Bab II
Sistem Linier Stasioner

Sebuah sistem linier stasioner memenuhi superposisi dan memiliki parameter yang konstan tidak berubah terhadap waktu (invariant waktu)

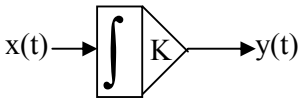
2.1. Sistem Linier

Sistem linier adalah sistem yang mengikuti prinsip superposisi :

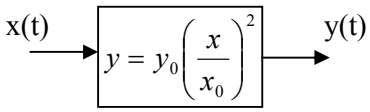
Jika input $x_1(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_1(t)$ dan
Input $x_2(t)$ secara sendirian menghasilkan output $y_2(t)$
maka input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ menghasilkan output $y(t)=a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

Contoh 2-1: Perlihatkan bahwa sistem berikut linier

a)



b)



Jawab :

a. Output untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = k\int_{-\infty}^{t}[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)]dt$$

$$= a_1k\int_{-\infty}^{t}x_1(t)dt + a_2k\int_{-\infty}^{t}x_2(t)dt$$

$$= \quad a_1y_1(t) \quad + \quad a_2y_2(t)$$

dengan $y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan
$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$
Jadi sistem integrator adalah linier

b. Karakteristik transfer dari sistem :

$$y(t) = y_0\left[\frac{x(t)}{x_0}\right]^2$$

Output untuk input $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$ adalah

$$y(t) = y_0\left[\frac{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)}{x_0}\right]^2$$

$$= a_1^2y_0\left[\frac{x_1(t)}{x_0}\right]^2 + a_2^2y_0\left[\frac{x_2(t)}{x_0}\right] + 2a_1a_2y_0\frac{x_1(t)x_2(t)}{x_0^2}$$

Hasil ini tidak memiliki bentuk
$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

dengan

$y_1(t)$ adalah output untuk input $x_1(t)$ dan

$y_2(t)$ adalah output untuk input $x_2(t)$

Jadi sistem ini nonlinier

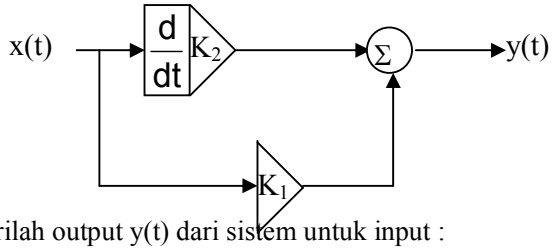
Superposisi dapat diperluas untuk input dengan lebih dari 2 komponen. Misal untuk input : $x(t) = a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + \ldots. + a_nx_n(t)$ makan outputnya adalah

$$y(t) = a_1y_1(t) + a_2y_2(t) + \ldots. + a_ny_n(t)$$

dengan

$y_i(t)$ adalah output untuk input $x_i(t)$; i = 1,2, ..,n

Contoh :



Carilah output y(t) dari sistem untuk input :

$$x(t) = 5x_0\cos\omega_1(t) + 4x_0\cos\omega_2(t) - 3x_0\cos\omega_3t$$

Jawab :

Karena sistem linier dapat digunakan superposisi. Input adalah kombinasi linier dari bentuk $x_i(t) = x_0\cos\omega_it$ untuk i = 1, 2, 3 dengan outputnya :

$$y_i(t) = k_1x_0\cos\omega_it - k_2\omega_ix_0\sin\omega_it \text{ ; } i = 1, 2, 3$$

Melalui superposisi outputnya :

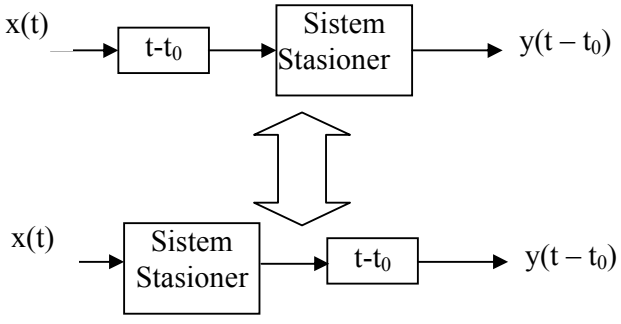
$$y(t) = 5y_1(t) + 4y_2(t) - 3y_3(t)$$
$$= 5\,(k_1x_0\cos\omega_1t - k_2\omega_1x_0\sin\omega_1t)$$
$$+ 4\,(k_1x_0\cos\omega_2t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_2t)$$
$$- 3\,(k_1x_0\cos\omega_3t - k_2\omega_2x_0\sin\omega_3t)$$

