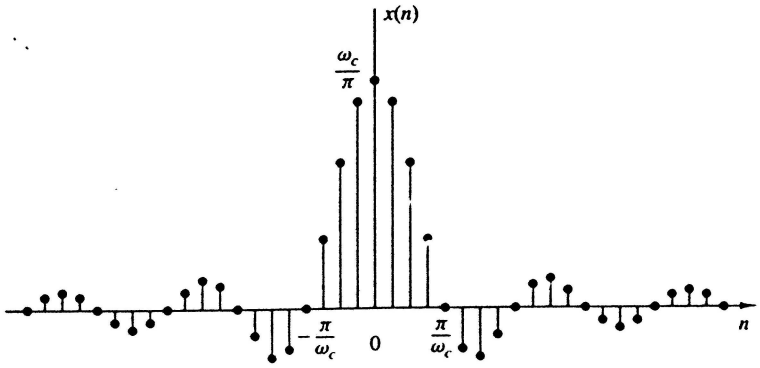


Gambar 9. Spektrum rektangular.

$$X(w) = \begin{cases} 1, |w| \le w_c \\ 0, w_c < |w| \le p \end{cases}$$

Invers transformasi dari X(ω) menghasilkan sekuens :

$$x(n) = \frac{1}{2p} \int_{-wc}^{wc} e^{jwn} dw = \frac{\sin w_c n}{pn}$$



Gambar 10. Sinyal yang memiliki spektrum rektangular.

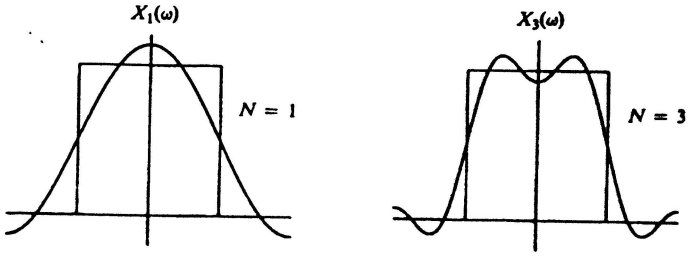
Tujuan Belajar 14

Peserta mengerti fenomena Gibbs.

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin w_c n}{pn} e^{-jwn}$$

$$\downarrow = X_N(w)$$

$X_N(\omega)$ untuk beberapa nilai N diperlihatkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 11. Fenomena Gibbs.

Dengan bertambahnya N, osilasi menjadi semakin cepat, tapi ukuran dari riak tetap sama. Bila $N \to \infty$, osilasi akan konvergen pada titik diskontinyuitas pada $\omega=\omega_c$, tapi

amplitudonya tidak menuju nol. Oleh karena itu, $X_N(\omega)$ konvergeb menuju $X(\omega)$ dalam sense mean-square.

Kelakuan osilatoris dari aproksimasi $X_N(\omega)$ menuju funsi $X(\omega)$ pada titik diskontinyuitas dari $X(\omega)$ disebut Fenomena Gibbs.

Tujuan Belajar 15

Peserta dapat menghitung *energy density spectrum* dalam term domain waktu maupun domain Fourier (*Parseval's relation*).

Relasi energi antara x(n) dan $X(\omega)$ adalah :

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} |X(w)|^2 dw$$

Ini adalah Relasi Paserval untuk sinyal waktu-diskrit aperiodik dengan energi berhingga.

Spektrum $X(\omega)$, secara umum, adalah bilangan kompleks dan dapat dituliskan sebagai :

$$X(w) = |X(w)|\, e^{jq(w)}$$

Sebagaimana dalam sinyal kontinyu, kuantitas

$$S_{xx}(w) = |X(w)|^2$$

merepresentasikan distribusi energi sebagai fungi frekuensi, dan disebut sebagai Energy Density Spectrum dari x(n).

Untuk x(n) real maka berlaku simetri, dimana

$$|X(-w)| = |X(w| \text{ dan } \angle X(-w) = -\angle X(w)$$

demikian juga:

$S_{xx}(w) = S_{xx}(-w)$.

Sebagai contoh, untuk mencari $S_{xx}(\omega)$ dari sinyal $x(n) = a^n u(n)$ $-1<|a|<1$

Maka kita mengaplikasikan transformasi fourier

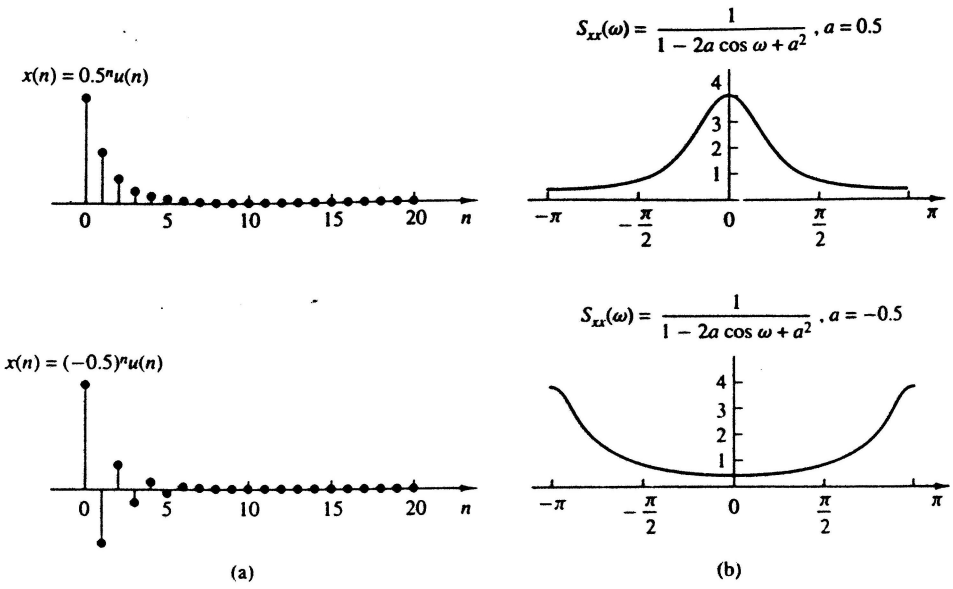
$$X(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-jwn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-jw}\right)n$$

bila $|a| < 1 \rightarrow X(w) = \frac{1}{1-ae^{-jw}}$

Maka Energy Density Spectrum-nya adalah

$$S_{xx}(w) = X(w)X(w)^* = \frac{1}{\left(1-ae^{-jw}\right)\left(1-ae^{jw}\right)}$$

$$= \frac{1}{1-2a\cos w + a^2}$$



Gambar 12. Energy density spectrum.

Tujuan Belajar 16

Peserta mengerti hubungan spektrum antara sebuah pulsa rektangular dengan spektrum dari deret pulsa rektangular waktu diskrit.

Bila diketahui suatu skuens $x(n) = \begin{cases} A, 0 \le n \le L-1 \\ 0, otherwise \end{cases}$,

bagaimana kita menentuka ni X(ω) dan $S_{xx}(\omega)$ nya?

Pertama-tama kita lihat bahwa $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| = \sum_{n=0}^{L-1} |A| = L|A| < \infty$, maka Transformasi Fourier-nya ada. Lebih lanjut, kita mencatat bahwa x(n) adalah sinyal energi berhingga dengan $E_x = |A|^2 L$.

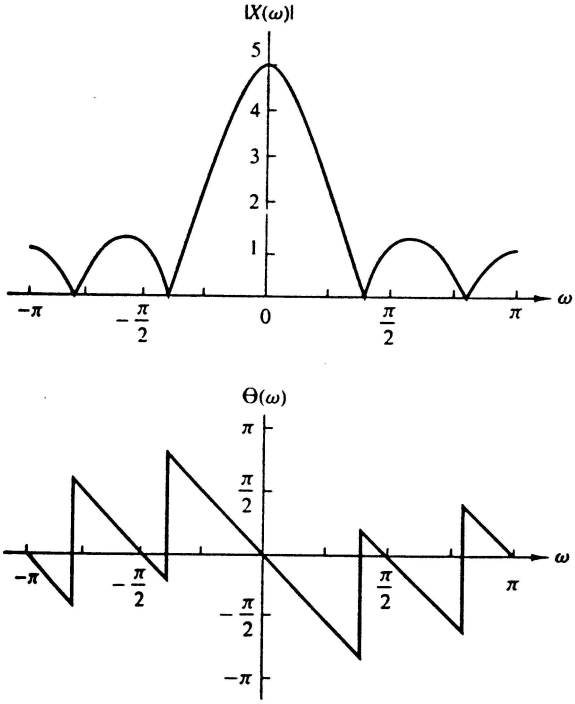
Maka Transformasi fouriernya adalah :

$$X(w) = \sum_{n=0}^{L-1} Ae^{-jwn} = A\frac{1-e^{-jwL}}{1-e^{-jw}}$$

$$= Ae^{-j(w/2)(L-1)} \frac{\sin(wL/2)}{\sin(L/2)}$$

dengan

$$\angle X(w) = \angle A - \frac{w}{2}(L-1) + \angle \frac{\sin wL/2}{\sin w/2}$$



Gambar 13. Spektrum pulsa rektangular.

Perhatikan bahwa $X\left(\frac{2p}{N}k\right) = Nc_k$ k=0,1,….,N-1

2 Ekstensi Transformasi Fourier

2.1 Hubungan Spektrum dengan Transformasi z

Tujuan Belajar 17

Peserta mengerti hubungan transformasi Fourier dengan *z*.

Transformasi Z untuk skuens x(n) didefinisikan sebagai

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad \text{ROC} : r_2 < |z| < r_1$$

Marilah kita menuliskan variable kompleks z dalam bentuk $z = re^{j\omega}$.
Maka diperoleh :

$$X(z)\Big|_{z=re^{jw}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[x(n)r^{-n}\right]e^{-jwn}$$

$\Rightarrow$ Fourier Transform dari $x(n)r^{-n}$

Perlu dicatat bahwa, Transformasi Fourier ada bila $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$

Z transform exist bila $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)r^{-n}| < \infty$

- $a^n u(n)$, $|a| > 1 \rightarrow$ ada daerah Z-transform exist, FT tidak
- $x(n) = \frac{\sin w_c n}{pn}$, ada daerah FT exist Z-transform tidak

Keduaya exist bila $|z| = 1 \in$ ROC

2.2 Konsep Cepstrum

Tujuan Belajar 18

Peserta dapat menghitung Cepstrum dari sinyal.

Untuk skuens {x(n)} yang mempunyai transformasi-Z X(z), diasumsikan bahwa {x(n)} adalah skuens stabil sehingga X(z) konvergen pada unit circle.

