# BAB IV
# TURUNAN

## 4.1 Konsep Turunan

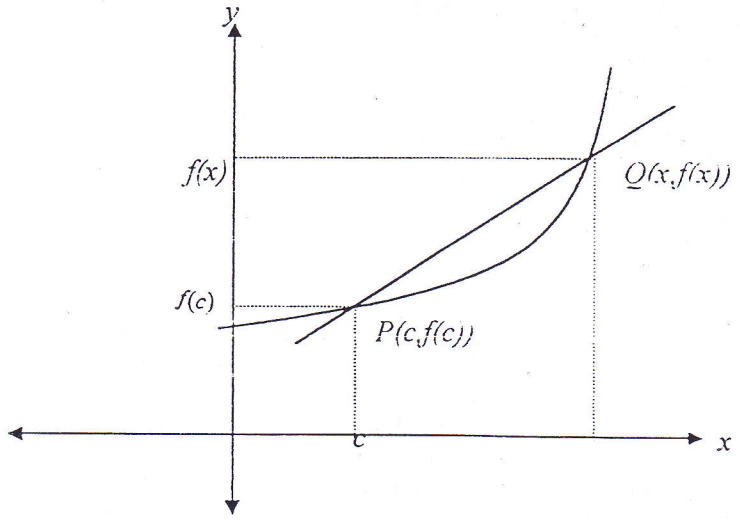
### 4.1.1 Turunan di Satu Titik

**Definisi 4.1** Misalkan fungsi $f$ terdefinisi pada selang $I$ yang memuat $c$. Turunan pertama fungsi $f$ di titik $c$, ditulis $f'(c)$ didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

bila limit ini ada.

Arti geometris: Perhatikan gambar berikut




Misal diberikan grafik fungsi $y = f(x)$ dengan $P\ (c, f(c))$ terletak pada kurva $f(x)$.

Bila $Q\ (x, f(x))$ merupakan titik sebarang pada kurva $f(x)$ maka gradien tali busur $PQ$ dapat dinyatakan dengan :

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Jika $x \to c$, maka tali busur $PQ$ akan berubah menjadi garis singgung di titik $P$ dengan kemiringan

Jadi, arti geometris dari $f'(c)$ adalah kemiringan garis singgung kurva $f$ di titik $(c,f(c))$.

Selanjutnya, akan dilihat arti fisis dari turunan.

Misalkan sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat,




Dari sini kita dapatkan $V_{rata} = \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

Jika $h \to 0$, maka didapat $V = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$, yang biasa disebut dengan kecepatan sesaat di $c$.

Bila $x=c+h$, maka akan diperoleh $V = \lim_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$

Jadi, arti fisis dari $f'(c)$ adalah laju perubahan nilai fungsi $f(x)$ terhadap peubah $x$.

Notasi lain untuk turunan pertama fungsi $f$ di $c$ adalah : $\dfrac{df(c)}{dx}, \dfrac{dy(c)}{dx}, y'(c)$.

**Contoh 4.1** Diketahui $f(x) = \dfrac{1}{x}$, tentukan $f'(3)$

**Jawab :** $f'(3) = \lim_{x\to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \dfrac{3-x}{3x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{-1}{3x} = -\dfrac{1}{9}$.

### 4.1.2 Turunan Sepihak

**Definisi 4.2**

(i) Turunan kiri dari fungsi $f$ di titik $c$, ditulis $f_-'(c)$, didefinisikan sebagai :

$$f_-'(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

(ii) Turunan kanan dari fungsi $f$ di titik $c$, ditulis $f_+'(c)$, didefinisikan sebagai :

$$f_+'(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

bila limit ini ada.

Fungsi $f$ dikatakan **mempunyai** turunan ( diferensiabel ) di $c$ atau, $f'(c)$ ada jika $f_-'(c) = f_+'(c)$, dan $f'(c) = f_-'(c) = f_+'(c)$, sebaliknya $f$ dikatakan tidak mempunyai turunan di $c$.

**Contoh 4.2** Diketahui $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & , x < 1 \\ 1 + 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$

a) Selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=1$

b) Jika ya, tentukan $f'(1)$

**Jawab :** a)

$$f_-'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x + 3 - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x(x-1)}{x - 1} = 1$$

b) $$f_+'(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1 + 2\sqrt{x} - (1 + 2\sqrt{1})}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{2\sqrt{x} - 2}{x - 1} = 2 \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = 1$$

Jadi, $f$ diferensiabel di x=1. $f_-'(1) = f_+'(1) = 1$ , maka $f'(1) = 1$.

