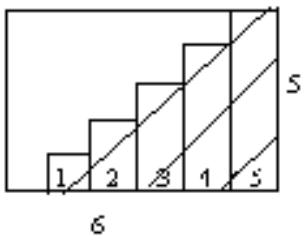
BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Latar Belakang Historis

Fondasi dari integral pertama kali dideklarasikan oleh Cavalieri, seorang ahli matematika berkebangsaan Italia pada tahun 1635. Cavalieri menemukan bahwa sebuah kurva dapat disketsa dengan sebuah titik bergerak dan daerah disketsa oleh sebuah garis bergerak. Untuk itu, Cavalieri menggunakan cara yang dinamakannya "*indivisibles*" (tak dapat dibagi), yaitu jika satu titik dapat mensketsa sebuah kurva maka Cavalieri menampilkan kurva tersebut sebagai gabungan dari titik-titiknya. Dengan cara ini, setiap kurva dibentuk oleh titik dengan jumlah yang tak terbatas. Hal itu juga berarti bahwa daerah merupakan gabungan dari garis dengan jumlah yang tak terbatas. Sebagai contoh, misalkan kita ingin mencari daerah dari sebuah segitiga.



Gambar 2.1 Luas Daerah Segitiga

Berdasarkan gambar di atas, persegi panjang mempunyai panjang 6 satuan dan tinggi 5 satuan. Jadi total daerah adalah 30 satuan). Total daerah persegi panjang kecil dapat dihitung dengan cara menjumlahkan semua persegi panjang kecil tersebut. Perbandingan dari kedua daerah adalah sebagai berikut,

$$\frac{Area\ of\ shaded\ region}{Area\ of\ entire\ rectangle} = \frac{0+1+2+3+4+5}{5*6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Menggunakan metoda yang sama, rasio untuk persegi panjang yang lebih besar dengan jumlah persegi panjang kecil juga semakin banyak yaitu,

$$\frac{Area\ of\ shaded\ region}{Area\ of\ entire\ rectangle} = \frac{0+1+2+3+\cdots+10}{10*11} = \frac{55}{110} = \frac{1}{2}$$

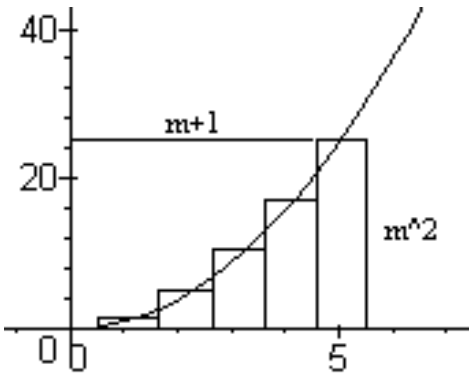
Total daerah persegi panjang kecil selalu merupakan setengah bagian dari total daerah persegi panjang seperti ditunjukkan bentuk formal matematika berikut ini,

$$\sum_{i=0}^{n} i = 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dengan cara yang sama didapat,

$$\frac{Area\ of\ shaded\ region}{Area\ of\ entire\ rectangle} = \frac{\sum_{i=0}^{n} i}{n(n+1)} = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

Metoda Cavalieri dapat diterapkan untuk mencari daerah di bawah sebuah kurva yang lebih rumit daripada garis. Sebagai contoh, diambil kurva parabola $y = x^2$.



Gambar 2.2 Luas Daerah di Bawah Kurva

Setiap persegi panjang memiliki panjang alas 1 satuan sepanjang sumbu x dan tinggi x^2. Jumlah dari persegi panjang didefinisikan dengan variabel m. Cavalieri mencoba untuk mengekspresikan daerah di bawah kurva sebagai rasio dari daerah yang telah diketahui. Rasio tersebut dapat dinyatakan seperti berikut,

$$\frac{Total\ area\ of\ m\ rectangles}{Area\ of\ bounding\ rectangle} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + m^2}{(m+1)m^2}$$

Dengan mensubstitusikan beberapa nilai m, Cavalieri mendapatkan bahwa rasio tersebut dapat dinyatakan dengan rumusan berikut ini,

$$\frac{Total\ area\ of\ m\ rectangles}{Area\ of\ bounding\ rectangle} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6m}$$

Kemudian Cavalieri mendapati bahwa semakin besar harga m, bentuk 1/6m akan memiliki pengaruh yang semakin kecil pula kepada hasil yang didapatkan. Dalam bentuk modern, dia mendapati bahwa,

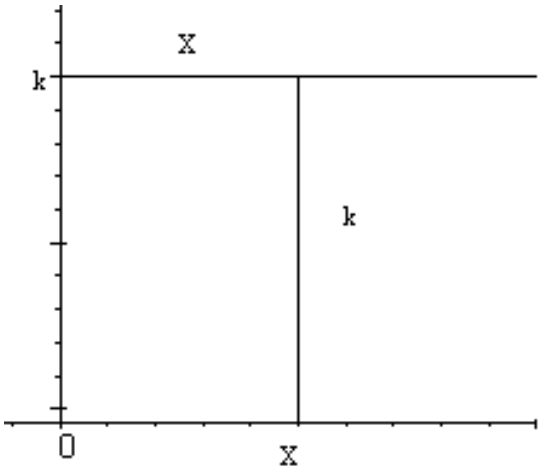
$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6m} \right) = \frac{1}{3}$$