Cepstrum kompleks dari dari skuens {x(n)} didefinisikan sebagai skuens $\{c_x(n)\}$ yang merupakan invers tranformasi-Z dari $C_x(z)$, dimana

$$\begin{array}{ccc} \{x(n)\} & \leftrightarrow & \{c_x(n)\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \ln X(z) = C_x(z) & & \end{array} \qquad \text{ROC}: \quad r_1 < |z| < r_2, \quad 0 < r_1 < 1; r_2 > 1$$

Dalam ROC tersebut, $C_x(z)$ dapat direpresentasikan dengan Deret Laurent :

$$C_x(z) = \ln X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) z^{-n}$$

dimana

$$c_x(n) = \frac{1}{2pj} \oint_c \ln X(z) z^{n-1} dz$$

Secara Transformasi Fourier, bila $|z| = 1 \in$ ROC, maka :

$$C_x(w) = \ln X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_x(n) e^{-jwn}$$

dimana $\{c_x(n)\}$ adalah skuens yang diperoleh dari invers tranformasi fourier dari X(ω), yaitu

$$c_x(n) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} \ln X(w) e^{jwn} dw$$

Dalam ekpresi magnitude dan fasa,

$$X(w) = |X(w)|\, e^{jq(w)}$$

maka

$$\ln X(w) = \ln |X(w)| + jq(w)$$

Dengan melakukan substitusi, kita peroleh Cepstrum Kompleks dalam bentuk :

$$c_x(n) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty} [\ln |X(w)| + jq(w)] e^{jwn} dw$$

2.3 Transformasi Fourier pada Sinyal dengan Pole di Unit-Circle

Tujuan Belajar 19

Peserta dapat mengekstensi transformasi Fourier agar dapat mencakup sinyal dengan pole pada *unit circle.*

Transformasi Fourier terdefinisi bila $X(z)\Big|_{|z|=1}$, sayangnya bila ada pole pada |z| = 1 maka Transformasi Fourier tidak eksis.

Skuens semacam itu misalnya skuens unit step yang mempunyai transformasi-Z :

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

atau skuens x(n)=(cos ω_on)u(n) yang mempunyai transformasi-Z :

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos w_o}{1 - 2z^{-1}\cos w_o + z^{-2}}$$

Untuk skuens semacam itu, kita dapat mengizinkan Transformasi Fourier untuk mengandung impuls pada frekuensi tertentu yang berkorespondensi dengan dengan lokasi pole dari X(z) yang terletak pada unit circle. Maka digunakan impulse δ(ω), yaitu sinyal dengan magnitude ∞, infinite angle, zero width dan unit area. Jadi "abaikan" titik-titik pole.

Kita lihat beberapa contoh skuens berikut dengan mengevaluasi Transformasi-Z-nya pada unit circle.

*Bagaimana menentukan Transformasi Fourier untuk sinyal step ?

$$x(n) = u(n) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

$\rightarrow$ pole di z = 1

$$X(w) = X(z)\Big|_{|z|=1} = \frac{e^{jw}}{e^{jw}-1} = \frac{e^{jw}}{e^{j\frac{w}{2}}\left(e^{j\frac{w}{2}} - e^{-j\frac{w}{2}}\right)\frac{2j}{2j}}$$

kecuali z=1 atau ω=0

$$= \frac{e^{jw_2}}{2j\sin\frac{w}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{w}{2}} e^{j\left(w-\frac{p}{2}\right)} \quad w \neq 2pk$$

$$\text{di } w = 2pk, \quad X_1(w) = pd(w)$$

*Bagaimana menentukan Transformasi Fourier untuk sinyal x(n) = $(-1)^n$u(n) ?

$$X_2(z) = \frac{z}{z+1} \rightarrow z = -1 = e^{jp}$$

$\downarrow$ pole

untuk $\omega \neq 2\pi(k+1/2)$

$$X_2(w) = \frac{z}{z+1}\Big|_{|z|=1} = \frac{e^{jw}}{e^{jw}+1} = \frac{e^{j\frac{w}{2}}}{\left(e^{j\frac{w}{2}} + e^{-j\frac{w}{2}}\right)\frac{2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\cos\frac{w}{2}} e^{j\frac{w}{2}}$$

*Bagaimana menentukan Transformasi Fourier untuk sinyal x(n) = cos $\omega_o$nu(n) ?

$$X(z) = \frac{1 - z^{-1}\cos w_o}{1 - 2z^{-1}\cos w_o + z^{-2}}$$

$$X(w) = \frac{1 - e^{-jw}\cos w_o}{\left(1 - e^{-j(w-w_o)}\right)\left(1 - e^{j(w+w_o)}\right)} \qquad \omega \neq \pm\omega_o + 2\pi k$$

2.4 Teorema Sampling

Tujuan Belajar 20

Peserta dapat memahami teorema sampling dalam kontek domain frekuensi (hubungan antara $X(F)$ dengan $X(w)$), termasuk konsep aliasing, dan interpolasi.

Bagianakah hubungan antara X(F) dengan X(ω) ?

$X_a(t)$ $\qquad\qquad$ $x_a(nT) = x(n)$



- $x_a(t)$ adalah sinyal aperiodik dengan energi berhingga, maka spektrumnya dapat ditunjukkan oleh relasi Tranformasi Fourier :

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2pFt} dt$$

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2pFt} dF$$

- Sedangkan spktrum untuk sinyal diskrit x(n) dapat ditunjukkan oleh relasi Tranformasi Fourier :

$$X(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-jwn} \text{ atau } \qquad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j2p/n}$$

skuens x(n) dapat dikembalikan sebagai :

$$x(n) = \frac{1}{2p} \int_{-p}^{p} X(w) e^{jwn} dw = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2pfn} df$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{j2pfn} df = x(n) = x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(F) e^{j2pFnT} dF$$

Ingat bahwa $f = \frac{F}{F_s} \rightarrow df = \frac{1}{F_s} dF$, maka :

$$\frac{1}{F_s} \int_{-1/2}^{1/2} X\left(\frac{F}{F_s}\right) e^{j2pn\frac{F}{F_s}} dF = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2pn\left(\frac{F}{F_s}\right)} dF$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{(k-\frac{1}{2})F_s}^{(k+\frac{1}{2})F_s} X_a(f) e^{j2pn\left(\frac{F}{F_s}\right)} dF$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F_s/2}^{F_s/2} X_a(F - kF_s) e^{j2pn\frac{F}{F_s}} dF$$

$$= \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \sum_{k} X_a(F - kF_s) e^{j2pn\frac{F}{F_s}} dF$$

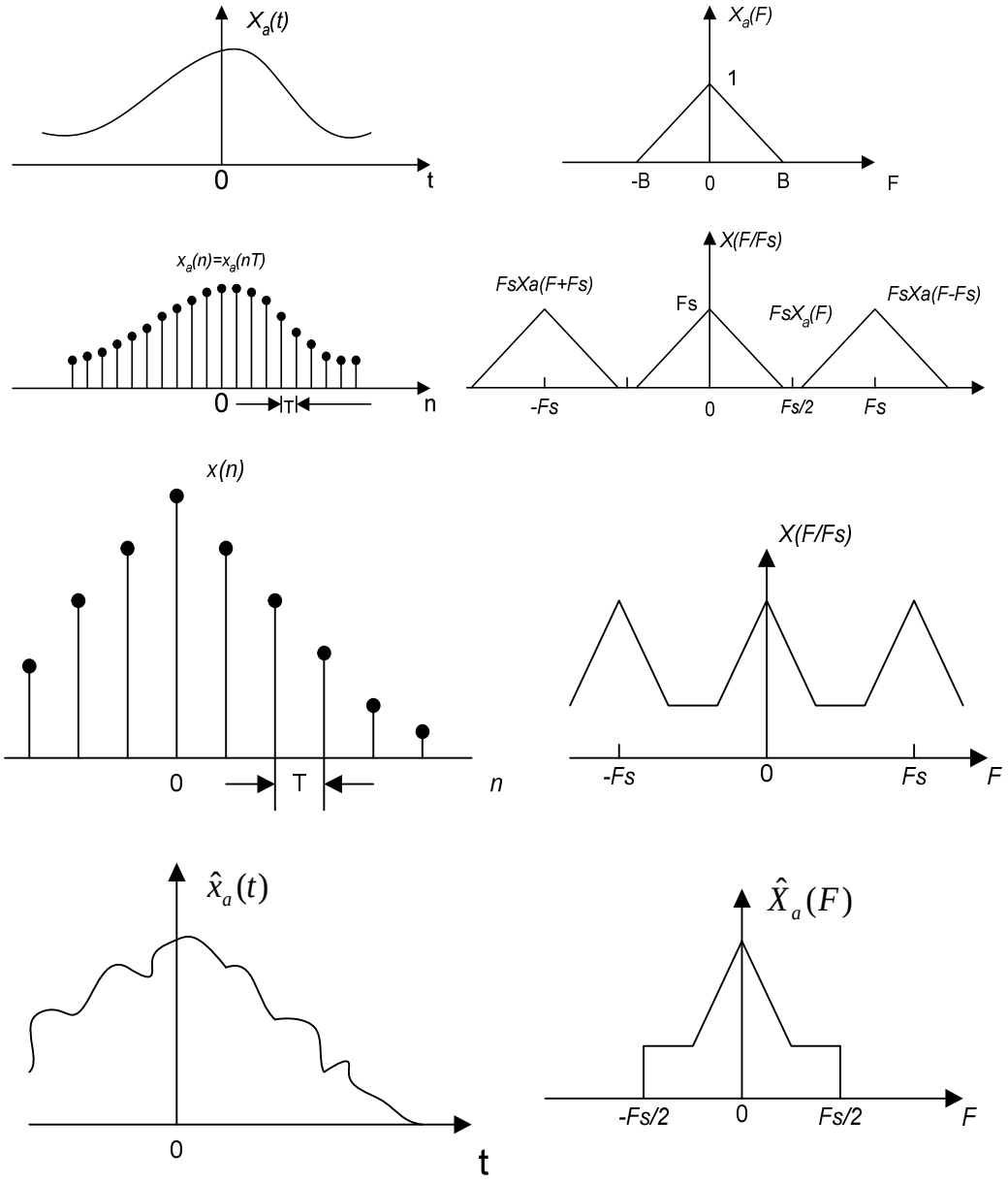
Disimpulkan bahwa :

$$X\left(\frac{F}{F_s}\right) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(F - kF_s)$$

atau

$$X(f) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a[(f - K)F_s] \quad **)$$

Berikut ini gambar sampling dari suatu sinyal analog pita terbatas dan aliasaing dari komponen spectral.



Gambar 14. Aliasing di domain frekuensi.