- **Keterdiferensialan dan kekontinuan**

**Teorema 4.1** Jika $f$ diferensiabel di $c$ , maka $f$ kontinu di $c$.

**Bukti :** Yang perlu ditunjukkan adalah bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Perhatikan bahwa, $f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.(x - c)$ , $x \neq c$

Maka $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \left[ f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right]$

$$= \lim_{x \to c} f(c) + \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . \lim_{x \to c} (x - c)$$

$$= f(c) + f'(c).0$$

$$= f(c).$$ ( terbukti )

Teorema 4.1 dapat juga dinyatakan sebagai : bila $f(x)$ tidak kontinu di $c$ maka $f$ tidak mempunyai turunan di $c$. Dengan kata lain kekontinuan adalah syarat perlu untuk

keterdiferensialan. Sifat tersebut **tidak** berlaku sebaliknya. Artinya, Jika $f$ kontinu di $c$, maka tidak benar **bahwa** $f$ **diferensiabel** di $c$. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

**Contoh 4.3** Tunjukkan bahwa $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$ tetapi tidak diferensiabel di $x = 0$

**Jawab** :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\ ,\ x \geq 0 \\ -x\ ,\ x < 0 \end{cases}$$

*(i)* Akan **ditunjukkan bahwa** $f$ kontinu di $x=0$

- $f(0) = 0$
- karena $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$ dan $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} x = 0$

  maka $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- Jadi $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

Jadi $f(x) = |x|$ kontinu di $x = 0$

(ii) Selanjutnya selidiki apakah $f(x)$ diferensiabel di $x=0$ atau $f'_-(0) = f'_-(0)$?

- $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$
- $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1.$

Karena $-1 = f'_-(0) \neq f'_+(0) = 1$ maka $f(x) = |x|$ tidak diferensiabel di $x = 0$.

**Contoh 4.4** Tentukan konstanta $a$ dan $b$ agar fungsi berikut diferensiabel di $x= 1$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + b\ ,\ x < 1 \\ ax\ ,\ x \geq 1 \end{cases}$$

**Jawab** : Agar fungsi $f(x)$ diferensiabel di x=1, maka $f(x)$ harus kontinu di $x=1$ dan

$f'_-(1) = f'_-(1)$

(i) Syarat agar $f$ kontinu di 1 adalah $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$.

Maka $a = \lim_{x\to 1^-} x^2 + b = \lim_{x\to 1^+} ax \Leftrightarrow a = 1 + b = a \Leftrightarrow b = a - 1$

(ii) $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+b-a}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^2+(a-1)-a}{x-1}$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{ax-a}{x-1} = a\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = a$$

Agar $f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 2$.

Sehingga agar $f$ diferensiabel di $x$=1, maka $a = 2$ dan $b = 1$.

## 4.2 Aturan Pencarian Turunan

- **Fungsi Turunan Pertama**

**Definisi 4.3** Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada selang I. Fungsi turunan pertama dari $f$, ditulis $f'(x)$, didefinisikan sebagai

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}, \quad \forall x \in I$$

atau jika $h=t-x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \forall x \in I$$

bila limitnya ada.

Notasi lain adalah : $y', \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df(x)}{dx}, D_x y, D_x f(x)$, bentuk $\dfrac{dy}{dx}$ dikenal sebagai **notasi Leibniz**.

Dengan menggunakan definisi diatas dapat diturunkan **aturan untuk mencari turunan** sebagai berikut :

1. Jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0$.
2. $\dfrac{d(x^r)}{dx} = r x^{r-1}$ ; $x > 0$, $r \in R$
3. $\dfrac{d(f(x)+g(x))}{dx} = f'(x) + g'(x)$
4. $\dfrac{d(f(x)g(x))}{dx} = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
5. $\dfrac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x) g'(x)}{g^2(x)}$, dengan $g(x) \neq 0$.

**Contoh 4.5** Tentukan fungsi turunan pertama dari $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+1}$

**Jawab :** $f'(x)=\dfrac{1.(x^2+1)-2x(x+3)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^2+1-6x-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2}.$

## 4.3 Turunan Fungsi Sinus dan Cosinus

Turunan dari fungsi sinus dapat diperoleh dari definisi 4.3, yaitu :

$f(x)=\sin x \rightarrow f'(x)=\cos x$

$f(x)=\cos x \rightarrow f'(x)=-\sin x$

**Bukti :** Misal $f(x) = \sin x$

Maka ,

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{\sin t-\sin x}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{2\cos\left(\frac{t+x}{2}\right)\sin\left(\frac{t-x}{2}\right)}{t-x}=\lim_{t\to x}\cos(\frac{t+x}{2}).\lim_{\frac{t-x}{2}\to 0}\frac{\sin(\frac{t-x}{2})}{(\frac{t-x}{2})}$$

$$=\cos x.1=\cos x.$$

Dengan cara yang sama didapatkan $D_x\,(\cos x) = -\sin x$.