Hal yang didapatkannya tersebut berarti bahwa semakin banyak jumlah persegi panjang maka rasio dari daerahnya akan mendekati $^1/_3$. Setelah itu, ia menggunakan ekspresi aljabar untuk daerah di bawah parabola. Untuk semua nilai x sepanjang sumbu x, tinggi dari parabola tersebut sebesar x^2. Oleh karena itu, luas daerah tersebut ada sama dengan $x.x^2$ atau x^3. Dengan menggabungkan hasil terdahulu yang didapatkan tadi, luas daerah di bawah parabola adalah sama dengan $^1/_3$ kali persegi panjang besar. Atau dengan perkataan lain,

$$Area\ under\ x^3 = \frac{1}{3}x^3$$

Metoda Cavalieri ini merupakan suatu perkembangan penting dan cukup besar dalam rangka menuju formasi dari kalkulus integral. Walaupun demikian, Cavalieri tidak mampu memformulasikan tekniknya ke dalam fondasi logik yang konsisten yang mampu diterima oleh orang lain. Sir John Wallis yang berkebangsaan Inggris memperkenalkan limit pada tahun 1656 sehingga fondasi untuk kalkulus integral mulai kokoh. Untuk memahami metoda yang digunakan oleh Wallis perhatikan contoh berikut ini,

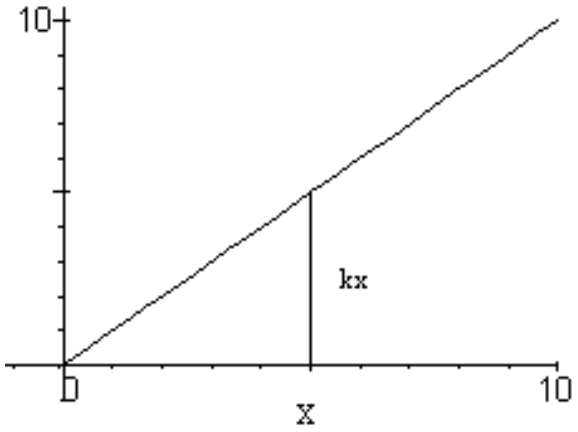
Misalkan diketahui suatu persamaan garis y = k.



Gambar 2.3 Luas Daerah di Bawah Garis Horizontal

Dapat dilihat dengan jelas bahwa luas daerah di bawah garis adalah sebesar kx.

Contoh lainnya, misalkan y = kx



Gambar 2.4 Luas Daerah di Bawah Garis Miring

Maka luas daerah di bawah garis adalah sebesar ½ kx^2. Seperti yang telah ditunjukkan sebelumnya bahwa jika $y = kx^2$ maka luasnya adalah $^1/_3$ kx^3. Wallis mendapat relasi aljabar antara fungsi dan daerah di bawah fungsinya, yaitu fungsi daerah $y = kx^n$ memiliki luas sebesar,

$$A = \frac{1}{n+1} kx^{n+1}$$

2.2 Penerapan Kalkulus

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, yang dicapai pada saat ini, terutama kemajuan pada abad-abad terakhir, pada dasarnya tidak lepas merupakan akibat dari kemajuan matematika sebagai alat bantu yang sangat penting. Berbagai cabang matematika seperti Kalkulus Diferensial, ataupun Integral adalah merupakan senjata yang tepat dan sangat ampuh untuk menggarap berbagai problema yang timbul dalam fisika, kima, biologi dan berbagai cabang ilmu yang lain baik eksak maupun yang non-eksak.

Dengan kecepatan berapakah sebuah roket harus ditembakkan ke atas agar ia tak pernah lagi kembali ke bumi, dan berapa kecepatan mengorbitkan Appolo agar pada saat yang tepat ia dapat mendarat di Bulan. Jika suatu bakteri berkembang biak dengan kecepatan yang sebanding dengan banyaknya bakteri pada suatu saat dan jika populasinya menjadi dua kali dalam satu jam, berapa banyak bakteri yang berkembang selama dua jam. Dan jika sebuah gaya sebesar 10 Newton meregangkan suatu benang plastik sepanjang satu centimeter, berapakah gaya yang dibutuhkan untuk meregangkan benang tersebut sampai 10 centimeter.

Contoh-contoh yang dikemukakan di atas, yang diambil dari berbagai bidang disiplin ilmu, menggambarkan berbagai persoalan yang dapat dijawab dengan matematika, terutama kalkulus. Jadi kalkulus lebih dari suatu alat teknik, bahkan ia merupakan suatu sumber gagasan-gagasan yang memikat dan mengagumkan yang telah menarik perhatian dari berbagai ahli pikir selama berabad-abad. Para ahli pikir harus bekerja dengan gagasan-gagasan mengenai kecepatan, luas, isi kecepatan tumbuh kekontinuan, garis singgung serta konsep-konsep yang lain dari berbagai bidang. Kalkulus memaksa kita untuk berhenti dan berpikir dengan baik tentang arti dari konsep-konsep ini. Suatu aspek lain yang menarik perhatian dari subjek ini adalah kekuatan mempersatukannya. Gagasan-gagasan di atas dirumuskan dalam suatu bentuk perumusan yang khusus yang disertai dengan pemecahan masalahnya.