Bila B < $F_s/2$, maka :

$$X_a(F) = \begin{cases} \frac{1}{F_s} X\left(\frac{F}{F_s}\right), & |F| \le \frac{F_s}{2} \\ 0, & |F| > \frac{F_s}{2} \end{cases}$$

inversnya adalah

$$x_a(t) = \int_{-Fs/2}^{Fs/2} x_a(F) e^{j2pFt} dt$$

Kini asumsikan $F_s = 2B = 1/T$, maka kita mempunyai :

$$x_a(t) = \frac{1}{F_s} \int_{-Fs/2}^{Fs/2} \left[\sum x(n) e^{-j2p\frac{F}{Fs}n} \right] e^{j2pFt} dF$$

$$= \frac{1}{F_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \int_{-Fs/2}^{Fs/2} e^{j2pF\left(t-\frac{n}{Fs}\right)} dF$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \text{sinc}\left(\frac{p}{T}(t - nT) \right)$$

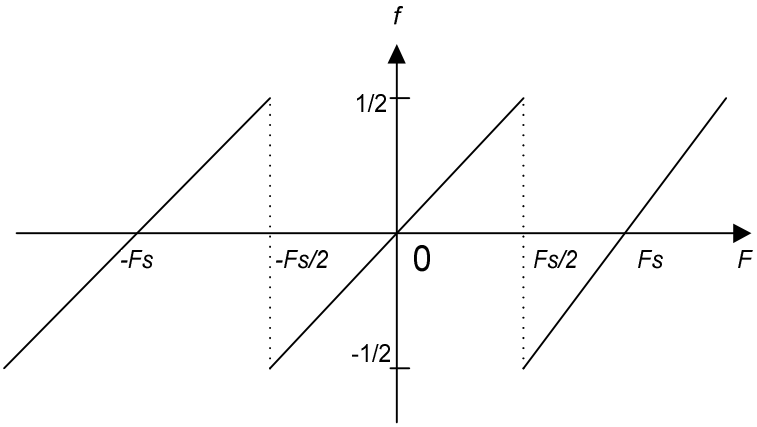
$$\downarrow \; g(t - nT)$$

dimana $g(t) = \text{sinc}\left(\frac{p}{T} t \right) = \text{sinc}(2pBt)$

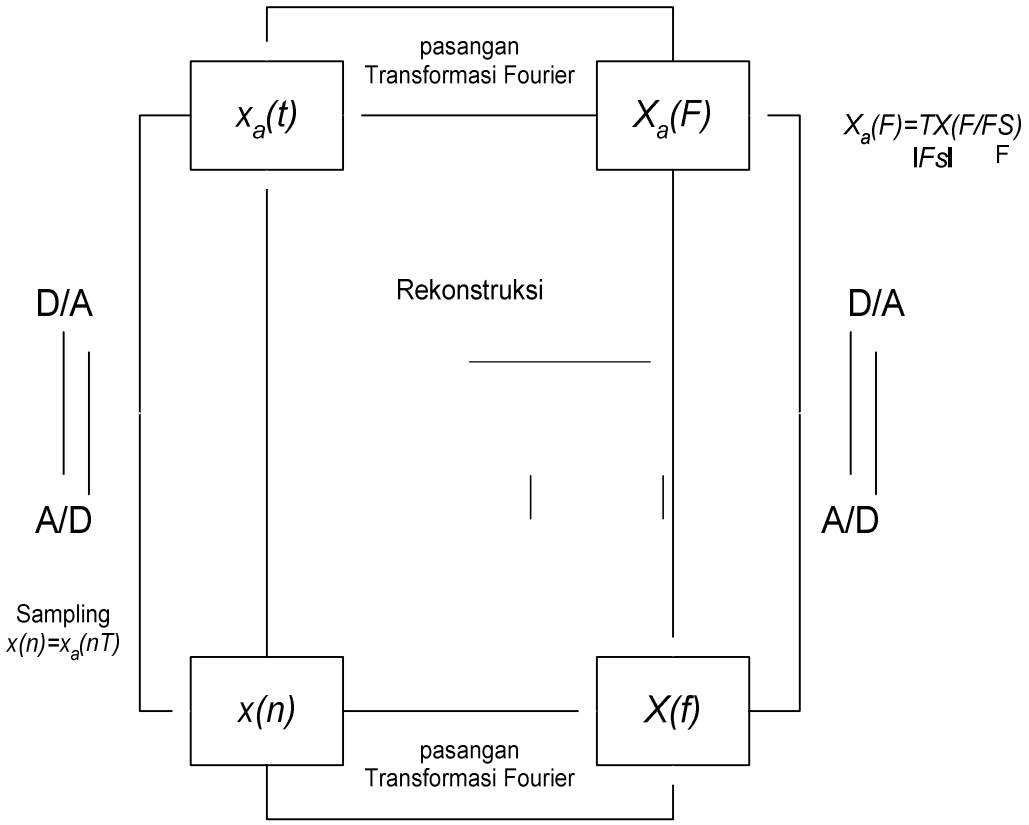
Persamaan diatas yang digunakan untuk merekonstruksi sinyal analog dari sampelnya disebut sebagai formula interpolasi ideal.

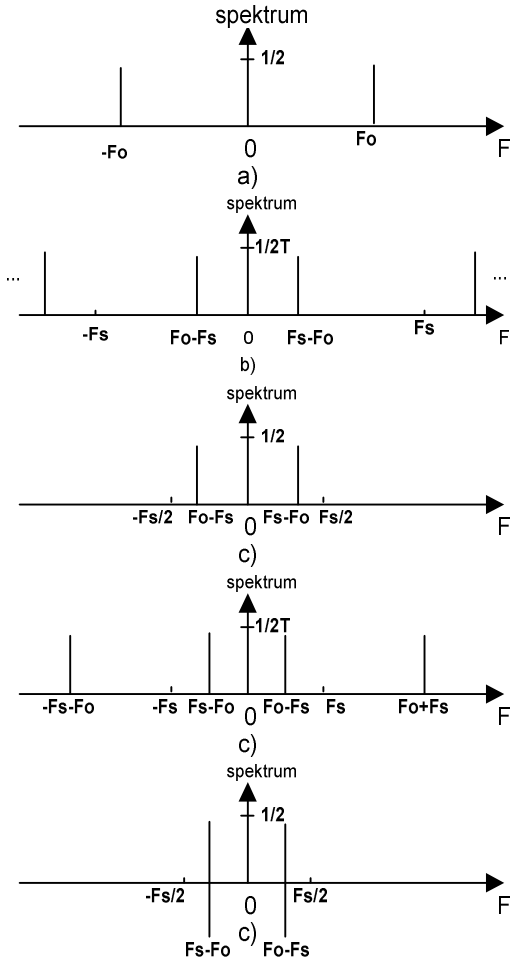
Teorema Sampling : Suatu sinyal waktu-kontinyu pita terbatas, dengan frekuensi tertinggi (bandwidth) B Hz, dapat direkonstruksi secara unik dari samplenya yang memiliki sampling rate $F_s \geq 2B$ sampel per detik.

Relasi antara variabel frekuensi F dan f dapat dilihat pada gambar dibawah ini.



Gambar 15. Gambar dibawah ini menunjukkan relasi untuk sinyal sampel pada domain waktu dan domain frekuensi.


pasangan
Transformasi Fourier
$x_a(t)$
$X_a(F)$
$X_a(F)=TX(F/FS)$
$|Fs|$ F
D/A
Rekonstruksi
D/A
A/D
A/D
Sampling
$x(n)=x_a(nT)$
$x(n)$
$X(f)$
pasangan
Transformasi Fourier



Gambar 17. Hasil rekonstruksi spektrum.

2.5 Konsep Bandwidth

Tujuan Belajar 21

Peserta mengerti berbagai konsep *bandwidth*, termasuk LP, HP, BP, BS.

Bandwidth adalah range dari frekuensi dimana energi density spectrum terkonsentrasi.

Bandwidth dikatakan berkisar pada $F_1 \leq F \leq F_2$, bila 95% power of energy berada dalam range antara F_2 dan F_1.

Dalam term sinyal bandpass, maka

*Sinyal narrow-band adalah sinyal yang bandwidth-nya $F2 - F1 \approx \frac{1}{10}\left(\frac{F_2 + F_1}{2}\right)$

*Sinyal wide-band adalah sinyal yang bandwidth-nya yang lebih besar dari sinyal narrow-band.

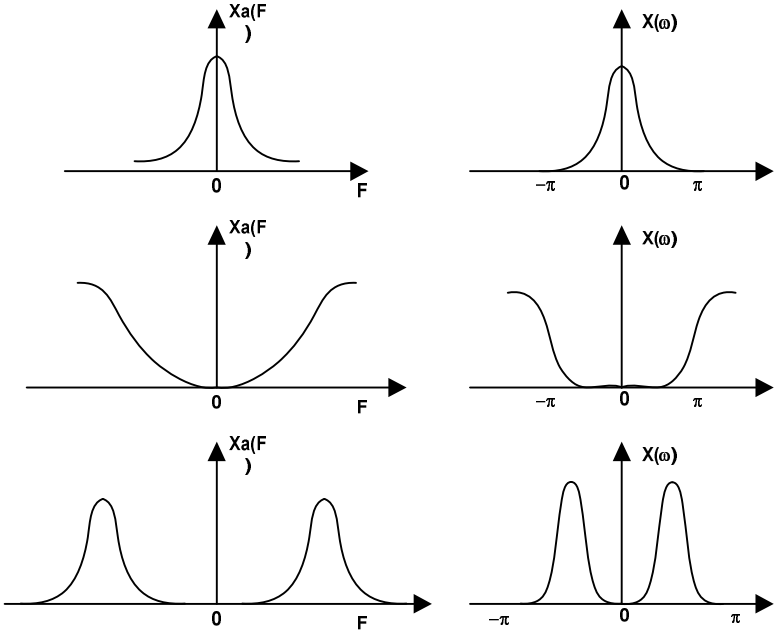
*Sinyal bandlimited adalah sinyal yang spektrumnya nol diluar range frekuensi $|f| \geq B$. Suatu sinyal waktu-diskrit energi berhingga x(n) dikatakan bandlimited bila :

$|X(\omega)| = 0$ untuk $\omega_o < |\omega| < \pi$.

*Sinyal timelimited adalah bila

$x(t) = 0, |t| > \tau \ \omega_o < |\omega| < \pi$

Perlu dicatat bahwa secara absolut tidak ada sinyal yang time limited sekaligus dengan band limited.



Gambar 18. Filter lowpass, highpass, dan bandpass.