Untuk turunan fungsi trrigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan :

1. $\dfrac{d(\tan x)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx}=\sec^2 x$

2. $\dfrac{d(\cot x)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx}=-\csc^2 x$

3. $\dfrac{d(\sec x)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx}=\sec x\tan x$

4. $\dfrac{d(\csc x)}{dx}=\dfrac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx}=-\csc x\cot x$

**Contoh 4.6** Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = x^2 \sin x$

**Jawab :** $f'(x) = 2x\sin x + x^2 \cos x = x(2\sin x + x\cos x).$

**Contoh 4.7** Tentukan $f'(x)$ dari $f(x) = \tan x - \sec x$

**Jawab :** $f'(x) = \sec^2 x - \sec x \tan x = \sec x(\sec x - \tan x)$

## 4.4 Aturan Rantai

Andaikan $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ menentukan fungsi komposisi $y = (f \circ g)(x)$. Jika $g$ difrensiabel di $x$ dan $f$ diferensiabel di $u=g(x)$, maka $f \circ g$ diferensiabel di $x$ dan

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

yakni, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

Jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$ maka : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}$

Metoda penurunan di atas dikenal dengan **aturan rantai.**

**Contoh 4.8** Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari $y = Sin^4(x^3 + 5)$

**Jawab :** Misal $v = x^3 + 5$ maka $\dfrac{dv}{dx} = 3x^2$

$u = Sin\, v$ maka $\dfrac{du}{dv} = \cos v = \cos(x^3 + 5)$

$y = u^4$ maka $\dfrac{dy}{du} = 4u^3 = 4Sin^3(x^3 + 5)$

Sehingga $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}.\dfrac{du}{dv}.\dfrac{dv}{dx} = 12x^2\, Sin^3(x^3 + 5)Cos(x^3 + 5)$ .

**Contoh 4.9** Tentukan $f'(x^2)$ *jika* $\dfrac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1$

**Jawab :** $\dfrac{d}{dx}(f(x^2)) = x^2 + 1 \Leftrightarrow f'(x^2).2x = x^2 - 1$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{x^2 + 1}{2x}$$

## 4.5 Turunan Tingkat Tinggi

Turunan kedua dari fungsi $f(x)$ didapatkan dengan menurunkan sekali lagi turunan pertama, $f'(x)$ . Demikian seterusnya untuk turunan ke-$n$ didapatkan dari penurunan turunan ke-$(n-1)$.

Turunan pertama $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$

Turunan kedua $f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$

Turunan ketiga $f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3}$

Turunan ke-n $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = D_x^n y = y^{(n)}(x)$

## 4.6 Turunan Fungsi Implisit

Jika hubungan antara y dan x dapat dituliskan dalam bentuk $y = f(x)$ , maka fungsi ini disebut dengan **fungsi eksplisit** yaitu antara peubah bebas dan tak bebasnya dituliskan dalam ruas yang berbeda. Bila tidak demikian maka dikatakan $y$ **fungsi implisit dari** $x$. Untuk menentukan $y'$ dari bentuk implisit digunakan aturan rantai dan anggap $y$ fungsi dari $x$.

Secara ringkas dapat ditulis sebagai berikut :

Misalkan $F(x,y) = G(x,y)$ , memuat $y = y(x)$

⇓ gunakan aturan rantai

$$\frac{d}{dx}(F(x,y)) = \frac{d}{dx}(G(x,y))$$

⇓

$$y' = f(x,y)$$

**Contoh 4.10** Tentukan $y'$ dari bentuk implisit $Sin(xy) = x^2 + 1$

**Jawab:** $D_x(Sinxy) = D_x(x^2 + 1)$

$Cos(xy)\, D_x(xy) = 2x$

$$Cos(xy)\,(y + x\,y') = 2x$$

$$y' = \frac{2x - yCos(xy)}{xCos(xy)}.$$

**Contoh 4.11** Tentukan $y'$ dari $x^2y = 2y - xy^2$

**Jawab :** $\frac{d}{dx}(x^2y) = \frac{d}{dx}(2y - xy^2)$

$$2xy + x^2y' = 2y' - y^2 - 2xyy'$$

$$(x^2 + 2xy - 2)y' = -(y^2 + 2xy) \Rightarrow y' = -\frac{y^2 + 2xy}{x^2 + 2xy - 2}.$$

## 4.7 Garis Singgung dan Garis Normal

Persamaan garis singgung fungsi $y = f(x)$ di titik $(x_0, y_0)$ dengan kemiringan $m$ adalah

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Garis yang tegak lurus dengan garis singgung disebut dengan garis normal.

