LIMIT DAN DIFFERENSIAL

LIMIT

- Limit merupakan konsep dasar yang penting dalam cabang matematika yang dikenal dengan kalkulus
- Kita dapat mengetahui seberapa jauh suatu fungsi akan berkembang apabila variabel di dalam fungsi tersebut terus menerus berkembang mendekati nilai-nilai tertentu

PERNYATAAN PADA LIMIT

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

- Limit fungsi f(x) untuk mendekati a adalah L, dimana a dan L masing-masing adalah bilangan.
- Artinya jika x bertambah secara terus menerus hingga mendekati a, maka nilai fungsi f(x) pun akan bertambah hingga mendekati L
- Contoh;

$$Y = f(x) = 1 - 2X^2$$

$$\lim_{x \to 2}(1 - 2X^2) = -7$$

$$\lim_{x \to 3}(1 - 2^3) = -17$$

KAIDAH-KAIDAH LIMIT

$1. y = f(x) = x^n$

$\lim_{x \to a} x^n = a^a$

contoh:

$\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$

$2. y = k$ Limit dari suatu konstanta

$\lim_{x \to a} k = k$

contoh:

$\lim_{x \to 2} 5 = 5$

LIMIT SUATU PENJUMLAHAN/PENGURANGAN

- Jumlah selisih dari limit fungsi-fungsinya

$$y = f(x) \pm g(x)$$

$$\lim_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Contoh

$$y = (1 + 2x^2) + (x^3)$$

$$\lim_{x \to 2}(1 + 2x^2) + \lim_{x \to 2}(x^3) = 9 + 8 = 17$$

LIMIT DARI SUATU PEMBAGIAN

- Pembagian dari limit fungsi-fungsinya dengan syarat limit fungsi pembagi (penyebut)

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{Dengan syarat} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

contoh:

$$y = \frac{x^2 - 25}{x - 5}$$

$$\lim_{x \to 6} = \frac{(x^2 - 25)}{(x - 5)} = \frac{\lim_{x \to 6}(x^2 - 25)}{\lim_{x \to 6}(x - 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 6}(x - 5)(x + 5)}{\lim_{x \to 6}(x - 5)} = \frac{(1)(11)}{(1)} = 11$$

LIMIT 2 FUNGSI

- Dua fungsi yang serupa mempunyai limit yang sama f(x) = g(x)

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \text{juga} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = L$$

SOAL LIMIT

1. $\lim_{x \to 2} x^4 =$

2. $\lim_{x \to 2} x =$

3. $y = (2 + 4x^3) + (3x^3) \rightarrow \lim_{x \to 2}$

4. $y = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

$\lim_{x \to 6} = \dfrac{(x^2 - 16)}{(x - 4)} =$

DIFERENSIAL

- Pada dasarnya merupakan proses penarikan limit atas suatu koefisien diferensi dalam hal tambahan variabel bebasnya mendekati nol.

- Hasil yang diperoleh dari proses diferensiasi $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ dinamakan **turunan** (y') atau **derivatif**

PERHITUNGAN DIFERENSIAL

- Mencari laju perubahan suatu fungsi.
- Dalam ekonomi, diferensial dapat digunakan untuk memecahkan soal bagaimana meminimalkan biaya dan memaksimalkan laba.
- Analisis dalam ekonomi adalah terutama analisa mengenai perubahan.
- Analisis marginal adalah analisis mengenai laju perubahan marginal yaitu laju perubahan sesaat yang tak lain daripada hasil bagi diferensial atau turunan pertama dari fungsi-fungsi yang bersangkutan, misal fungsi permintaan, penawaran, produksi, biaya, pendapatan, konsumsi, tabungan, harga, laba, dan lain-lain.
- Laju perubahan sesaat di suatu titik X dinamakan hasil bagi diferensial atau turunan fungsi yang dilambangkan :

$$\frac{df(x)}{dx}, \frac{df}{dx}, f', D_x f, Df$$

atau didefinisikan dengan suatu limit, yaitu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

- Jika $f(x) = y$, maka turunannya dituliskan juga

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}, atau \quad y'$$

KAIDAH-KAIDAH DIFERENSIAL

A. Turunan Fungsi Aljabar

1. Turunan dari fungsi $y = x^n$

$$\frac{d\left(x^n\right)}{dx} = nx^{n-1}$$

$contoh:$

$$y = x^3, maka \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$y = x, maka \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

$$y = x^{\frac{5}{2}}, maka \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}x^{\left[\frac{5}{2}-1\right]} = \frac{5}{2}x^{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3}$$

2. Turunan Suatu Konstanta

$$y = c \quad \rightarrow \quad \frac{d(c)}{dx} = 0$$

contoh

$$y = 10 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y = e \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

3. Turunan Suatu Jumlah

$$y = u + v \quad \rightarrow \quad \frac{d(u+v)}{dx} = u' + v'$$

contoh

$$y = 8x^3 + 2x \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 24x^2 + 2$$

$$y = x^3 + x^{-\frac{1}{2}} + 3 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - \frac{1}{2}x^{\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$y = x^2 + x + 10 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x + \frac{1}{2}x^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