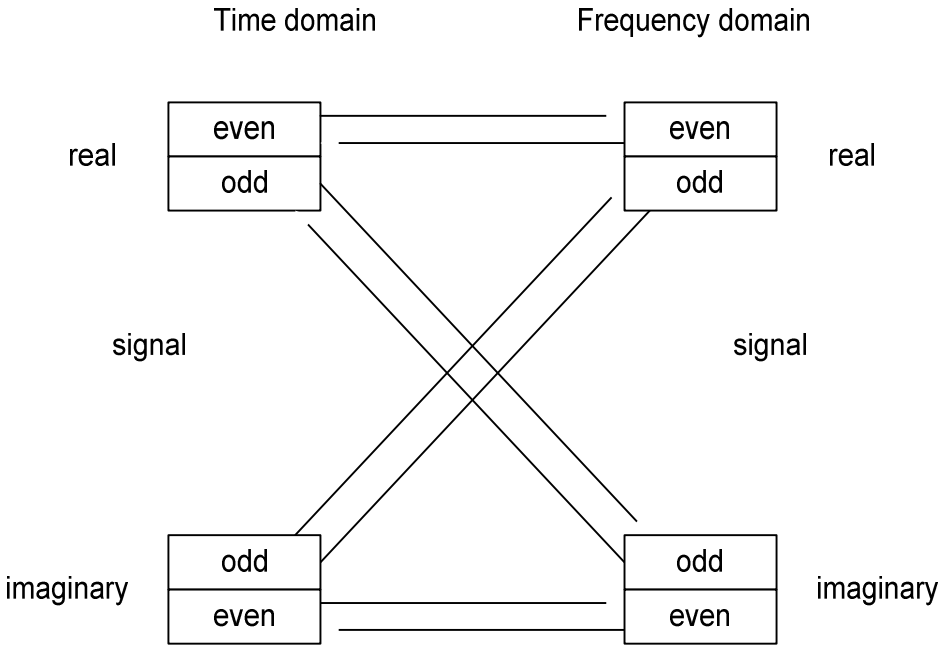
3 Sifat-Sifat Transformasi Fourier

Tujuan Belajar 22

Peserta mengerti dan dapat memanfaatkan sifat-sifat transformasi Fourier, seperti simetri dari sinyal *real*, sifat linier, *time-shifting*, *convolution*, *correlation*, *Frequency shifting*, *Modulation*, *Parseval's*, *Multiplication*, dan *differentiation*.

Berikut ini adalah sifat-sifat Transformasi Fourier :

- Simetri


Time domain
Frequency domain
real
even
odd
even
odd
real
signal
signal
imaginary
odd
even
odd
even
imaginary

$$X(w) = \frac{1}{1-ae^{-jw}} + \frac{ae^{jw}}{1-e^{jw}} = \frac{1-a^2}{1-2a\cos w + a^2}$$

- Time Shifting dan Time reversal

$$\begin{array}{cc} x(n\text{-}k) & x(\text{-}n) \\ \downarrow & \downarrow \\ e^{-jwk}X(w) & X(w) \end{array}$$

- Konvolusi

$$x_1(n) * x_2(n) \leftrightarrow X_1(w)X_2(w)$$

Sebagai contoh, hitunglah konvolusi dari $x_1(n) * x_2(n)$
Dimana

$$x_1(n) = x_2(n) = \underset{\uparrow}{\{1,1,1\}}$$

Maka :

$$X_1(w) = X_2(w) = 1 + 2\cos w$$

$$\Rightarrow X(\omega) = (1 + \cos\omega)^2 = 1 + 4\cos\omega + \cos 2\omega$$

$$= 3 + 2(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

$$x(n) = \underset{\uparrow}{\{1,2,3,4,5\}}$$

- Korelasi

$$r_{x1x2}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(k-n)$$

$$\Leftrightarrow S_{x_1x_2}(w) = X_1(w)X_2(w)$$

$$r_{xx}(l) \leftrightarrow S_{xx}(w)$$

Auto-Korelasi

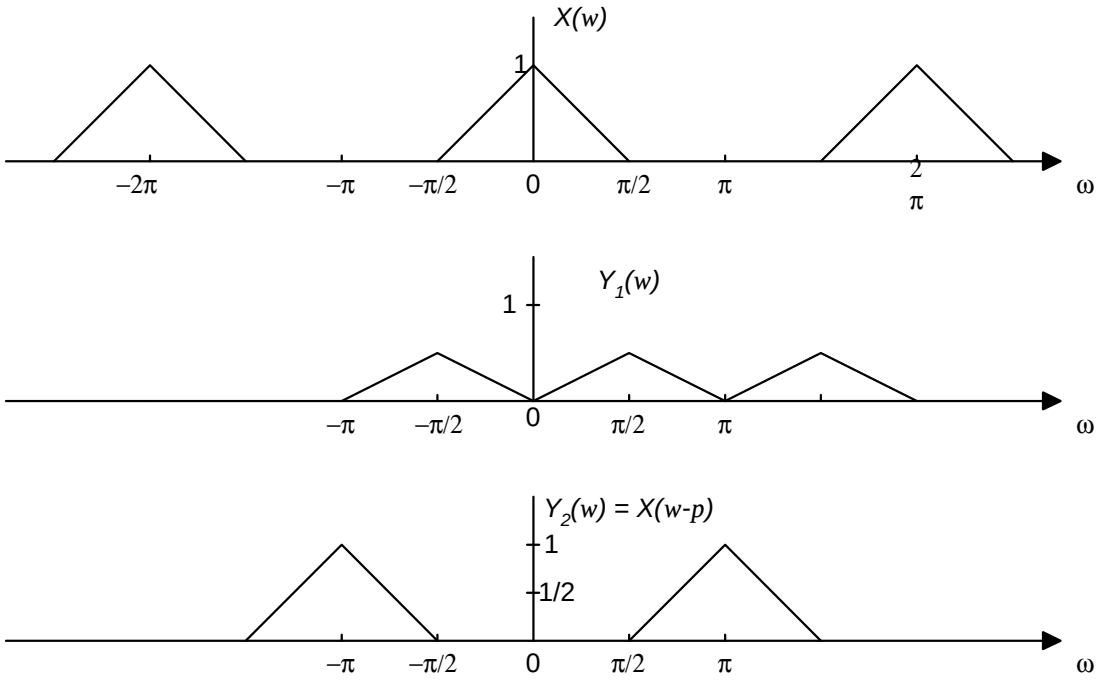
- Frequency Shifting

$$e^{jw_on}x(n) \leftrightarrow X(w - w_o)$$

- Modulation

$$x(n)\cos w_o n \leftrightarrow \frac{1}{2}\left[X(w + w_o) + X(w - w_o)\right]$$

Repersentasi grafis dari terorema modulasi dapat dilihat pada gambar berikut.



Gambar 20. Hasil modulasi.

- Parseval

$$\sum_{-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2^{*}(n) \leftrightarrow \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X_1(w)X_2^{*}(w)dw$$

- Multiplication

$$x_1(n)x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X_1(l)X_2(w-l)dl$$

- Diferensiasi

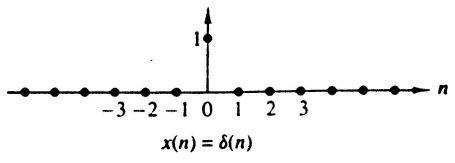
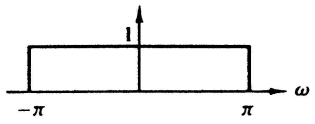
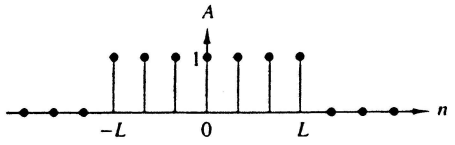
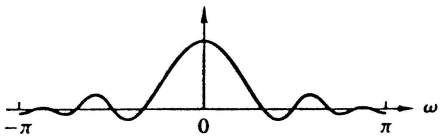
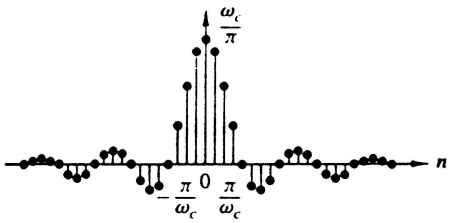
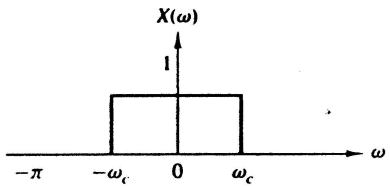
$$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(w)}{dw}$$

Tujuan Belajar 23

Peserta menguasai pasangan transformasi yang berguna seperti impuls, rektangular, dan fungsi sinc.

Tabel berikut memberikan pasangan Transformasi Fourier untuk sinyal waktu-diskrit aperiodik yang sering digunakan.

Tabel 1. Pasangan transformasi Fourier yang sering digunakan.

Signal $x(n)$	Spectrum $X(\omega)$
 $x(n) = \delta(n)$	 $X(\omega) = 1$
 $x(n) = \begin{cases} A, & \lvert n\rvert \le L \\ 0, & \lvert n\rvert \le L \end{cases}$	 $X(\omega) = A\,\dfrac{\sin\left(L+\frac{1}{2}\right)\omega}{\sin\frac{\omega}{2}}$
 $x(n) = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}, & n \ne 0 \end{cases}$	 $X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \omega_c \le \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \ge 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$	$X(\omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

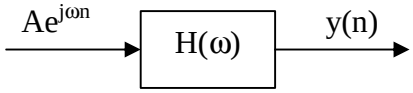
4 Transformasi Fourier untuk Sistem

4.1 Sistem LTI di Domain Frekuensi

Tujuan Belajar 24

Peserta menguasai konsep *eigenvalue* dan *eigenfunction* dalam konteks respons frekuensi dari sistem LTI, terutama untuk menghitung respons sistem.

Eigenfunction dari suatu sstem sistem adalah sinyal input yang menghasilkan output yang berbeda dari input karena perkalian dengan faktor konstan. Faktor pengali tersebut disebut sebagi eigenvalue dari sistem.



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) A e^{j(n-k)}$$

$$= A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk}\right] e^{jwn}$$

$$\downarrow H(w)$$

$$y(n) = AH(\omega)e^{j\omega n}$$

Maka

$H(\omega)$ adalah eigen value

$e^{j\omega n}$ adalah eigen vector/ eigen function

Sebagai contoh, tentukan output dari sistem dengan respon impuls $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ dan input $x(n) = Ae^{j\frac{p}{2}n}$.

Kita cari $H(\frac{p}{2})$ terlebih dahulu untuk kemudian mencari y(n), hasilnya :

$$y(n) = \frac{2}{\sqrt{5}} A e^{j\left(\frac{p}{2}n - 26.6^o\right)}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

tergeser amplitudo tergeser fasa

Tujuan Belajar 25

Peserta dapat menghitung respons frekuensi (*magnitude* dan *phase*) dari sistem yuang diketahui $h(n)$ nya, dan dapat memanfaatkannya untuk menghitung output dari sinyal complex exponential dan sinusoidal dengan durasi tak terhingga.