Kalkulus harus bekerja dengan perumusan yang tepat dan jawaban dari persoalan yang khusus dalam kalkulus. Untuk ini kita bisa bekerja denga ndua konsep, yakni Kalkulus Integral dan Kalkulus Diferensial.

Kalkulus Integral bekerja dengan persoalan luas dan volume sementara kalkulus diferensial banyak berbicara dengan garis singgung.

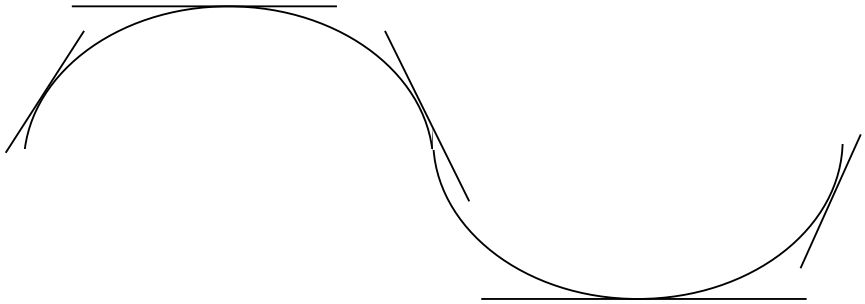
2.3 Diferensial (Turunan)

Newton dan Leibniz secara terpisah satu dengan yang lain mengembangkan ide mengenai kalkulus integral sampai pada suatu keadaan dimana sebelumnya persoalan tersebut hanya dipecahkan dengan metoda-metoda biasa saja. Karya-karya mereka terutama mengenai fakta bahwa mereka mampu menggabungkan kalkulus integral dengan konsep kalkulus yang lain, yakni kalkulus diferensial.

Ide pokok dari kalkulus diferensial adalah pengertian turunan (*derivative*). Seperti halnya integral, turunan berasal dari suatu problema dalam geometri, yakni persoalan mencari garis singgung di suatu titik pada suatu kurva. Tetapi agak berbeda dengan integral, turunan berkembang sangat terlambat dalam sejarah matematika. Pada permulaan abad ke-17, ketika seorang ahli matematika Perancis bernama Pierre de Fermat mencoba menentukan maksimum dan minimum beberapa fungsi khusus, konsep turunan belumlah dirumuskan.

Fermat memberikan ide yang sangat sederhana, yakni berprinsip pada mencari garis singgung pada suatu kurva. Misalkan suatu kurva pada gambar

berikut, diandaikan bahwa setiap titik dari kurva mempunyai arah tertentu yang ditunjukkan oleh garis-garis singgung yang mempunyai arah tertentu.



Gambar 2.5 Jenis – Jenis Garis Singgung pada Kurva

Fermat memperhatikan bahwa titik-titik tertentu pada kurva mempunyai suatu maksimum atau suatu minimum, seperti yang dilukiskan pada gambar dengan absis x_0 dan x_1, garis singgung haruslah horizontal. Jadi persoalan mencari harga ekstrim ini tergantung pada jawaban persoalan yang lain yakni mencari garis singgung yang horizontal.

Hal ini menimbulkan ide yang lebih luas, yakni menentukan arah dari garis singgung-garis singgung di suatu titik yang sembarang pada kurva. Ini adalah suatu usaha untuk memecahkan persoalan umum yang menjadi dasar dari pengertian turunan. Sepintas lalu tampaknya tidak ada hubungan sama sekali antara pesoalan mencari luas daerah yang berada di bawah suatu kurva dengan persoalan mencari garis singgung di suatu titik pada kurva. Orang pertama yang mengetahui hubungan kedua persoalan ini adalah Isaac Barrow (1630 – 1677), bekas guru dari Newton. Tapi bagaimanapun peranan Newton dan Leibniz-lah yang menentukan bagaimana pentingnya masalah tersebut, yang dapat membuka suatu era baru dalam perkembangan matematika.

Turunan mula-mula memang hanya ditujukan untuk mencari garis singgung suatu kurva, tetapi ternyata kemudian sangat berguna untuk menyelesaikan problema-problema yang ada hubungannya dengan kecepatan, atau secara lebih umum kecepatan perubahan suatu fungsi. Banyak persoalan-persoalan fisika maupun bidang lain yang akhirnya menggunakan konsep turunan untuk menyelesaikan masalahnya.

Bila kita melihat keadaan di sekeliling kita, maka akan banyak melihat adanya perubahan-perubahan misalnya,

a. Banyaknya kelahiran per tahun.
b. Perubahan keadaan lingkungan.
c. Perubahan jumlah penduduk.

Untuk mengetahui suatu sistem yang sedang berubah, di samping memperhatikan faktor-faktor yang ada (yang dianggap penting) dalam sistem tersebut perlu diperhatikan pula pengaruh dari suatu perubahan suatu faktor pada faktor yang lain. Selain itu, juga harus diperhatikan cepat dan lambatnya perubahan dari suatu faktor, sebagai akibat dari perubahan pada faktor lain. Dalam persoalan inilah konsep turunan memegang peranan yang sangat penting. Untuk lebih jelasnya ikuti contoh berikut ini,

a. Misalkan batang besi dipanaskan, maka akan bertambah panjang. Dalam contoh ini kita dapat mengatakan mengenai perubahan panjang dalam suatu selang suhu tertentu atau mungkin juga mengenai lajunya perubahan panjang pada suhu tersebut.

b. Mengenai hukum gravitasi Newton, kita mengetahui bahwa gaya tarik antara dua benda, berbanding terbalik dengan kuadrat jarak kedua benda tersebut. Dalam hal ini perubahan jarak mengakibatkan besarnya perubahan gaya tarik.