Persamaan garis normal di titik $(x_0, y_0)$ adalah :

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0).$$

**Contoh 4.12** Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal fungsi

$y = x^3 - 2x^2 + 6$ di titik (2,4).

**Jawab :** $y' = 3x^2 - 4x \rightarrow y'(2,4) = 3.2^2 - 4.2 = 4$

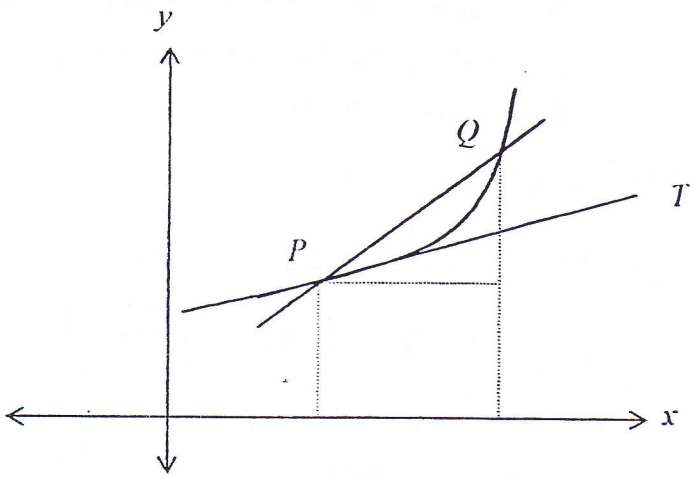
- Persamaan garis singgung adalah : $y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$
- Persamaan garis normal adalah : $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}.$$

## 4.8 Diferensiai dan Hampiran

### 4.8.1 Diferensial

Misalkan $y = f(x)$. Jika $f'(x)$ ada, maka $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



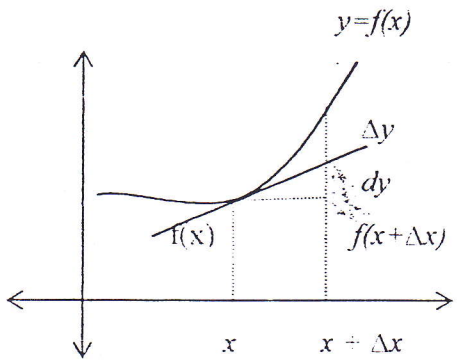

$PQ$ adalah tali busur dengan gradien $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. $PT$ adalah garis singgung $y = f(x)$ di $P$ dengan gradien $m = f'(x)$ . Untuk suatu nilai $\Delta x$ yang sangat kecil, gradien tali busur dan gradien garis singgung di $P$ hampir sama. Jadi , $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$ , $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$.

**Definisi 4.4** Jika $y = f(x)$ diferensiabel di $x$, maka

- Diferensial dari $x$ , dinyatakan dengan $dx$, adalah $dx = \Delta x$
- Diferensial dari $y$ , dinyatakan dengan $dy$, adalah $dy = f'(x)dx$

Dari definisi ini kita dapatkan bahwa $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, yang berarti $f'(x)$ bermakna ganda, yakni sebagai turunan dari $y$ terhadap $x$ dan hasil bagi diferensial $y$ terhadap diferensial $x$ ( hasil bagi dari $dy$ terhadap $dx$) .

### 4.8.2 Hampiran dengan diferensial



Misalkan $y = f(x)$ diferensiabel di interval I yang memuat $x$ dan $x+\Delta x$. Jika $x$ ditambah $\Delta x$, maka $y$ bertambah sepadan dengan $\Delta y$ yang dapat dihampiri oleh $dy$.

Jadi, $f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)\Delta x$

**Contoh 4.13** Hampiri $\sqrt[3]{28}$

**Jawab :** Pandang $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(27) = 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}(3^3)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{27}$$

Karena $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$, maka

$f(28) \approx f(27) + f'(27)(28-27)$

atau $\sqrt[3]{28} \approx 3 + \frac{1}{27}(1) = 3\frac{1}{27}$.