Secara umum kita dapat menulis :

$$H(w) = |H(w)| e^{jq(w)}$$

$$\downarrow = \angle H(\omega)$$

$$H(w) = \sum_k h(k) cowk - j\sum_k h(k)\sin wk$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$H_R(w) + jH_I(w)$$

$$= \sqrt{H_R{}^2(w) + H_I{}^2(w)}\, e^{j\tan^{-1}\left[\frac{H_I(w)}{H_R(w)}\right]}$$

dengan catatan $H_R(\omega) = H_R(-\omega)$
$H_I(\omega) = -H_I(-\omega)$

Sebagai contoh, tentukan magnitude dan fasa dari h(ω) sistem three-point moving averages.

$y(n) = 1/3\ (x(n+1) + x(n) + x(n-1))$

Karena

$h(n) = \{1/3, 1/3, 1/3\}$

maka

$$H(w) = \tfrac{1}{3}\left(e^{jw} + 1 + e^{-jw}\right) = \tfrac{1}{3}(1 + 2\cos w)$$
$$\uparrow H_R(w)$$

$$|H(w)| = \left|\tfrac{1}{3}(1 + 2\cos w)\right| \qquad H_I(w) = 0$$
$$\tan q(w) = \frac{H_I(w)}{H_R(w)} = \frac{0}{H_R(w)}$$

Jadi untuk input $Ae^{j\omega n}$

$y(n) = A|H(\omega)|e^{j\theta(\omega)}e^{j\omega n} = A|H(\omega)|e^{j(\omega n+\theta\omega)}$

- input $Ae^{-j\omega n}$

$$y(n) = A|H(-w)|e^{jq(-w)}e^{-jwn}$$
$$= A|H(w)|e^{-j(wn+q(w)}$$

- input $A\cos\omega n$

$$y(n) = A|H(w)|\cos(wn + q(w))$$

- input $A\sin\omega n$

$$y(n) = A|H(w)|\sin(wn + q(w))$$

$|H(\omega)|$ = magnitude response
$\theta(\omega)$ = phase response

Sebagai contoh, tentukan respon dari sistem dengan input sinyal

$x(n) = 10 - 5\sin\pi n/2 + 20\cos\omega\pi n$

Frekuensi responsnya

$$H(w) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jw}}$$

- untuk $10 \rightarrow \omega = 0 \rightarrow H(0) = 2$
- untuk $\pi/2 \rightarrow \omega = \pi/2 \rightarrow H\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\frac{p}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j26.6^o}$
- untuk $\pi \rightarrow \omega = \pi \rightarrow H(p) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-jp}} = \frac{2}{3}$

Maka :

$$y(n) = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\sin\left(\tfrac{p}{2}n - 26.6^o\right) + \frac{40}{3}\cos pn \qquad -\infty < n < \infty$$

$$x(n) = \sum_{i=1}^{L} A_1 \cos(w_i n + f_i) \Rightarrow y(n) = \sum_{i=1}^{L} A_1 |H(w_i)| \cos[w_i n + f_i + q(w_i)]$$

4.2 Respons Steady State dan Transien

Tujuan Belajar 26

Peserta dapat menghitung respons *steady state* dan *transien* pada sinyal input sinusoidal, khususnya pada kasus sistem $y(n) = ay(n-1) + x(n)$.

Bagaimanakah respons steady state dan respons transient pada sinyal sinusoidal?

- bila x(n) diterapkan pada n = -∞ maka tidak ada transien
- bila x(n) diterapkan pada n = 0 maka akan muncul transient

Sebagai contoh,

y(n) = ay(n-1) + x(n) dan x(n) diterapkan pada n = 0

maka

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + \sum_{k=0}^{n} a^k x(n-k) \qquad n \geq 0$$

$$\downarrow \text{initial condition}$$

asumsikan $x(n) = Ae^{j\omega n}$ $n \geq 0$, diaplikasikan pada n=0, diperoleh :

$$y(n) = a^{n+1}y(-1) + A\sum_{k=0}^{n} a^k e^{jw(n-k)}$$

$$= a^{n+1}y(-1) - \frac{Aa^{n+1}e^{-jw(n+1)}}{1-ae^{-jw}}e^{jwn} + \frac{A}{1-ae^{-jw}}e^{jwn} \qquad n \geq 0$$

$$\uparrow \text{steady state}$$

$$\uparrow$$

karena $|a| < 1 \rightarrow$ decay to $f \rightarrow$ transient

Bila menyangkut input sinudoidal, apalagi bila |a| kecil, → transient sering diabaikan → SS penting

Bagaimanakah respons steady state terhadap sinyal periodik ?

$$x(n+N) = x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2pkn/N} \qquad k = 0, ..., N\text{-}1$$

let $x_k(n) = c_k e^{j2pkn/N}$ ← komponen

cari response

$$\rightarrow x(n) = \sum x_k(n)$$

$$y_k(n) = H(? (?_k(n) = c_k H\left(\tfrac{2pk}{N}\right) e^{j2p\frac{k}{N}n}$$

$$\downarrow H(w)\Big|_{w=\frac{2pk}{N}}$$

$$y(n) = \sum_k y_k(n) = \sum_k c_k H\left(\frac{2pk}{N}\right) e^{j2p\frac{k}{N}n}$$

$$\downarrow d_k \quad \rightarrow \text{Fourier series dari y(n)}$$

LTI mengubah amplitudo dan menggeser fasa, tetapi tidak mempengaruhi perioda N

Tujuan Belajar 27

Peserta dapat menghitung respons sistem pada sinyal input yang aperiodik.

Untuk menghitung respons terhadap sinyal aperiodik, pertama-tama marilah kita lihat teorema konvolusi :

$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega)$

Yang berarti pula :

$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$

$\angle Y(\omega) = \angle X(\omega) + \angle H(\omega)$

$\rightarrow$ H(ω) filter

$\rightarrow X(\omega_i) = 0 \rightarrow y(\omega_i) = 0$ sistem tidak menambah frekuensi.

Skuens output dapat ditentukan dari invers transformasi Fourier :

$$y(n) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} Y(w) e^{jw} dw$$

↑

Tapi metode ini jarang digunakan karena kalah populer dibanding Z-transform.

Dari pengkuadratan magnitude, kita memperoleh :

$|Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2$

$S_{yy}(\omega) = (H(\omega))^2\, S_{xx}(\omega)$

4.3 Hubungan Dengan Fungsi Sistem

Tujuan Belajar 28

Peserta dapat menghitung $H(w)$ dari $H(z)$ atau pole-zeronya.

Kita tahu bahwa bila fungsi sistem H(z) konvergen pada unit circle, maka kita mendapatkan respons frekuensi dari sistem dengan mengevaluasinya pada unit circle. Maka kita dapatkan

$$H(w) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}} = b_o \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - z_k e^{-jw}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1 - p_k e^{-jw}\right)}$$

dengan

$$H^*(w) = \frac{b_o \prod_{k=1}^{M}\left(1 - z^* e^{jw}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - p_k{}^* e^{jw}\right)} = H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)$$

Jadi $\left|H(w)\right|^2 = H(w)H^*(w) = H(w)H(-w) = H(z)H(z^{-1})\Big|_{z=e^{jw}}$

Untuk menghitung H(ω) kita lakukan

$$H(w) = H(z)\Big|_{z=e^{jw}} = b_o \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(1 - z_k e^{-jw_k}\right)}{\prod_{i=1}^{N}\left(1 - p_k e^{-jw_k}\right)} = b_o e^{jw(N-M)} \frac{\prod_{k=1}^{M}\left(e^{jw} - z_k\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(e^{jw} - p_k\right)}$$

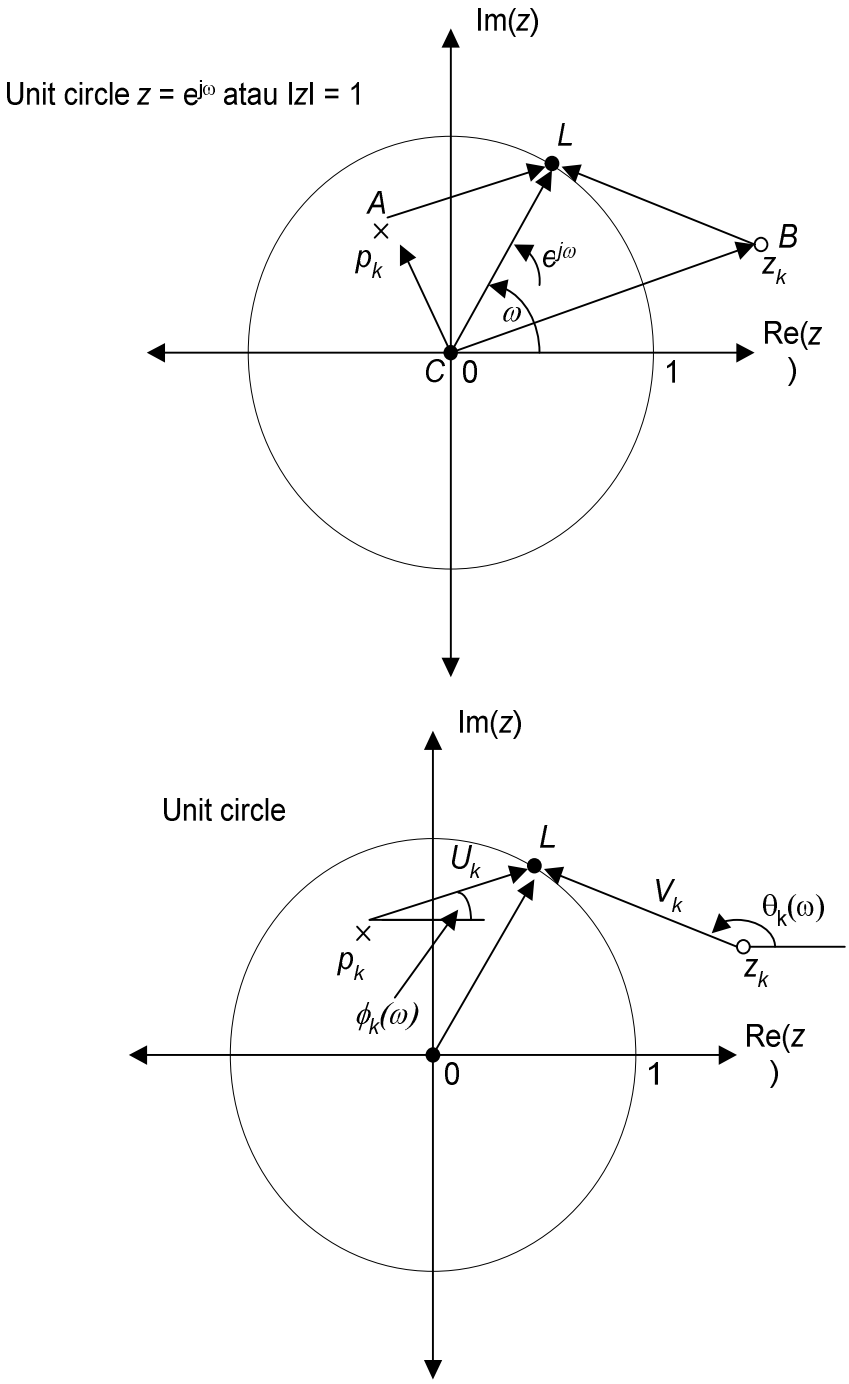
$$\rightarrow e^{jw} - z_k = v_k(w) e^{jq_k(w)}$$

$$\rightarrow e^{jw} - p_k = u_k(w) e^{jf(w)}$$

maka $\left|H(w)\right| = \left|b_o\right| \frac{V_1(w)...V_M(w)}{U_1(w)...U_N(w)}$

$$\angle H(w) = \angle b_o + w(N-M) + \sum_{i=1}^{M} q_i(w) - \sum_{i=1}^{N} q_i(w)$$

Gambar-gambar berikut merupakan intepretasi geometris dari kontribusi pole dan zero untuk Transformasi Fourier.



