3.5. Sinyal Konstan (DC = Direct Current)

Sinyal konstan (DC) dinyatakan dalam bentuk $x(t) = x_0$. Sinyal konstan ini dapat dianggap sebagai sinyal sinuisoida yang memiliki frekuensi $\omega = 0$.

Bentuk Amplituda-fasa untuk sinyal DC:

$x_0 = A\cos\theta$

$A = |x_0|$

$$\theta = \angle x_0 = \begin{cases} 0 & x_0 \geq 0 \\ \pi & x_0 < 0 \end{cases}$$

Bentuk eksponensial untuk sinyal DC:

$X = Ae^{j\theta}$ dengan

$A = |X|$

$\theta = \angle X$

Outputnya : $y(t) = H(0)\, x_0$

$H(0)$ = DC gain

Contoh :

Tentukan output dari contoh sebelumnya untuk input $x(t) = x_0 = -5$ mV

Jawab :

$$H(0) = \frac{K(1+j0)}{(1+j0)(1+j0)} = K = 100 \ \ V/V$$

$y(t) = H(0)\, x_0$

$= 100(-0{,}005) = -500$ mV

3.6. Sistem Dinyatakan sebagai Persamaan Differensial

Fungsi Transfer sistem linier stasioner yang stabil, output dan inputnya dihubungkan dengan persamaan differensial :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 x$$

Karena output untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ adalah $y(t) = H(j\omega)Xe^{j\omega t}$ maka dengan mensubstitusikan ke persamaan di atas diperoleh :

$$\left[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0\right] H(j\omega) X e^{j\omega t} = \left[b_m (j\omega)^m + \ldots + b_0\right] X e^{j\omega t}$$

atau

$$H(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Contoh :

Input x(t) dan output y(t) dari suatu sistem dihubungkan dengan persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + a_2\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x$$

dengan
$a_0 = b_0 = 24 \times 10^9$
$a_1 = 26 \times 10^6$
$a_2 = 9 \times 10^3$
$b_1 = 24 \times 10^6$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 20\cos\left(\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dengan $\omega_0 = 5$ krad/s

Jawab :

Fungsi transfer sistem :

$$H(j\omega) = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

$$= \frac{j\omega b_1 + b_0}{j(a_1\omega - \omega^3) + a_0 - a_2\omega^2}$$

Untuk $\omega = \omega_0 = 5$ krad/s

$$H(j\omega_0) = \frac{j(5000)(24x10^6) + 24x10^9}{j\left[(26x10^6)(5000) - (5000)^3\right] + 24x10^9 - (9x10^3)(5000)^2}$$

$$= \frac{24 + j120}{-201 + j5} = 0{,}61e^{-j1{,}75} \quad A/A$$

Dari bentuk polar $H(j\omega_0)$ ini diketahui

$\Gamma(\omega_0) = 0{,}61$
$\phi(\omega_0) = -1{,}75$

$$y(t) = 0{,}61(0{,}02)\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - 1{,}75\right)$$

$$= 12{,}2\cos(\omega_0 t - 3{,}31)$$

Latihan :

Tentukan output dari sistem yang dinyatakan dengan persamaan differensial di bawah ini untuk input :

$x(t) = 5 + 5\cos\omega_0 t$ V

dengan $\omega_0 = 1$ rad/s

$$(a)\ \frac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = \frac{dx}{dt}$$

$$(b)\ \frac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = 10\frac{dx}{dt} + 2\omega_0 x$$

$$(c)\ \frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\frac{dy}{dt} + 2{\omega_0}^2 y = 5\frac{d^2x}{dt^2} + 20\omega_0\frac{dx}{dt} + 15{\omega_0}^2 x$$

$$(d)\ \frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\frac{dy}{dt} + 2{\omega_0}^2 y = \omega_0\frac{dx}{dt}$$

$$(e)\ \frac{d^3y}{dt^3} + 3\omega_0 \frac{d^2y}{dt^2} + 3{\omega_0}^2 \frac{dy}{dt} + 2{\omega_0}^3 y = 10\frac{d^3x}{dt^3}$$

Superposisi

Superposisi digunakan untuk memperoleh output sistem linier stasioner yang inputnya terdiri dari beberapa komponen sinusoidal

Contoh : Carilah output dari sistem yang memiliki fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

dengan $\tau = 1$ ms

untuk input :

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{dengan } \omega_0 = 1\,\text{krad/s}$$

Jawab :

Gain dan pergeseran fasa sistem

$$\Gamma(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle 10 - \angle 1 + j\omega\tau$$

$$= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)$$

Output untuk komponen DC $x_o = 5$

$y_0 = H(0)x_0 = (10)(5) = 50$

Output untuk $x_1(t) = 4\cos\omega t$

$y_1(t) = \Gamma(\omega_0)\, 4\cos[\omega_0 t + \phi(\omega_0)] = 28{,}3\cos(\omega_0 t - \pi/4)$

Output untuk $x_2(t) = 3\cos(2\omega_0 t - \pi/2)$ adalah

$$y_2(t) = \Gamma(2\omega_0)3\cos\left[2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \phi(2\omega_0)\right]$$

$$= 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

dengan superposisi

$y(t) = y_0 + y_1(t) + y_2(t)$

$$= 50 + 28{,}3\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

Latihan :

Carilah output untuk sistem yang memiliki fungsi transfer berikut untuk input

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{V}$$

$$(a)\ H(j\omega) = \frac{100}{1 + 4j(\omega/\omega_0)}\ \text{mA/V} \qquad (b)\ H(j\omega) = \frac{1 - 10j(\omega/\omega_0)}{1 + 5j(\omega/\omega_0)}\ \text{V/V}$$

(c) $H(j\omega) = \dfrac{j(\omega/\omega_0)}{-100\omega^2 + j\omega\omega_0 + 100\omega_0^{\,2}}$ V/V

(d) $H(j\omega) = \dfrac{j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_0)}$ V/V

(e) $H(j\omega) = \dfrac{2}{[1 + j(\omega/\omega_0)][2 + j(\omega/\omega_0)]}$ mA/V

(f) $H(j\omega) = \dfrac{5}{0{,}5 + j(\omega/\omega_0)}$ V/V

(g) $H(j\omega) = 5e^{-j\pi\omega/\omega_0}$ mA/V