Bab IV
Analisis Domain Frekuensi

4.1. Amplituda dan Fasa

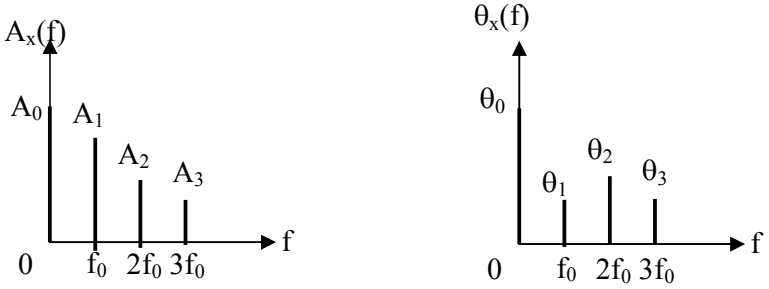
Suatu sinyal x(t) yang berada pada interval hingga $t_0 \le t < t_0 + T$ dapat dinyatakan dengan deret harmonik sebagai berikut :

$$x(t) = A_0 \cos\theta_0 + A_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \qquad (*)$$

dengan

ω_0 = frekuensi natural/dasar
$= 2\pi/T$
$= 2\pi f$

Bentuk deret harmonik ini menunjukkan spektrum Amplituda dan spektrum fasa dengan frekuensi masing-masing yang dapat digambarkan sebagai berikut :



Spektrum Amplituda dan fasa (one-sided spectrum)

$$A_x(f) = \begin{Bmatrix} A_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix} \qquad \theta_x(f) = \begin{Bmatrix} \theta_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}$$

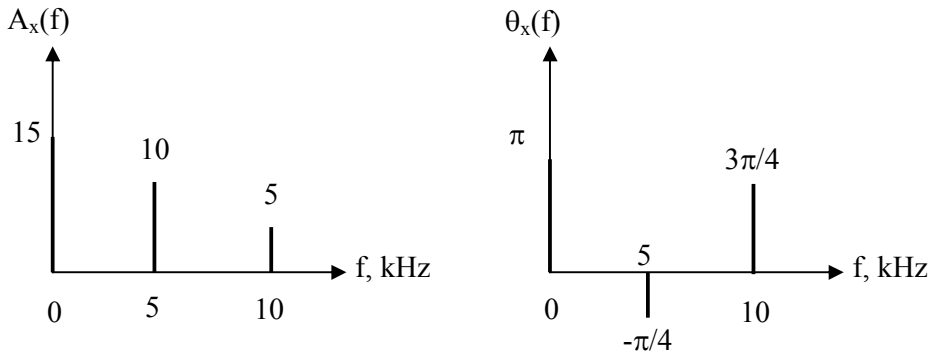
Contoh :
Gambarkan spektrum dari sinyal

$$x(t) = -15 + \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 5\cos\left(2\omega_0 t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

dengan $f_0 = 5$ kHz

Jawab :
Komponen DC dapat dinyatakan dengan : $-15 = 15 \cos\pi$

$$A_x(f) = \begin{Bmatrix} 15 & f = 0 \\ 10 & f = 5\text{kHz} \\ 5 & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{Bmatrix} \qquad \theta_x(f) = \begin{Bmatrix} \pi \text{ rad} & f = 0 \\ -\frac{\pi}{4} \text{ rad} & f = 5\text{kHz} \\ \frac{3\pi}{4} \text{ rad} & f = 10\text{kHz} \\ 0 & f \text{ yang lain} \end{Bmatrix}$$



Latihan :
Gambarkan spektrum dari sinyal berikut :

(a) $x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 15\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$, $f_0 = 2$ kHz
(b) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega_0 t - \pi/4) + 10\cos(3\omega_0 t)$, $f_0 = 5$ kHz
(c) $x(t) = 4\cos(2\omega_0 t - \pi/4) + 18\cos(4\omega_0 t + \pi/2) + 9\cos(7\omega_0 t + 3\pi/4)$, $f_0 = 1$ kHz
(d) $x(t) = 2 + 8\cos(3\omega_0 t + 3\pi/4) + 20\cos(5\omega_0 t + \pi/6)$, $f_0 = 4$ kHz