Gambar 21. Ilustrasi geometris dari pengaruh pole dan zero terhadap spektrum.

Sebagai contoh, evaluasilah respons frekuensi dari sistem yang dideskripsikan oleh fungsi sistem :

$$H(z) = \frac{1}{1-.8z^{-1}} \pm \frac{z}{z-0.8} \Rightarrow H(w) = \frac{e^{jw}}{e^{jw}-0.8}$$

Jelas, H(z) memiliki zero pada z=0 dan pole pada p=0.8, maka :

$$|H(w)| = \frac{|e^{jw}|}{|e^{jw}-0.8|} = \frac{1}{\sqrt{1.64-1.6\cos w}}$$

dan

$$q(w) = w - \tan^{-1}\frac{\sin w}{\cos w - 0.8}$$

dalam decible :

$$|H(w)|_{dB} = 20\log_{10}|b| + 20\sum_{k=1}^{M}\log_{10} V_k(w) - 20\sum_{k=1}^{N}\log 10U_k(w)$$

5 Sistem LTI Sebagai Filter

5.1 Konsep Filter

Tujuan Belajar 29

Peserta memahami bahwa sistem LTI dapat dipandang sebagai filter, terutama dalam hal *magnitude response* nya.

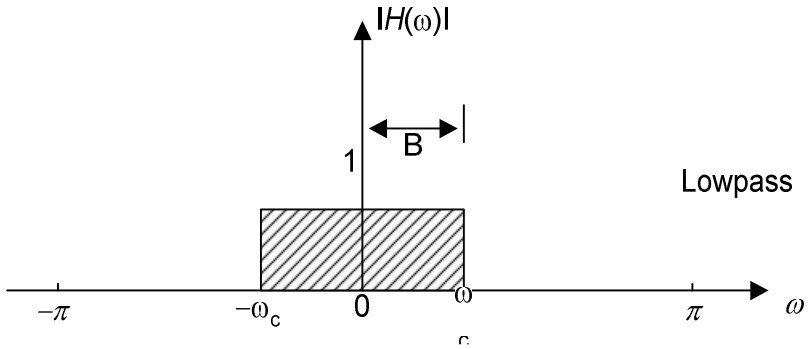
Filter adalah divais yang menentukan apa yang dilewatkan dari input yang diberikan. Kelakuan fikter ditentukan oleh karakteristik respons frekuensi H(ω), yang bergantung pada parameter sistem. H(ω) berlaku sebagai weighting function atau spectral shaping function untuk komponen-komponen frekuensi yang berbeda dalam sinyal input. Dalah hal ini, setiap sistem LTI dapat dipandang sebagai filter frequency-shaping.

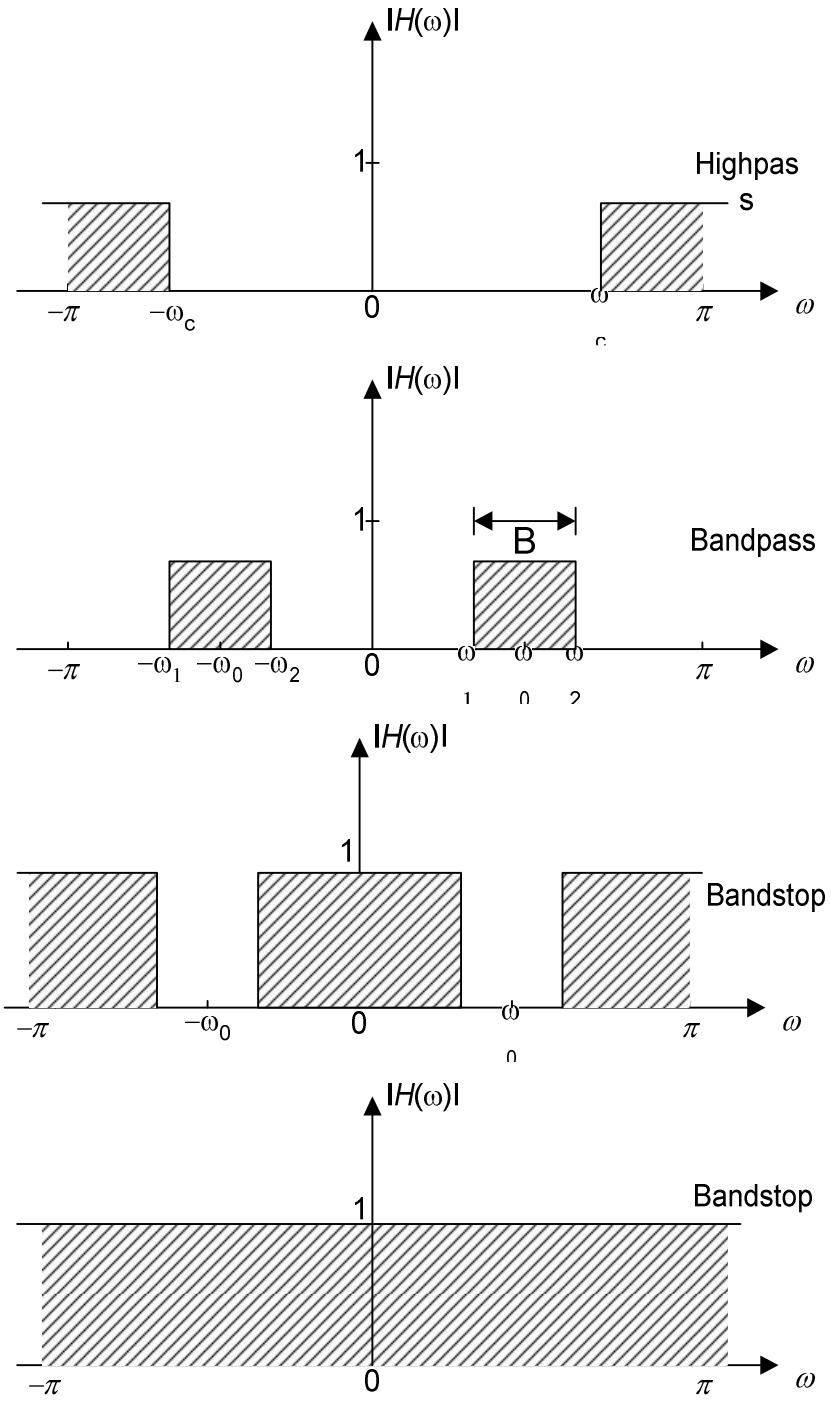
$Y(\omega) = H(\omega)\, X(\omega) \quad \rightarrow$ filter

↑

pembobot frekuensi/ Fungsi pengubah spektrum

Dengan mengubah-ubah a_i dan b_i, H(ω) dapat dibentuk dengan berbagai bentuk respons. Berikut ini gambar Magnitude Response untuk beberapa filter frekuensi-selektif ideal.





Gambar 22. Spektrum dari beberapa jenis filter.

Tujuan Belajar 30

Peserta mengerti konsep *linear phase response*, dan motivasinya.

Karakteristik lain dari filter ideal adalah respon fasa linear. Untuk mendemonstrasikannya, marilah kita lihat :

$$H(w) = \begin{cases} ce^{-jwn_o}, w_1 < w < w_2 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

C, n_o constants. Let X(ω) ada di [ω_1,ω_2]

Output filter mempunyai spektrum

$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = CX(\omega)e^{-j\omega no}$ $\omega_1 < \omega < \omega_2$

Dari sifat Transformasi Fourier, diperoleh

$y(n) = Cx(n-n_o)$

Jadi output dari sistem ini adalah sinyal aslinya yang tergeser fasa dan terskala. Kedua perubahan ini biasanya dapat ditoleransi apabila terjadi pada sinyal seutuhnya.

Dengan demikian filter-filter ideal mempunyai karakteristik linear di daerah passband,

$\theta(\omega) = -\omega n_o$

delay : $t_g(w) = -\frac{dq(w)}{dw}$ $\rightarrow$ envelope delay/ group delay

$\rightarrow \tau_g(\omega)$ adalah time delay dari komponen ω akibat filter.

Pada kasus fasa linear,

$\tau_g(\omega) = n_o \rightarrow$ semua komponen mendapat delay yang sama, sehingga integritas sinyal terjaga.

Tujuan Belajar 31

Peserta mengetahui definisi filter ideal, dan mengapa tidak dapat di buat secara praktis.

Dari bagian sebelumnya, dapat kita simpulkan bahwa filter passband ideal memiliki karakteristik

- magnitude yang konstan
- fasa yang linear

Sayang sekali, hal ini hanya ada di dunia matematis

Sebagai contoh, filter lowpass ideal memiliki respons impuls

$h_{ep}(n) = \frac{\sin w_c pn}{pn}$ $-\infty < n < \infty$

$\rightarrow$ non causal, not absolutely summable $\rightarrow$ unstable

$\rightarrow$ Dalam praktek, filter ini dijadikan pedoman ideal untuk proses aproksimasi

Kita akan melihat bagaimana filter-filter dapat dibuat berdasarkan penempatan pole dan zero. Prinsip utama : letakkan ke dekat unit circle. Frekuensi sekitar zero akan diredam, frekuensi sekitar pole akan diperkuat.