2.3.1 Diferensial dari Fungsi

Diferensial dari fungsi f sering dilambangkan dengan simbol f' yang nilainya pada sebarang bilangan c dapat dicari dengan persamaan berikut,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Suatu fungsi dikatakan dapat dideferensialkan apabila fungsi itu dapat didiferensialkan di setiap titik pada wilayah domainnya. Diferensial dari beberapa fungsi dasar matematika dapat dilihat pada penjabaran berikut ini,

a. $y = x^n$ → $y' = n \cdot x^{n-1}$

b. $y = u^n$,dimana $u = f(x)$ → $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

c. $y = u \cdot v$ → $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

d. $y = u / v$ → $y' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2$

e. $y = e^x$ → $y' = e^x$

f. $y = e^{f(x)}$ → $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

g. $y = \ln x$ → $y' = 1 / x$

h. $y = \ln f(x)$ → $y' = 1 / f(x) \cdot f'(x)$

2.3.2 Penerapan Diferensial

Diferensial dapat diterapkan untuk menyelesaikan beberapa persoalan yang sering dihadapi dalam kehidupan sehari-hari antara lain,

1. Masalah garis singgung pada kurva.

Garis singgung pada suatu titik pada kurva dapat dicari dengan terlebih dahulu mencari tanjakan (gradien) garis di titik tersebut. Gradien garis singgung pada kurva dapat dicari dengan terlebih dahulu mencari persamaan gradien dengan mendiferensialkan fungsi kurva tersebut, kemudian substitusikan nilai koordinat absis (sumbu x) pada titik tersebut ke dalam persamaan gradien tersebut sehingga didapat nilai gradien garis. Secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut,



$$m(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Titik (x1,y1) → m(x1) = f'(x1).

2. Masalah perubahan kecepatan.

Kegunaan turunan lainnya adalah untuk menerangkan kecepatan perubahan. Dalam hal ini ditinjau dari segi luas, perubahan yang dimaksud dapat menyangkut beberapa hal. Misalnya dalam mekanika, perubahan tersebut bisa menyangkut perpindahan, kecepatan ataupun percepatan. Misalkan ditinjau suatu partikel yang bergerak sepanjang kurva atau garis lurus. Untuk mendapat

gambaran lengkap mengenai gerak partikel tersebut diciptakan besaran-besaran seperti kecepatan rata-rata, kecepatan sesaat, percepatan dan besaran lainnya.

Anggap suatu partikel bergerak sepanjang garis lurus. Gerak yang demikian disebut gerak lurus. Misalkan partikel tersebut bergerak dari kiri ke kanan. Misalkan s merupakan jarak dari titik tersebut dari titik semula pada saat t. s, sebagai fungsi dari t dapat dituliskan sebagai,

$$\boxed{s = f(t)}$$

adalah menyatakan jarak titik 0 (titik asal mula partikel bergerak) ke titik setelah bergerak selama t. Persamaan s = f(t) dikatakan persamaan dari partikel. Untuk lebih jelasnya diambil contoh berikut,

$$s = t^2 + 2t - 3,\ t = 0$$

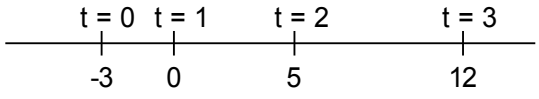
Hal ini berarti,

t = 0 → s = -3, partikel berada di 3 satuan panjang sebelah kiri dari titik 0.

t = 1 → s = 0, partikel tepat berada di titik 0.

t = 2 → s = 5, partikel berada di 5 satuan panjang sebelah kanan 0.

Kalau digambarkan pada grafik lintasan maka didapat gambar sebagai berikut,



Gambar 2.6 Grafik Lintasan

Pada interval t = 1 dan t = 2 perubahan jaraknya adalah 5 – 0 = 5, sehingga kecepatan rata-ratanya adalah 5/(2 – 1) = 5 satuan panjang / satuan waktu. Sedangkan kecepatan rata-rata dalam interval t = 0 sampai t = 2 sebesar : (5 –(-3)) / (2 – 0) = 4 satuan panjang / satuan waktu. Ternyata kecepatan rata-rata akan

selalu berubah untuk waktu yang berlainan. Kecepatan partikel yang bergerak dengan persamaan gerak s = f(t) dalam interval waktu t1, t2 diberikan oleh rumus,



$$v(t1, t2) = \frac{f(t2) - f(t1)}{t2 - t1}$$

Dalam kenyataannya, kecepatan rata-rata tidak pernah tetap besarnya, sebagai contoh seseorang mengendarai sepeda motor sepanjang 70 km dalam waktu 2 jam, maka kecepatan rata-rata dalam interval ini adalah 70/2 = 35 km/jam. Dalam kenyataannya, orang tersebut akan mengendarainya dalam berbagai kecepatan yang berbeda setiap saat.

