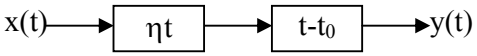
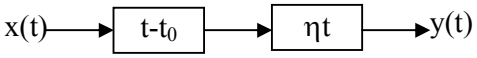
Contoh : Apakah elemen kompresi stasioner?





Jawab :

$y_1(t) = x[\eta(t - t_0)] = x(\eta t - \eta t_0)$

$y2(t) = x(\eta t - t_0)$

untuk $\eta \neq 1$, $y_1(t) \neq y_2(t)$ jadi elemen kompresi tidak stasioner

Latihan :

Buktikan atau perlihatkan apakah elemen proporsional dengan gain k(t) adalah stasioner

Suatu elemen atau sistem yang terdiri dari sub sistem stasioner adalah stasioner dan sistem tanpa parameter berubah terhadap waktu adalah stasioner

2.3 Sistem Linier Stasioner

Sistem Linier Stasioner memenuhi syarat superposisi dan time variance. Output dari sistem linier stasioner untuk input :

$x(t) = a_1x_1(t - t_1) + a_2x_2(t - t_2) + \ldots$

adalah

$y(t) = a_1y_1(t - t_1) + a_2y_2(t - t_2) + \ldots$

dengan $y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$; i = 1, 2, 3, …

Contoh : output dari suatu sistem linier stasioner untuk input $x_1(t) = x_0u(t)$

adalah

$$y_1(t) = y_0e^{-t/\tau_1}u(t)$$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 5x_0r\left(\frac{t}{\tau_2}\right)$$

Jawab : input x(t) dapat dinyatakan dengan

$x(t) = 5x_0u(t) - 5x_0u(t-\tau_2) = 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau_2)$

Melalui superposisi dan time invarian outputnya adalah

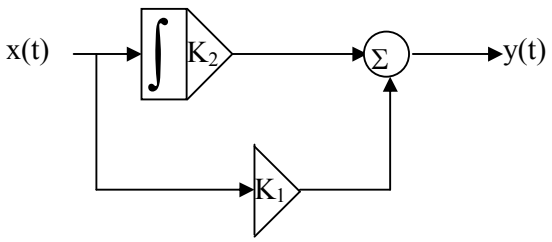
$$y(t) = 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau_2)$$
$$= 5y_0e^{-t/\tau_1}u(t) - 5y_0e^{-(t-\tau_2)/\tau_1}u(t - \tau_2)$$

Jadi suatu sistem adalah linier dan stasioner jika mengandung elemen proporsional, delay, integral, diffensial, penjumlahan dan tanpa parameter yang bervariasi terhadap waktu

Contoh :

Carilah output y(t) dari sistem berikut untuk input

$$x(t) = 5x_0r\left(\frac{t}{\tau}\right) - 2x_0r\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)$$



Dari pengamatan diagram blok ini adalah linier dan stasioner jadi dapat digunakan superposisi dan time invariance

Input dapat dinyatakan sebagai

$x(t) = 5x_0u(t) - 5x_0u(t - \tau) - 2x_0u(t - t_0) + 2x_0u(t - t_0 - \tau)$

$= 5x_1(t) - 5x_1(t - \tau) - 2x_1(t - t_0) + 2x_1(t - t_0 - \tau)$

dengan $x_1(t) = x_0u(t)$

Outputnya untuk sistem linier stasioner :

$y(t) = 5y_1(t) - 5y_1(t - \tau) - 2y_1(t - t_0) + 2y_1(t - t_0 - \tau)$

dengan $y_1(t)$ adalah output dari input $x_1(t)$

$$y_1(t) = k_1 x_0 \int_{-\infty}^{t} u(t)dt - k_2 x_0 u(t)$$

$$= k_1 x_0 t u(t) - k_2 x_0 u(t) = x_0(k_1 t - k_2)u(t)$$

Sehingga

$$y(t) = 5x_0(k_1 t - k_2)u(t) - 5x_0[k_1(t-\tau) - k_2]u(t-\tau)$$

$$- 2x_0[k(t-t_0) - k_2]u(t-t_0) + 2x_0[k_1(t-t_0-\tau) - k_2]u(t-t_0-\tau)$$

2.4. Integral Konvolusi

Respon impuls dari sistem linier stasioner dinyatakan sebagai fungsi h(t) dengan y(t) = ah(t) adalah output untuk input x(t) = aδ(t)

Untuk input sembarang y(t) dapat diperoleh dengan integral konvolusi :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$$

Contoh :

Respon Impuls dari sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0 u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_0}{\tau} u(\lambda) e^{-(t-\lambda)/\tau} u(t-\lambda)d\lambda$$

Fungsi $u(t-\lambda) = 1$ untuk $t - \lambda > 0$ dengan $\lambda > t$ dan

$u(t-\lambda) = 0$ untuk λ lainnya

Maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} u(\lambda)d\lambda$$

Fungsi $u(\lambda) = 1$ untuk $\lambda > 0$ maka

$$y(t) = \int_{0}^{t} \frac{x_0}{\tau} e^{-(t-\lambda)/\tau} d\lambda$$

$$y(t) = \frac{x_0}{\tau} e^{-t/\tau} \int_{0}^{t} e^{\lambda/\tau} d\lambda \qquad ; t > 0$$

$$= x_0 e^{-t/\tau} u(t)(e^{-t/\tau} - 1)$$

$$= x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t)$$

Terkadang lebih mudah mengganti variable integral λ menjadi $\eta = t - \lambda$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta)h(\eta)d\eta$$

Contoh :

Respon Impuls dari suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (\sin \omega t) u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_o u(t)$

Jawab :

Karena input x(t) lebih sederhana dari respon impuls h(t) maka

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta)\frac{1}{\tau}e^{-\eta/\tau}(\sin\omega\eta)u(\eta)d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau}e^{-\eta/\tau}(\sin\omega\eta)u(\eta)d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau}\int_{0}^{t} e^{-\eta/\tau}(\sin\omega\eta)d\eta$$

$$= \frac{x_0}{\tau}\left[\frac{\tau[\omega\tau - e^{-t/\tau}(\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t)]}{1+(\omega\tau)^2}\right]u(t)$$

Maka outputnya :

$$y(t) = \frac{x_0[\omega\tau - e^{-t/\tau}(\sin\omega t + \omega\tau\cos\omega t)]}{1+(\omega\tau)^2}u(t)$$

Contoh :

Respon impuls untuk suatu sistem linier stasioner adalah :

$$h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

Carilah output y(t) untuk input $x(t) = x_0u(t)$

Jawab :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\eta)h(\eta)d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_0 u(t-\eta)\left[\delta(\eta) - \frac{1}{\tau}e^{-\eta/\tau}u(\eta)\right]d\eta$$

Kita tuliskan sebagai :

$y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

dengan

$$y_1(t) = x_0\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\eta)\delta(\eta)d\eta$$

$$= x_0\int_{-\infty}^{t} \delta(\eta)d\eta$$

dan

$$y_2(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau}e^{-\eta/\tau}u(\eta)u(t-\eta)d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \frac{x_0}{\tau}e^{-\eta/\tau}u(\eta)d\eta$$

$y_1(t) = x_0[u(t) - u(-\infty)] = x_0u(t)$

$y_2(t) = x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t)$

Output $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$

$= x_0u(t) - x_0(1 - e^{-t/\tau})u(t) = x_0e^{-t/\tau}u(t)$

2.4.1. Interprestasi Grafik untuk Konvolusi

Integral konvolusi : $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t-\lambda)d\lambda$

Misal :

$x(t) = x_0 u(t)$

$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} u(t)$

Dalam bentuk grafik :