Selanjutnya :
- pole harus di dalam UC, zero bisa di mana saja
- pole/zero komplex harus berbentuk conjugate pairs agar koefisien real

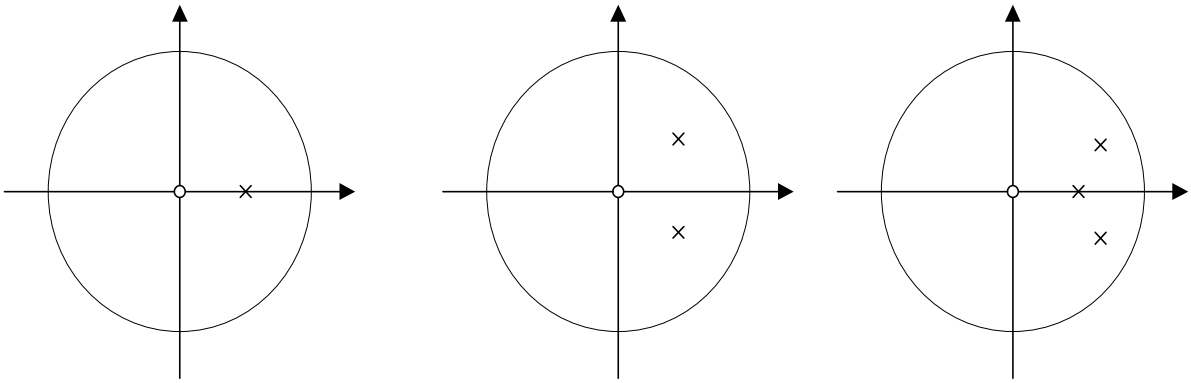
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = b_o \frac{\prod_{k=1}^{M} \left(1 - z_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N} \left(1 - p_k z^{-1}\right)}$$

b_o dipilih agar $|H(\omega_o)| = 1$di pass, $N \geq M$

Tujuan Belajar 32

Peserta dapat membuat filter (LP, HP, BP, BS) dengan menempatkan pole-zero pada posisi yang sesuai.

Dalam mendesain filter digital lowpass,
- pole harus diletakkan dekat $\omega = 0$ di dekat unit circle
- zero harus diletakkan pada $\omega = \pi$ (high frequency)



Gambar 23. Contoh peletakan poles.

Sebagai contoh,

$$H_1(z) = (1-a)\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$\uparrow$

gain agar $H_1(w) = 1,\ ?\ w = 0$

Tambah zero z = -1 $\rightarrow$ atenuasi frequency response

$$H_2(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-az^{-1}}$$

$\rightarrow$ highpass $\rightarrow$ folding the pole-zero position dengan cermin sumbu imaginer

$$H_3(z) = \frac{1-a}{2}\frac{1-z^{-1}}{1+az-1}$$

Contoh lagi, LPF dengan 2 buah pole.

$$H(z) = \frac{b_o}{\left(1-pz^{-1}\right)^2}$$

tentukan b_o dan p agar H(ω) memenuhi :

H(0) = 1

$|H(\pi/4)|^2 = 1/2$

Jawabannya adalah,

di ω = 0, diperoleh

$$H(0) = \frac{b_o}{(1-p)^2} = 1 \Rightarrow b_o = (1-p)^2$$

di ω = π/4, $H\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{(1-p)^2}{\left(1-pe^{-j\frac{p}{4}}\right)^2}$

$$= \frac{(1-p)^2}{\left(1-p\cos\left(\frac{p}{4}\right)+jp\sin\left(\frac{p}{4}\right)\right)^2} = \frac{(1-p)^2}{\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}+j\frac{p}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

sehingga

$$\frac{(1-p)^4}{\left[\left(1-\frac{p}{\sqrt{2}}\right)2+\frac{p^2}{2}\right]^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \sqrt{2}(1-p)^2 = 1+p^2 = \sqrt{2p}$$

$$\Rightarrow p = 0.32$$

$$H(z) = \frac{0.46}{\left(1-0.32z^{-1}\right)^2}$$

Prinsip yang sama dapat diterapkan pada perancangan filter BP

Tujuan Belajar 33

Peserta dapat mengubah filter LP menjadi HP dengan memproses *h*(*n*).

Bagaimanakah mengubah filter LP menjadi filter HP ?
Prototipe LPF memiliki respons impuls $h_{LP}(n)$, maka

$$h_{LP}(n) \leftrightarrow H_{LP}(\omega)$$

$H_{LP}(\omega) = H_{LP}(\omega-\pi) = H_{LP}(\omega)|_{\omega=\omega-\pi}$

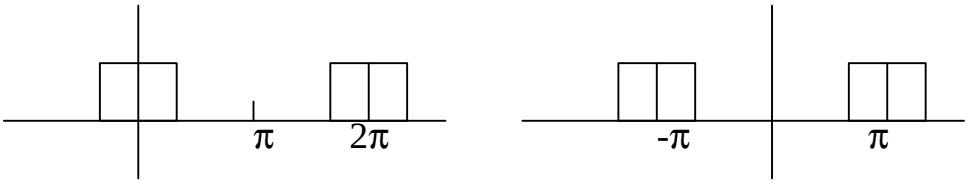
Ctt.

Bila $y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$

$$\rightarrow H_{lp}(w) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jwk}}{1 + \sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jwk}}$$

$$H_{lp}(w) = H_{LP}(w)\Big|_{w=w-p} = \frac{\sum_{k=0}^{M} (-k)^k b_k e^{-jwk}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k e^{-jwk}}$$

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x(n-k)$$

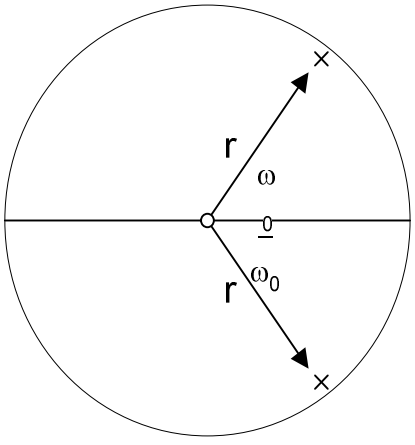


5.2 Beberapa Filter Khusus

Tujuan Belajar 34

Peserta dapat mendesain dan membuat *resonator digital*.

Resonator digital adalah filter bandpass dua-pole spesial dengan pasangan pole konjugat-kompleks di dekat unit circle.



Gambar 24. Penempatan pole untuk resonator digital.

Bisa pula ditambah 1-2 zeros. Misalnya di origin atau di z = ±1 to eliminate response di ω = 0 dan ω = π

Untuk kasus zero di origin , maka

$$H(z) = \frac{b_o}{\left(1 - re^{jw_o z^{-1}}\right)\left(1 - re^{-jw_o} z^{-1}\right)} = \frac{b_o}{1 - (2r\cos w_o)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$|H(\omega)|$ berpuncak dekat $\omega = \omega_o$, dan b_o dipilih agar $|H(\omega_o)| = 1$

$$H(w_o) = \frac{b_o}{\left(1 - re^{jw_o} e^{-jw_o}\right)\left(1 - re^{-jw_o} e^{-jw_o}\right)} = \frac{b_o}{(1-r)\left(1 - re^{-j2w_o}\right)}$$

$$|H(w_o)| = \frac{b_o}{(1-r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2w_o}} = 1$$

$$\rightarrow b_o = (1-r)\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos 2w_o}$$

$$|H(w)| = \frac{b_o}{U_1(w)U_2(w)} \qquad \theta(\omega) = 2\omega - \phi_1(\omega) - \phi_2(\omega)$$

$$\downarrow P_1 \quad \downarrow P_2$$

$$U_1(w) = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos(w_o - w)}$$

$$U_2(w) = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos(w_o + w)}$$

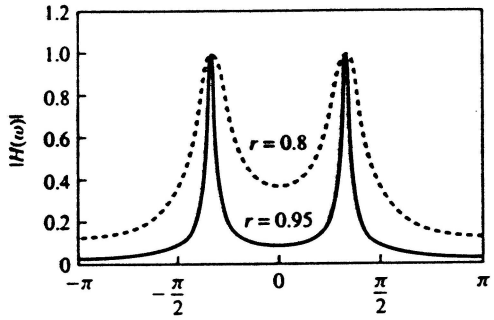
$\rightarrow U_1(\omega)$ punya min = (1-r) di $\omega = \omega_o$

$U_1(\omega)U_2(\omega)$ mencapai nilai minimum pada frekuensi

$$w_r = \cos^{-1}\left(\frac{1 + r^2}{2r}\cos w_o\right)$$

$\uparrow$ nilai frekuensi resonansi

Ctt.



Gambar 25. Spektrum resonator.

Bila $r \rightarrow$ UC, $\omega_r \approx \omega_o$

Bila z = ±1

$$H(z) = G\frac{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 + z^{-1}\right)}{\left(1 - re^{jw_o z^{-1}}\right)\left(1 - re^{-jw_o z^{-1}}\right)}$$

$$= G\frac{1-z^{-2}}{1-(2r\cos w_o)z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

$$H(w) = b_o\frac{1-e^{-j2w}}{\left[1-re^{j(w_o-w)}\right]\left[1-re^{-j(w_o-w)}\right]}$$

$$|H(w)| = b_o\frac{N(w)}{U_1(w)U_2(w)}$$

$$N(w) = \sqrt{2(1-\cos 2w)}$$

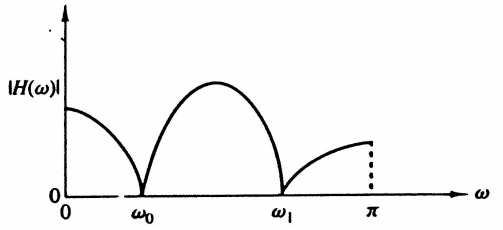
Tujuan Belajar 35

Peserta dapat mendesain dan membuat *filter notch*.

Notch Filter adalah sebuah filter yang mengandung satu atau lebih notches perfect zero.