Artinya setiap saat kecepatan berubah, dan kita dapat menerangkan gerak partikel apabila dapat mencari kecepatan yang berubah setiap saat itu. Untuk itu, diperkenalkan konsep kecepatan sesaat, yakni kecepatan partikel pada waktu tertentu. Ini didapat dengan mengamati kecepatan rata-rata pada suatu interval waktu tertentu dimana interval waktu dibuat sekecil mungkin. Misalkan pada contoh di atas, kita buat interval waktu [t1, t2] sekecil mungkin atau untuk t2 → t1 atau (t2 – t1) → 0. Maka didapat persamaan matematika berikut,



$$v(t1) = \lim_{t2 \to t1} \frac{f(t2) - f(t1)}{t2 - t1}$$

Misalkan (t2 – t1) = Δt, maka untuk t2 → t1 didapat Δt → 0, sehingga kecepatan sesaat dapat ditulis sebagai,



$$v(t1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t1 + \Delta t) - f(t1)}{\Delta t}$$

Kecepatan sesaat bisa positif, bisa negatif, tergantung pada arah gerak partikel. Arah ke kanan dianggap positif dan ke kiri negatif. Besarnya kecepatan sesaat, disebut besaran kecepatan atau laju partikel, adalah nilai mutlak kecepatan pada suatu saat.

2.4 Integral (Anti Turunan)

Jika saya mengenakan sepatu saya, saya dapat melepasnya lagi. Operasi yang kedua menghapuskan yang pertama, mengembalikan sepatu pada posisinya yang semula. Kita katakan dua operasi tersebut adalah operasi balikan (inversi). Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan seperti penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar, serta penarikan logaritma dan penghitungan logaritma. Kebalikan dari pendiferensialan (penurunan) yaitu anti pendiferensialan (anti turunan) yang diberi nama integral.

Secara garis besar, integral terdiri dari dua macam, yaitu integral tak tentu dan integral tentu.

2.4.1 Integral Tak Tentu

Misalkan kita harus menentukan suatu lengkungan yang garis singgungnya pada tiap titik (x,y) pada lengkungan tersebut, memiliki koefisien gradien $3x^2$. Maka untuk langkah pertama kita cari y = f(x) sedemikian rupa sehingga turunannya,

$$D_x y = 3x^2$$

Kita tahu bahwa $3x^2$ adalah hasil penurunan dari x^3, maka dapat disimpulkan bahwa

$$y = x^3$$

merupakan persamaan lengkungan yang garis singgungnya di tiap titik pada lengkungan mempunyai gradien $3x^2$.

Sehingga didapat bahwa anti turunan dari suatu fungsi f adalah suatu fungsi sembarang F yang turunannya F' adalah sama dengan f. Jadi,

$$F' = f$$

Kita melihat bahwa proses pencarian turunan fungsi dengan proses pencarian anti turunannya merupakan dua proses yang berlawanan (berkebalikan). Jika tiap fungsi memiliki satu turunan, maka ia mungkin mempunyai lebih dari satu anti turunan. Istilah lain untuk anti turunan adalah primitif atau fungsi primitif atau disebut juga fungsi integral. Contohnya,

1. Fungsi $F(x) = x^3$ adalah anti turunan dari $f(x) = 3x^2$, karena $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
2. Fungsi $F(x) = x^3 - 2$ dan fungsi $x^3 + 6$ juga merupakan anti turunan dari $f(x) = 3x^2$.

Jadi, jelas bahwa suatu fungsi turunan, mungkin memiliki lebih dari satu fungsi primitif atau anti turunan. Sehingga muncul dua dalil berikut ini,

1. Jika $H'(x) = 0$ untuk semua x dalam selang buka (a,b), maka $H(x) = C$ dalam selang tersebut, dimana C adalah konstanta sembarang.
2. Jika $H'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam selang buka (a,b) maka berlaku,

$$H(x) = G(x) + C$$

dimana, C adalah suatu konstanta sembarang.

Atau dengan perkataan lain dapat dinyatakan bahwa anti turunan dari f adalah $F(x) + C$ dimana F adalah anti turunan dari f dan C adalah suatu konstanta sembarang dan semua anti turunan dari f diperoleh dari $F(x) + C$ dengan merubah nilai dari C.

Pembentukan anti turunan adalah proses menentukan anti turunan yang paling umum untuk suatu fungsi yang diberikan. Untuk operasi pembentukan anti turunan digunakan operasi yang diberi notasi : "$\int$".

Integral tak tentu dari suatu fungsi f, ditunjukkan dengan,

$$\int f(x)\, dx$$

adalah merupakan anti turunan f yang paling umum yakni,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \text{ ; dimana C = konstanta sembarang.}$$

Jika dan hanya jika $f(x) = F'(x)$.

Ternyata proses pembentukan anti turunan suatu fungsi adalah merupakan proses pembentukan integral tak tentu dari fungsi tersebut. Karenanya operasi pembentukan integral tak tentu sering disebut dengan pengintegralan tak tentu atau pengintegralan.

Jika diketahui suatu persamaan berikut,

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Jika F(x) = x dalam persamaan di atas maka diperoleh,

$$\int dx = x + C$$

Jika C suatu konstanta maka berlaku,

$$\int c.f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

yakni anti turunan perkalian konstanta C dengan suatu fungsi adalah sama dengan perkalian konstanta C dengan anti turunan fungsi tersebut.

