Bab III
Respon Sinusoidal

Sinyal sinusiodal digunakan sebagai input uji terhadap kinerja sistem, misal untuk mengetahui respon frekuensi, distorsi harmonik dan distorsi intermodulasi.

3.1. Bentuk Amplituda-fasa untuk Sinyal Sinusoidal

Sinyal sinusoidal x(t) dapat dinyatakan dalam bentuk amplituda-fasa :

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

A = Amplituda puncak
ω = frekuensi sudut
θ = fasa awal

3.2. Bentuk Eksponensial

Sinyal sinusoidal dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$

dengan
X = amplituda kompleks
X* = Konjugat dari X

Menggunakan identitas Euler : $\cos\alpha = \frac{1}{2}e^{j\alpha} + \frac{1}{2}e^{-j\alpha}$ diperoleh

$X = \frac{1}{2}Ae^{j\theta}$

dengan

$A = 2|X|$

$\theta = \angle X$

Contoh :

Sinyal sinusoidal :

$x(t) = 10\cos(\omega t - \pi/4)$ V

Nyatakanlah dalam bentuk eksponensial

Jawab :

$x(t) = 5e^{-j\pi/4}e^{j\omega t} + 5e^{j\pi/4}e^{-j\omega t}$ V

Contoh :

Sinyal sinusoidal x(t) dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$

dengan

$X = 4e^{j3\pi/4}$ mA. Nyatakan dalam bentuk Amplituda fasa

Jawab :

$x(t) = 8\cos(\omega t + 3\pi/4)$ mA

Latihan :

1. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk amplituda fasa
   (a) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega t - \pi/2)$ mA
   (b) $x(t) = -20 + 10\sin\omega t$ V
   (c) $x(t) = 3\cos\omega t + 4\sin\omega t$ mV
   (d) $x(t) = 5e^{-j\omega t} + 5e^{j\omega t}$ V
   (e) $x(t) = 2 + (1+j)e^{-j\omega t} + (1-j)e^{j\omega t}$ mA

(f) $x(t) = je^{j(\omega t - \pi/3)} - je^{-j(\omega t - \pi/3)}$ mV

(g) $x(t) = \dfrac{10e^{j\omega t}}{1-j} + \dfrac{10e^{-j\omega t}}{1+j} - 5$ mA

2. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk eksponensial

(a) $x(t) = 10 + 5\cos(\omega t - \pi/4)$ V
(b) $x(t) = 20 + 10\cos\omega_1 t + 5\cos(\omega_2 t - \pi/2)$ V
(c) $x(t) = -20 + 10\sin\omega t$ mA
(d) $x(t) = 10 - 3\cos\omega t + 3\sin\omega t$ V
(e) $x(t) = 5 + 10\cos\omega_1 t + 10\cos(\omega_1 t - \pi/4) - 10\sin(\omega_2 t + \pi/4)$ V

3.3. Fungsi Transfer untuk Sistem Linier

Output untuk sistem linier :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)x(t-\eta)d\eta$$

Untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ maka outputnya :

$$y(t) = X\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{j\omega(t-\eta)}d\eta$$

$$= Xe^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta$$

$$= Xe^{j\omega t}H(j\omega)$$

dengan

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \text{Fungsi Transfer}$$

Fungsi Transfer nilainya berubah sesuai dengan frekuensi dari sinyal input

Output dapat juga dituliskan :
$y(t) = Ye^{j\omega t}$ dengan $Y = H(j\omega)X$ = Amplituda kompleks output

Contoh :
Respon impulse suatu sistem linier :

$$h(t) = \frac{k}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

dengan $\tau = 1$ ms dan $k = 10^3$ V/A. Carilah output y(t) untuk input
$x(t) = 10\cos(\omega_0 t + \pi/4)$ mA dengan $\omega_0 = 2$ krad/s
Jawab :
Amplituda puncak : A = 10 mA
Fasa awal : $\theta = \pi/4$ rad