Contoh :

Untuk meredam frekuensi PLN

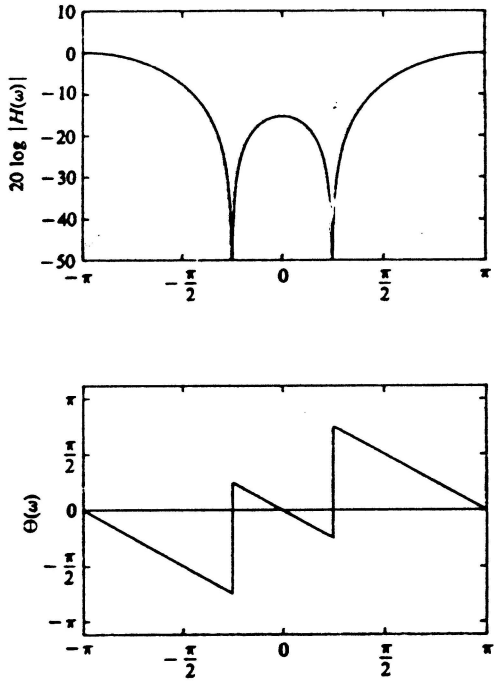


Gambar 26. Spektrum filter notch.

$$z_{12} = e^{\pm jw_o}$$

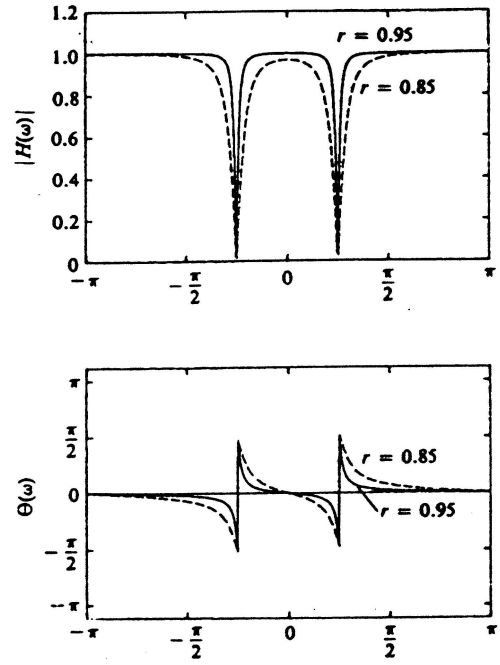
$$H(z) = b_o\left(1-e^{jw_o}z^{-1}\right)\left(1-e^{-jw_o}z^{-1}\right)$$

$$H(z) = b_o\left(1-2\cos w_o z^{-1}+z^{-2}\right)$$



Untuk menaikkan kinerja, kita bisa menambah pole $P_{1,2} = re^{\pm j\omega o}$

$$H(z) = b_o \frac{1 - 2\cos w_o z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos w_o z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



Tujuan Belajar 36

Peserta dapat mendesain dan membuat *filter comb*.

Comb Filter adalah

- Ekstensi dari Notch Filter
- Digunakan untuk membuang harmonics

$$y(n) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} x(n-k)$$

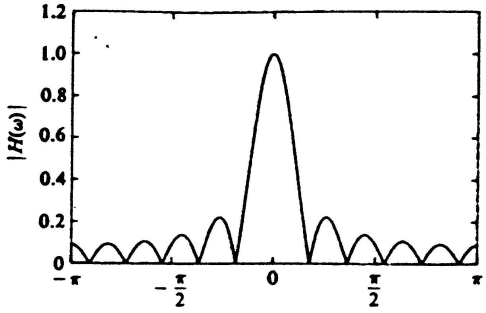
FIR :

$$H(z) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} z^{-k}$$

$$H(z) = \frac{1}{M+1}\frac{\left[1 - z^{-(M+1)}\right]}{\left(1 - z^{-1}\right)}$$

$$H(w) = \frac{e^{-jw\frac{M}{2}}}{M+1}\frac{\sin w\left(\frac{M+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}$$

$$z = e^{\frac{j2pk}{(M+1)}} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots M$$



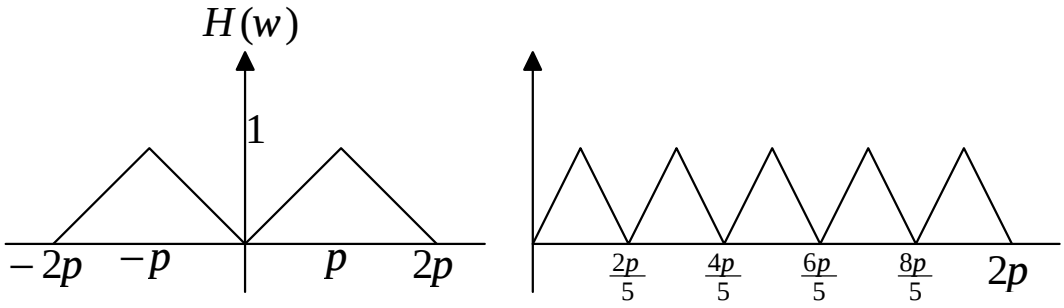
pole z = 1 di cancel zero z = 1

In general

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} h_k z^{-k}$$

$$\rightarrow H_L(z) = \sum_{k=0}^{M} h_k z^{-k} L$$

$$H_L(w) = \sum_{k=0}^{M} h(k) e^{-jkLw}$$



Jadi bila H(z) punya zero pada frekuensi ω_o, $H_L(z)$ punya zero di $\omega_k = \omega_o + 2\pi k/L$, k = 0, … L-1

Bila diterapkan di filter sebelumnya, maka

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1}\frac{1-z^{-L(M+1)}}{1-z^{-L}}$$

$$H_L(w) = \frac{1}{M+1}\frac{\sin[wL(M+1)/2]}{\sin(wL/2)}e^{-jwLM/2}$$

$$\rightarrow z_k = e^{j2p\frac{k}{L(M+1)}}$$

Tujuan Belajar 37

Peserta dapat mendesain dan membuat filter *allpass* yang tidak trivial.

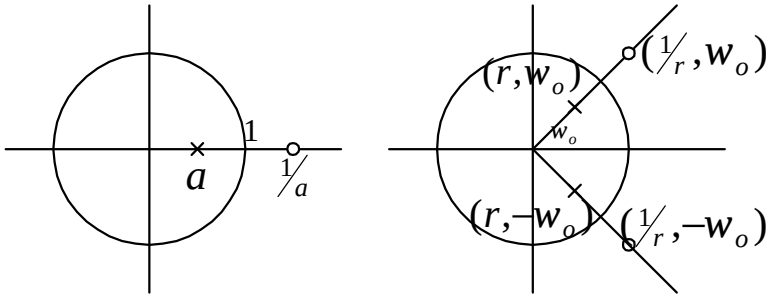
Semua filter allpass didefinisikan sebagai sistem yang memiliki respon magnitude konstan untuk semua frekuensi.

$$|H(w)| = 1 \qquad 0 \le \omega \le \pi$$

Contoh Trivial :

H(z)= z^{-k}

$$H(z) = \frac{a^N + a_{N-1}z^{-1} + ... + a_1 z^{-N+1} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N}}$$



Bila $A(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \rightarrow H(z) = z^{-N}\frac{A(z^{-1})}{A(z)}$

$$|H(w)|^2 = \left|H(z)H(z^{-1})\right|_{z=e^{jw}} = 1$$

$\rightarrow$ all pass
bila z_o is pole, z_o^{-1} is zero

Secara umum:

$$H_{ap}(z) = \prod_{k=1}^{N_R} \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{N_C} \frac{\left(z^{-1} - b_k\right)\left(z^{-1} - b_k^{*}\right)}{\left(1 - b_k z^{-1}\right)\left(1 - b_k^{*} z^{-1}\right)}$$

$N_R \Rightarrow$ Real poles and zero
$N_C \Rightarrow$ Complex conjugate pairs
Agar stabil $-1 < \alpha_k < 1$ $|\beta_k| < 1$
Ini digunakan untuk phase equalizer

Tujuan Belajar 38

Peserta dapat mendesain dan membuat *digital sinusoidal oscillator*.

Osilator sinusoidal digital dapat dilihat sebagai bentuk terbatas dari resonator dua pole dimana pole kompeks-konjugate terletak pada unit circle.

$$H(z) = \frac{b_o}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$a_1 = -2r\cos\omega_o$

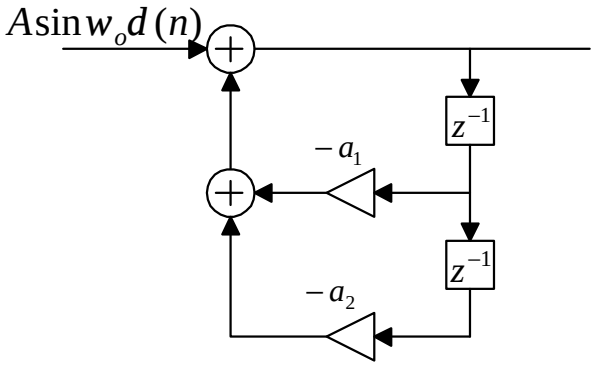
$a_2 = r^2$

$\Rightarrow$ $P_{12} = re^{\pm jw_o}$

$$h(n) = \frac{b_o r^n}{\sin w_o} \sin(n+1) w_o u(n)$$

$\rightarrow$ bila r = 1, $b_o = A\sin\omega_o$
$h(n) = A\sin(n+1)\omega_o u(n)$

$\rightarrow$ sinusoidal $\rightarrow$ digital frequency synthesizer



Gambar 27. Pembangkit sinusoid.

$$y(n) = \sin(n+1)w_o$$
$$y(0) = A\sin w_o$$
$$y(1) = A\sin 2w_o$$
$$y(2) = A\sin 3w_o$$

Coupled form membangkitkan $A\sin\omega_o n$

$A\cos\omega_o n$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Didefinisikan $\alpha = n\omega_o$ $\beta = \omega_o$

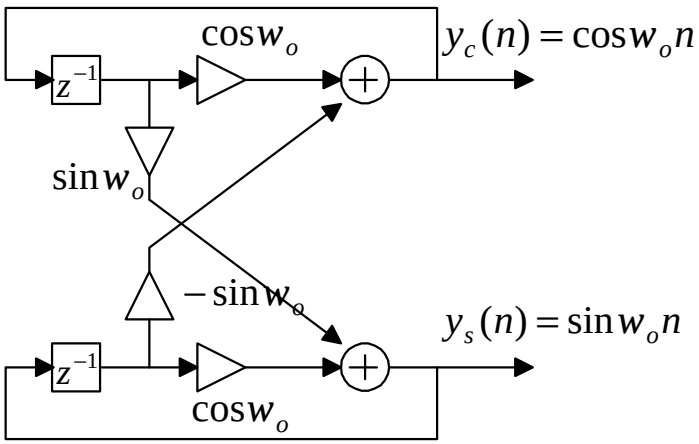
$y_c(n) = \cos n\omega_o u(n) = \cos(\omega_o+(n-1)\omega_o)u(n)$

$y_s(n) = \sin n\omega_o u(n) = \sin(\omega_o+(n-1)\omega_o)u(n)$

$$\rightarrow y_c(n) = (\cos w_o)y_c(n-1) - (\sin w_o)y_s(n-1)$$
$$y_s(n) = \sin(w_o)y_c(n-1) + (\cos w_o)y_s(n-1)$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_c(n) \\ y_s(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos w_o & -\sin w_o \\ \sin w_o & \cos w_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_c(n-1) \\ y_s(n-1) \end{bmatrix}$$

initial condition $y_c(-1) = A\cos\omega_o$

$y_s(-1) = -A\sin\omega_o$



Gambar 28. Pembangkit sinus dan cosinus.

6 Penutup

Demikian telah dijelaskan konsep spektrum untuk sinyal dan sistem di domain frekusensi.