Dari persamaan $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ maka dengan menurunkan ruas kiri dan ruas kanannya didapatkan,

$$D_x \int f(x)\, dx = F'(x)$$

Tetapi karena F'(x) = f(x) maka diperoleh dalil berikut,

1. Turunan dari suatu anti turunan untuk suatu fungsi adalah fungsi itu sendiri.

$$D_x \int f(x)\, dx = x$$

2. Jika r adalah suatu bilangan rasional dan $r \neq -1$ maka,

$$\int x^r\, dx = \frac{1}{r+1}\, x^{r+1} + c$$

3. Anti turunan jumlah dua fungsi adalah jumlah anti turunan kedua fungsi tersebut.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

4. Aturan rantai untuk anti turunan.

   Jika suatu fungsi yang terdiferensialkan dan u = f(x) maka untuk n ≠ -1 berlaku,

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

   atau,

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

Rumus-rumus integrasi untuk fungsi trigonometri dapat dinyatakan sebagai berikut,

1. ∫ sin x dx = - cos x + c
2. ∫ cos x dx = sin x + c
3. ∫ tg x dx = -ln cos x + c = ln sec x + c
4. ∫ ctg x dx = ln sin x + c = -ln cosec x + c
5. ∫ sec x dx = ln |sec x + tg x| + c
6. ∫ cosec x dx = -ln |cosec x + ctg x| + c

Untuk fungsi ∫ f(x) dx dengan bentuk akar dapat diselesaikan dengan menerapkan rumus-rumus berikut ini,

a. Bila $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, maka misalkan x = a cos θ atau x = a sin θ
b. Bila $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, maka misalkan x = a tg θ atau x = a ctg θ
c. Bila $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, maka misalkan x = a sec θ atau x = a cosec θ

2.4.2 Integral Tentu

Konsep integral tentu merupakan inti hitung integral yang sangat luas sekali pemakaiannya. Berbagai bidang ilmu pengetahuan menggunakan konsep ini. Perhitungan luas suatu daerah, isi benda putar, penentuan titik berat suatu benda, menghitung momen inersia atau pengukuran luas permukaan bola (*speric*) menggunakan konsep integral tentu.

Suatu fungsi f dikatakan dapat diintegralkan dalam suatu selang tutup [a,b] jika integral tentu f dari a ke b ada (terdefinisi). Ungkapan dapat diintegralkan sering juga diartikan sama dengan memiliki integral atau terintegralkan atau integrabel. Berikut ini akan diberikan beberapa dalil dasar yang merupakan sifat dari integral tentu,

1. Jika f dan g adalah fungsi yang memiliki integral (integrabel) dalam selang tutup [a,b] maka,

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

2. Jika f fungsi yang integrabel pada selang tutup [a,b] dan k sebuah konstanta maka,

$$\int_a^b k\, f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

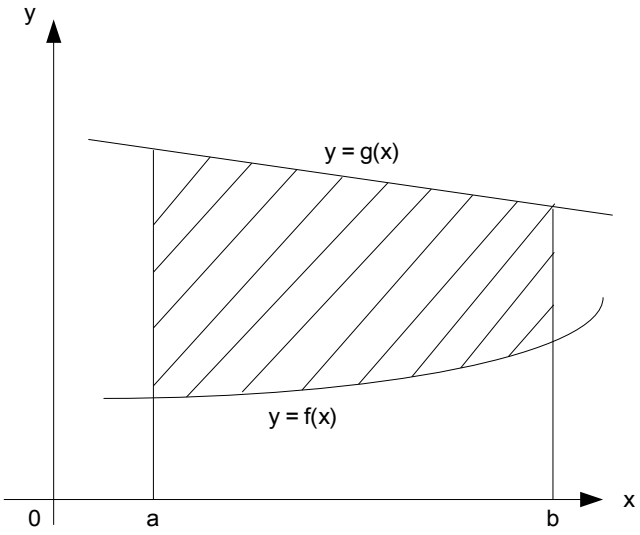
3. Jika f integrabel dalam selang tutup [a,b] dan f(x) ≥ 0 untuk a ≤ x ≤ b, maka,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

4. Jika f dan g adalah dua fungsi yang memiliki integral (integrabel) pada selang tutup [a,b] dan $0 \leq f(x) \leq g(x)$ untuk $a \leq x \leq b$, maka,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Jika suatu fungsi tidak negatif dalam suatu selang tutup, maka integral tentu fungsi itu untuk selang yang sama adalah tak negatif juga. Sifat perbandingan ini menunjukkan bahwa jika j untuk suatu selang tutup, fungsi f lebih kecil atau sama dengan g (dengan f dan g keduanya fungsi tak negatif), maka pada selang tutup yang sama, integral tentu f akan lebih kecil atau sama dengan integral tentu g. Secara geometri dapat dilihat pada gambar berikut, sebagai interpretasi dari dalil 4,