**Soal latihan 4**

A Untuk nomor 1 sampai dengan 10 , tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

1. $y = \frac{-12}{2x^6}$
2. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
3. $y = x(x^2 + 1)$
4. $y = \left(x^4 + 2x\right)\left(x^3 + 2x^2 + 1\right)$
5. $y = \frac{1}{3x^2 + 9}$
6. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$
7. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$
8. $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$
9. $y = \frac{\cos x}{x}$
10. $y = \frac{\tan x}{\sin x - \cos x}$
11. $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

Untuk nomor 11 sampai 13, tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi berikut diferensiabel di nilai yang diberikan.

11. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ;0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ;x \ge 1 \end{cases}$ $;x = 1$

12. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ;x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ;x \ge 2 \end{cases}$ $;x = 2$

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ;x < 3 \\ 2ax + b & ;x \ge 3 \end{cases}$ $;x = 3$

14. Tentukan persamaan garis singgung dan garis normal dari fungsi berikut di titik yang diberikan

a. $y = x^2 - 2x$ di ( 0,0 )

b. $y = \tan x$ di $x = \frac{1}{4}\pi$

15. Tentukan fungsi turunan pertama dari

a. $y = (2x-3)^{10}$

b. $y = \sin^3 x$

c. $y = \cos\left(4x^2 - x\right)$

d. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

e. $y = \sin x \ \tan [x^2 + 1]$

16. Hitung $f'(3)$ bila $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)^2$

17. Hitung $g'(1/2)$ bila $g(t) = \cos \pi t \ \sin^2 \pi t$

18. Tentukan $(fog)'(-1)$ bila $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$ dan $g(x) = x^2 - 4x$

19. Tentukan persamaan garis singgung dan normal kurva $y = \left(x^2+1\right)^3\left(x^4+1\right)^2$ di titik dengan absis $x = 1$.

**B.**

(Untuk soal 1 s/d 4) Tentukan turunan kedua dari

1. $y = \sin(2x-1)$
2. $y = (2x-3)^4$
3. $y = \dfrac{x}{x+1}$
4. $y = \cos^2(\pi x)$
5. Tentukan nilai $c$ dari $f''(c) = 0$ bila $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x - 6$
6. Tentukan nilai $a$, $b$ dan $c$ dari $g(x) = ax^2 + bx + c$ bila $g(1) = 5$, $g'(1) = 3$ dan $g''(1) = -4$.

7. Dua buah partikel bergerak sepanjang garis koordinat. Pada saat waktu $t$ jarak berarah dari titik pusat diberikan dengan $s_1$ dan $s_2$. Bilamana kedua partikel mempunyai kecepatan sama bila :

   a. $s_1 = 4t - 3t^2$ dan $s_2 = t^2 - 2t$

   b. $s_1 = 3t^3 - 3t^2 + 18t - 5$ dan $s_2 = -t^3 - 9t^2 - 12t$

8. Tentukan turunan pertama ( $y'$ ) dari bentuk implisit

   a. $x^2 - y^2 = 1$

   b. $2xy + 3x - 2y = 1$

   c. $y + \sin(xy) = 1$

   d. $x^3 - 3x^2y + y^2 = 0$

   e. $\tan(xy) - 2y = 0$

9. Diketahui kurva yang dinyatakan secara implisit : $x^2 + xy - y^2 - 3y = 10$. Tentukan

   a. Turunan pertama di $x = 2$

   b. Persamaan garis singgung dan normal di $x = 2$

10. Gunakan diferensial untuk memperkirakan

    a. $\sqrt{8,2}$ b. $\sqrt{36,1}$

11. Periksa apakah fungsi berikut diferensiabel di titik yang diberikan dan gambarkan grafiknya

    a. $f(x) = \begin{cases} x^2, x \le 1 \\ 2x - 3, x > 1 \end{cases}$ ; $x = 1$

    b. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, x < 0 \\ \sin x + 1, x \ge 0 \end{cases}$ ; $x = 0$

12. Tentukan $\frac{d}{dx}(x^2 g(x^2))$

13. Jika diketahui $f'(0) = 2$, $g(0) = 0$, $g'(0) = 3$, tentukan $(f \circ g)'(0)$.

14. Andaikan $f(5)=1$, $f'(5)=6$, $g(5)=-3$, $g'(5)=2$. Tentukan

a. $(fg)'(5)$ b. $\left(\frac{f}{g}\right)'(5)$ c. $\left(\frac{g}{f}\right)'(5)$

15. Jika $f(3)=4$, $g(3)=2$, $f'(3)=-6$, $g'(3)=5$. Tentukan

a. $(f+g)'(3)$ b. $(fg)'(3)$ c. $\left(\frac{f}{f-g}\right)'(3)$.

16. Jika $f(x)=\sqrt{x}g(x)$ dengan $g(4)=8$, $g'(4)=7$, cari $f'(4)$.