4.2. Spektrum Kompleks

Sinyal x(t) pada persamaan (*) dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = \ldots + X_2^* e^{-j2\omega_0 t} + X_1^* e^{-j\omega_0 t} + X_0 + X_1^* e^{j\omega_0 t} + X_2^* e^{j\omega_0 t} + \ldots$$

dengan $X_0 = A_0 \cos\theta_0$ (Komponen DC)
dan

$$X_n = \frac{1}{2} A_n e^{j\theta_n} \quad \text{untuk } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dari definisi $X_{-n} = X^*$

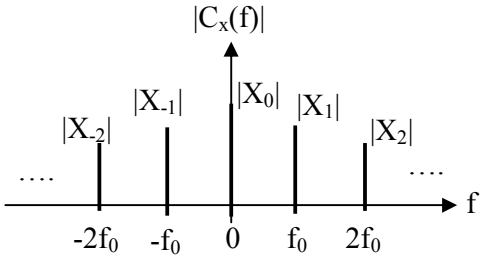
Sehingga persamaan di atas dapat ditulis

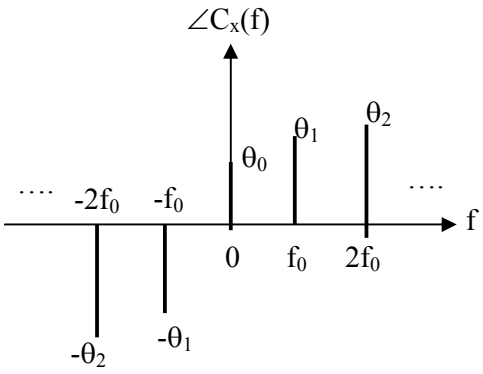
$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}}$$

Amplituda kompleks X_n kemudian dinyatakan sebagai fungsi frekuensi yang disebut spektrum frekuensi : $C_x(f)$

$$C_x(f) = \begin{Bmatrix} X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Spektrum kompleks dalam gambar dinyatakan dengan magnituda dan sudutnya yaitu
$|C_x(f)|$ disebut spektrum amplituda (two-sided amplitude spectrum)
dan
$\angle C_x(f)$ disebut spektrum fasa 2 sisi (two-sided phase spectrum)





Hubungan spektrum 2-sisi dengan spektrum 1-sisi

$$A_x(f) = \begin{cases} |C_x(f)| & f = 0 \\ 2|C_x(f)| & f > 0 \end{cases}$$

$\theta_x(f) = \angle C_x(f), \quad f \geq 0$

atau

$$C_x(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_x(f) e^{-j\theta_x(f)} & f < 0 \\ A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f = 0 \\ \frac{1}{2} A_x(f) e^{j\theta_x(f)} & f > 0 \end{cases}$$

Spektrum 2-sisi simetris pada f = 0.

Contoh :

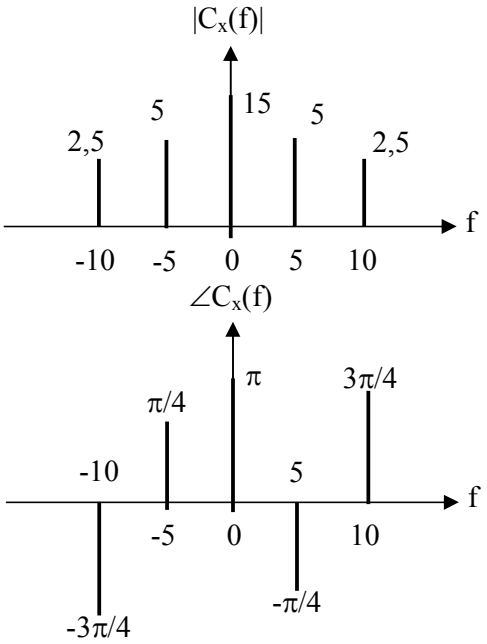
Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{2} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $f_0 = 5$ kHz, $X_0 = -15$, $X_1 = 5e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 2{,}5e^{j3\pi/4}$

catatan : $X_{-1} = X_1^*$

$X_{-2} = X_2^*$



Latihan :

Gambarkan spektrum 2-sisi untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-2}^{3} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $f_0 = 2$ kHz, $X_0 = 10$, $X_1 = 4e^{-j\pi/4}$, $X_2 = 6e^{j3\pi/4}$, $X_3 = 8e^{-j\pi/3}$