Gambar 2.7 Interpretasi Dalil 4

5. Jika f kontinu dalam selang tutup [a,b] [b,c] dan [a,c] maka,

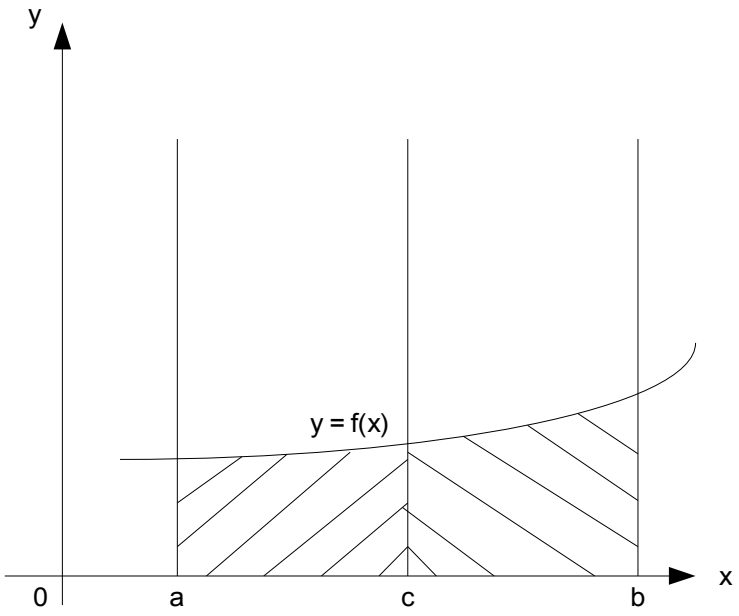
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

6. Jika f fungsi kontinu dalam sebuah selang tutup yang mengandung tiga bilangan a, b dan c maka,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

bagaimanapun letak (urutan) a, b dan c dalam garis bilangan.

Secara geometris, maka dapat digambarkan sebagai berikut,



Gambar 2.8 Interpretasi Dalil 6

$$\int_a^c f(x)dx = L1$$

$$\int_{c}^{b} f(x)dx = LII$$

$$L = LI + LII = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

7. Jika k suatu konstanta maka berlaku,

$$\int_{a}^{b} k\, d(x) = k(b-a)$$

8. Misalkan f fungsi kontinu dalam selang tutup [a,b]. Jika m adalah nilai minimum mutlak dari f di dalam [a,b] dan M nilai maksimum mutlak di dalam selang tutup [a,b] sehingga,

$$m \leq f(x) \leq M \text{ untuk } a \leq x \leq b$$

maka,

$$m(b-a) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq M(b-a)$$

9. Jika f adalah fungsi kontinu dalam selang tertutup [a,b] dan jika f(a) ≠ f(b) maka untuk tiap bilangan k antara f(a) dan f(b) ada sebuah bilangan c antara a dan b sehingga berlaku,

$$f(c) = k$$

10. Jika f fungsi kontinu dalam selang tutup [a,b] maka ada bilangan μ antara a dan b sehingga,

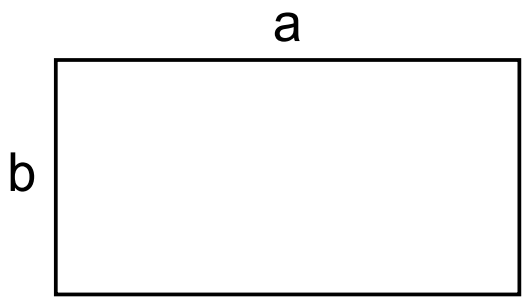
$$\int_{a}^{b} f(x)dx = f(\mu)(b-a)$$

atau dapat juga dinyatakan sebagai,

$$f(\mu) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

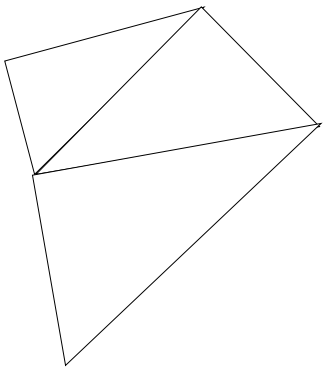
2.4.3 Taksiran Luas

Misalkan kita akan menentukan luas suatu daerah yang berbentuk empat persegi panjang dengan panjang dan lebar masing-masing a dan b. Maka kita akan dapat menghitung luas tersebut yang besarnya adalah a x b.



Gambar 2.9 Persegi panjang dengan panjang sisi a dan b

Sekarang kita akan menghitung suatu daerah yang berupa bangun yang terlihat seperti pada gambar 2.4.



Gambar 2.10 Gambar Poligon

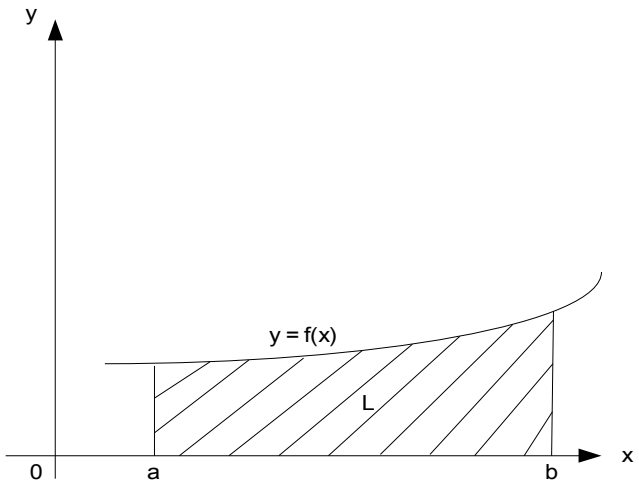
Kita belum mengetahui rumus dari bangun yang demikian. Tetapi bangun tersebut dapat kita bagi menjadi beberapa segitiga, dimana luas segitiga tersebut

akan dapat kita tentukan dengan rumus luas bangun datar segitiga dan dengan menjumlahkan semua luas segitiga yang ada, akan didapat luas dari bangun tersebut.