Setiap sistem yang terdiri dari beberapa sub sistem linier adalah sistem linier. Proporsi, delay, kompresi, integrator, differensiator dan penjumlahan adalah elemen yang berupa sistem linier

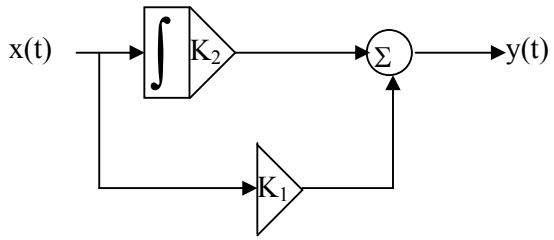
2.2. Sistem Stasioner

Sistem stasioner adalah sistem yang mengikuti prinsip invarian waktu :

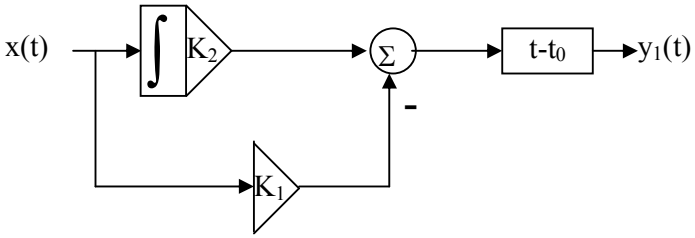
Jika input x(t) menghasilkan output y(t), maka input $x(t-t_0)$ menghasilkan output $y(t-t_0)$

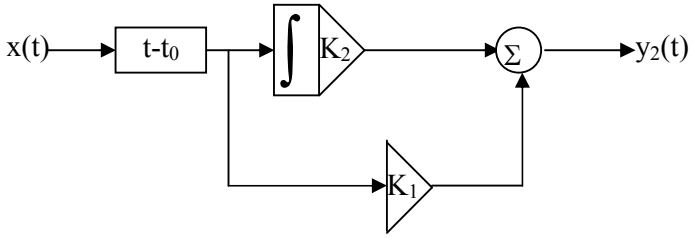


Contoh : Perlihatkan bahwa sistem berikut adalah sistem stasioner



Jawab : untuk memperlihatkan sistem ini linier ditambahkan elemen tunda





Sistem stasioner jika $y_1(t) = y_2(t)$

$$y_1(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(t)dt - k_2 x(t-t_0)$$

dan

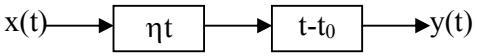
$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t} x(t-t_0)dt - k_2 x(t-t_0)$$

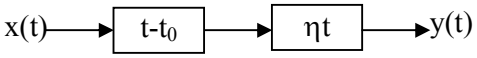
misal $\alpha = t - t_0$ maka

$$y_2(t) = k_1 \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\alpha)d\alpha - k_2 x(t-t_0)$$

Karena $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ identik maka sistem adalah stasioner

Contoh : Apakah elemen kompresi stasioner?





Jawab :

$y_1(t) = x[\eta(t - t_0)] = x(\eta t - \eta t_0)$

$y2(t) = x(\eta t - t_0)$

untuk $\eta \neq 1$, $y_1(t) \neq y_2(t)$ jadi elemen kompresi tidak stasioner

Latihan :

Buktikan atau perlihatkan apakah elemen proporsional dengan gain k(t) adalah stasioner

Suatu elemen atau sistem yang terdiri dari sub sistem stasioner adalah stasioner dan sistem tanpa parameter berubah terhadap waktu adalah stasioner