4.3. Analisis Domain Frekuensi untuk Sistem Linier Stasioner

Untuk sinyal input

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t}$$

Output untuk sistem linier stasioner adalah

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(jn\omega_0) X_n e^{jn\omega_0 t}$$

atau

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n e^{jn\omega_0 t}$$

dengan $Y_n = H(jn\omega_0)X_n$

spektrum kompleks output :

$$Y_n = \begin{Bmatrix} H(j2\pi f)X_n & f = nf_0 \\ 0 & f \neq nf_0 \end{Bmatrix}$$

atau

$$C_y(f) = H(j2\pi f)C_x(f)$$

sehingga

$$|C_y(f)| = |H(j2\pi f)||C_x(f)|$$

$$\angle C_x(f) = \angle H(j2\pi f) + \angle C_x(f)$$

dan untuk spektrum 1-sisi

$$A_y(f) = \Gamma(2\pi f)A_x(f)$$
$$\theta_x(f) = \phi(2\pi f) + \phi_x(f)$$

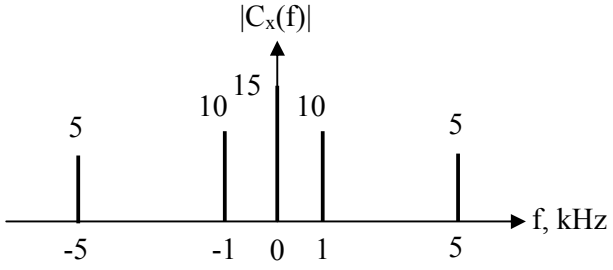
Contoh :

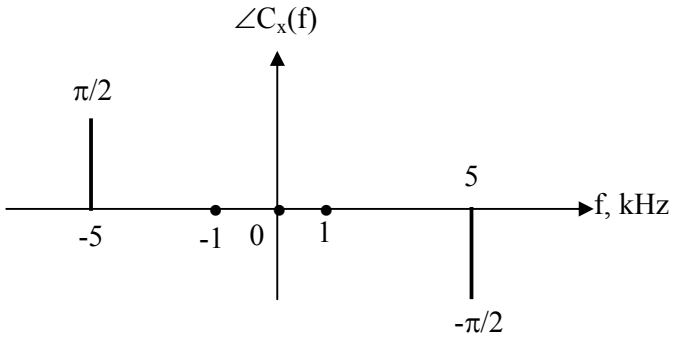
Fungsi transfer sebuah sistem

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega / \omega_1)}$$

dengan $f_1 = \omega_1/2\pi = 1$ kHz

Spektrum 2 sisi untuk inputnya :





Carilah :

a. Spektrum kompleks dari output
b. Bentuk amplituda fasa dari output
c. Persamaan output dalam fungsi waktu

Jawab :

a.

f, kHz	$C_x(f)$	$H(j2\pi f)$	$C_y(f)$
-5	$5e^{j\pi/2}$	$0{,}196e^{j1{,}37}$	$0{,}98e^{j2{,}94}$
-1	10	$0{,}707e^{j0{,}785}$	$7{,}07e^{j0{,}785}$
0	15	1	15
1	10	$0{,}707e^{-j0{,}785}$	$7{,}07e^{-j0{,}785}$
5	$5e^{-j\pi/2}$	$0{,}196e^{-j1{,}37}$	$0{,}98e^{-j2{,}94}$

b. Spektrum 1 sisi dari dari output

f, kHz	$A_y(f)$	$\theta_y(f)$, rad
0	15	0
1	14,1	-0,785
5	1,96	-2,94

c.

$$y(t) = 15 + 14{,}1\cos(\omega_0 t - 0{,}785) + 1{,}96\cos(5\omega_0 t - 2{,}94)$$

dengan $f_0 = 1$ kHz

Latihan :

a. Gambarkan respon frekuensi dari output dalam bentuk spektrum 2-sisi untuk sistem dengan fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega/\omega_2}{3(1 + j\omega/\omega_1)(j\omega/\omega_2)}$$

dengan $f_1 = 1$ kHz, $f_2 = 2$ kHz.
Untuk input :

$$x(t) = 10 + 20\cos(\omega_0 t - \pi/4) - 10\cos(3\omega_0 t + \pi/2)$$

dengan $f_0 = 4$ kHz