Tetapi, bagaimana bila batas dari daerah tersebut merupakan suatu lengkungan. Tentu saja tidak dapat dihitung dengan cara membagi daerah-daerah tersebut menjadi beberapa bentuk lain. Hal ini yang dapat diselesaikan dengan menggunakan konsep integral tentu.

Penerapan integral untuk menghitung luas daerah yang dibatasi oleh beberapa kurva dalam koordinat Cartesius dapat dilihat pada penjabaran berikut ini,

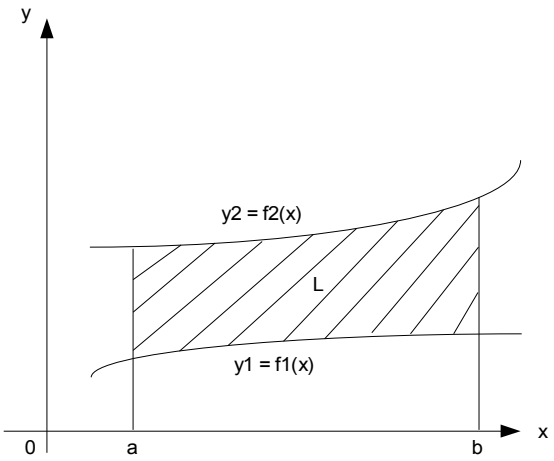
1. Luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva, batasan nilai a dan b pada sumbu x serta sumbu x.



Gambar 2.11 Luas daerah dibatasi oleh sebuah kurva pada sumbu x

$$L = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)dx$$

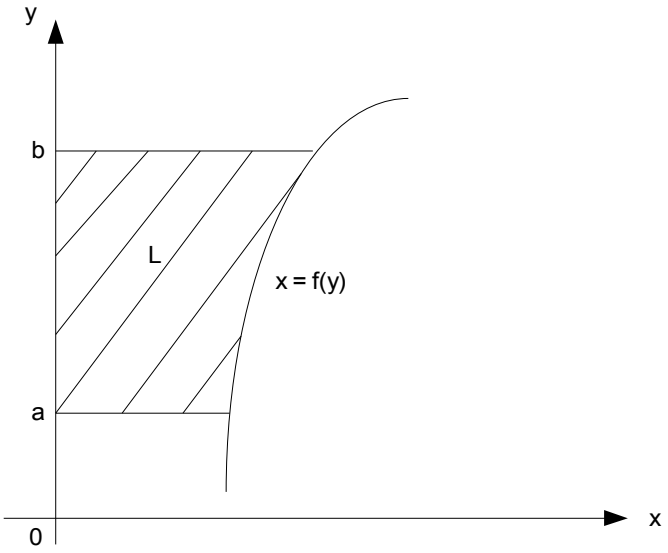
2. Luas daerah yang dibatasi oleh dua buah kurva serta batasan nilai a dan b pada sumbu x.



Gambar 2.12 Luas daerah dibatasi oleh dua buah kurva pada sumbu x

$$L = \int_a^b (y2 - y1)dx = \int_a^b [f2(x) - f1(x)]dx$$

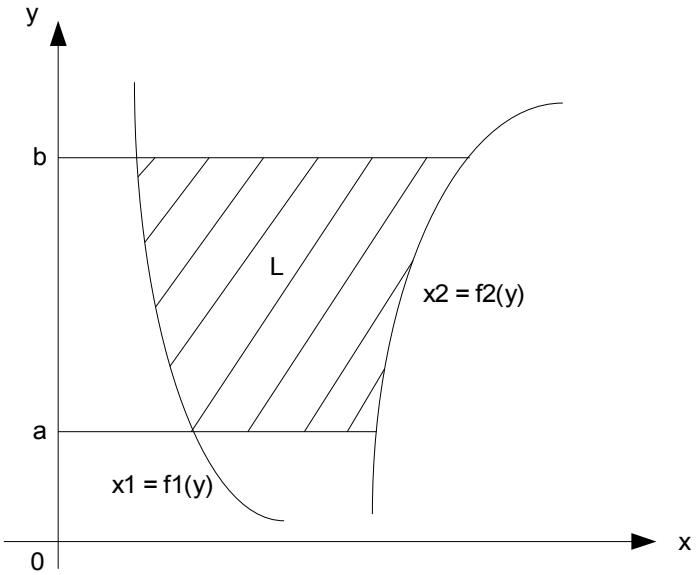
3. Luas daerah yang dibatasi oleh suatu kurva, batasan nilai a dan b pada sumbu y dan sumbu y.



Gambar 2.13 Luas daerah dibatasi oleh sebuah kurva pada sumbu y

$$L = \int_a^b x\, dy = \int_a^b f(y)dy$$

4. Luas daerah yang dibatasi oleh dua buah kurva serta batasan nilai a dan b pada sumbu y.



Gambar 2.14 Luas daerah dibatasi oleh dua buah kurva pada sumbu y

$$L = \int_a^b (x2 - x1)dy = \int_a^b [f2(y) - f1(y)]dy$$