Amplituda kompleks input :
$X = \frac{1}{2} Ae^{j\theta} = 5e^{j\pi/4}$ mA $= 0{,}005e^{j\pi/4}$ A

Fungsi Transfer sistem :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\tau}e^{-\pi/\tau}u(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta$$

$$= \int_0^\infty \frac{k}{\tau} e^{-(1+j\omega t)\eta/\tau} d\eta = \frac{k}{\tau}\left[-\frac{e^{-(1+j\omega\tau)\eta/\tau}}{(1+j\omega\tau)/\tau} \right]_{\eta=0}^{\eta=\infty}$$

$$= \frac{k}{1+j\omega\tau}$$

Amplituda Kompleks Output :

$$Y = H(j\omega_0)X = \frac{10^3}{1+j\omega_0\tau}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$= \frac{10^3}{1+j\left(2x10^3\right)\left(10^{-3}\right)}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$= \frac{5e^{j\pi/4}}{\sqrt{5}e^{j1{,}11}} = \sqrt{5}e^{-j0{,}32} \quad V$$

Amplituda puncak output :

$$B = 2|Y| = 2\sqrt{5} \ V$$

Fasa awal :

$\varphi = \angle Y = -0{,}32$ rad

Output dinyatakan dalam bentuk Amplituda-fasa :

$$y(t) = 2\sqrt{5}\cos\left(\omega_0 t - 0{,}32\right)$$

dengan

$\omega_0 = 2$krad/s

Latihan

Carilah fungsi transfer untuk sistem yang memiliki respon impuls berikut :

$$(a)\ h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t) \qquad (b)\ h(t) = \frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}u(t)$$

$$(c)\ h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(\sin\omega t)u(t) \qquad (d)\ h(t) = \left(\frac{1}{\tau_1}e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right)u(t)$$

$$(e)\ h(t) = \frac{1}{\tau}r\left(\frac{t}{\tau}\right) \qquad (f)\ h(t) = \omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega_0 t$$

$$(g)\ h(t) = \omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\sin\omega_0 t \qquad (h)\ h(t) = 4\delta(t) + 3\delta(t-t_0) + 2\delta(t-2t_0)$$

3.4. Gain dan Phase Shift (pergeseran fasa)

Telah diperlihatkan bahwa output sistem linier stasioner stabil untuk input $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ adalah

$y(t) = |H(j\omega_0)|A\cos[\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0)]$

dengan $H(j\omega)$ = fungsi transfer sistem

Kita nyatakan gain dengan $\Gamma(\omega)$ dan pergeseran fasa dengan $\phi(\omega)$

$\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$

$\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

sehingga

$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 + \theta + \phi(\omega_0)]$

Contoh :

Fungsi Transfer untuk suatu sistem linier stasioner adalah

$$H(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3)}$$

dengan K = 100 V/V, ω_1 = 1 krad/s, ω_2 = 2 krad/s dan ω_3 = 3 krad/s

Carilah output y(t) untuk input

$x(t) = 5\cos(\omega_0 t - \pi/3)$ dengan ω_0 = 1 krad/s

Jawab :

Gain : $\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$

$$= \left|\frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3}\right|$$

$$= \frac{|K||1 + j\omega/\omega_2|}{|1 + j\omega/\omega_1||1 + j\omega/\omega_3|}$$

$$= \frac{|K|\sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}\sqrt{1 + (\omega/\omega_3)^2}}$$

Untuk $\omega = \omega_0$ = 1 krad/s

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{100\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1 + 1^2}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 75 \text{ V/V}$$

Pergeseran fasa :

$$\phi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle K + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

$$= 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_3}{1}\right)$$

Untuk $\omega = \omega_0$

$$\phi(\omega_0) = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}5}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0{,}3}{1}\right)$$

$$= 0{,}46 - 0{,}79 - 0{,}32 = -0{,}65 \text{ rad}$$

Jadi outputnya :

$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 t + \theta + \phi(\omega)]$

$= (75)(5)\cos[\omega_0 t + (-\pi/3) - 0{,}65$

$= 375\cos(\omega_0 t - 1{,}7)$ V