4.Turunan Suatu Hasil Kali

$$y = uv \quad \rightarrow \quad \frac{d(uv)}{dx} = uv' + vu'$$

contoh

$$y = (x+2)(2x+1) \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (x+2)2 + (2x+1)1 = 4x+5$$

$$y = ex^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2xe + x^2 0 = 2xe$$

$$y = (x^2+1)(x^3-1)(x^4), maka:$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^4)(x^3-1)(2x) + (x^4)(x^2+1)(3x^2) + (x^2+1)(x^3-1)(4x^3)$$

$$\Leftrightarrow 9x^8 + 7x^6 - 6x^5 - 4x^3$$

5.Turunan Suatu Hasil Bagi

$$y = \frac{u}{v} \rightarrow \frac{d(uv)}{dx} = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

contoh

$$y = \frac{(2x^2 + x)}{(x^3 + 3)} \quad maka$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^3 + 3)(4x + 1) - (2x^2 + x)(3x^2)}{(x^3 + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^4 + x^3 + 12x + 3 - 6x^4 - 3x^3}{(x^3 + 3)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2x^4 - 2x^3 + 12x + 3}{(x^3 + 3)^2}$$

6.Turunan Fungsi berantai (fungsi komposit)

Yaitu fungsi dari fungsi, misal $y = F(u)$ sedang $u = f(x)$

Sehingga y adalah juga fungsi dari x

$$y = F[f(x)] \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

contoh

$$y = (x^2 + 3)^3$$

$$misalkan: u = x^2 + 3 \quad maka \quad y = u^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\Leftrightarrow (3u^2)(2x) = 3(x^2 + 3)^2(2x)$$

$$\Leftrightarrow (3x^4 + 18x^2 + 27)(2x) = 6x^5 + 36x^3 + 54x$$

- Turunan Fungsi Kebalikan (invers)

Y = f(x) x = g (y) merupakan fungsi kebalikan

($x = f^{-1}(y)$)

Rumus : dy/dx = 1/ dy/dx or dx/dy = 1/dy/dx

Contoh :

Y = 5x + 25 = dx/dy = 1/dy/dx =1/5

$Y = x^3 + x = 1/3x^2 + 1$

- Turunan Fungsi Logaritma dengan bilangan 10

$Y = {}^{10}\log x$

$Dy/dx = 1/x \log e = 1/x \ln 10$

Contoh :

$y = \log 8x$ $y = \log 8 + \log x$

$dy/dx = 1/x \log e$ $dy/dx = 1/x \log e$

$Y = \log 2x^3$

$y = \log 4x^2$

$y = \log u$

$dy/dx = 1/u \log e\ dy/dx$

Contoh :

$Y = \log (4x + 1)$ $dy/dx = 1/(4x+1) \log e\ 4 = 4/4x+1 \log e$

- Turunan fungsi logaritma dengan bilangan pokok e

$Y = {}^{e}\log x$

$dy/dx = 1/x\ {}^{e}\log e$ menjadi $1/x \ln e = 1/x(1)$

Contoh ;

$Y = \ln x^3$ $dy/dx = 3 \ln x = 3/x$

$Y = \ln u$ menjadi $dy/dx = 1/u\ .du/dx/\ \ln e$

Contoh :

$Y = \ln (4x-3)$ $dy/dx = 1/(4x-3)\ .\ 4$

- Turunan fungsi logaritma dengan bilangan pokok sembarang

$Y = {}^{a}\log x$ menjadi $dy/dx = 1/x\ln a$

- Fungsi peubah lebih dari dari dua

Turunan Parsial

- Merupakan perluasan lebih lanjut dari perhitungan dengan konsep penurunan dihubungkan langsung dengan fungsi multivariat (banyak peubah)
- Z = f(xy) differensial parsial fx ; fy
- Partial derivatives dz/dx ; dz/dy
- $Y = f(x_1, x_2, x_3)$
- $dy/dx_1 = f_1 \quad dy/dx_2 = f_2 \quad dy/dx_3 = f_3$
- $Y = 3x_1+4x_2 , f_1 = 3 \quad f_2 = 4$

Diferensial total

- diferensial dy dari y = f(x,z) dinamakan diferensial total yang besarnya dy = dy/dx . dx + dy/dz.dz

Contoh :

- $Z = x^2 + xy - y^2$

  $= (2x+y)dx + (x-2y)dy$

Turunan Fungsi Implisit

- $F(x,y) = 0$
- $Df/dx.dx + df/dy.dy = o$ menjadi $dy/dx = -df/dx/dfdy$
- Contoh :

$2x^3 - xy^2 + y^2 + 12$ $df/dx.dx + df/dy.dy = o$

$(6x^2-2y) + (-2x + 2y)$ $dy/dx = - 6x^2-2y/-2x + 2y$

$X^2 - xy - 2y^2 = 0$

Fungsi dari fungsi

Jika $Z = f(x,y)$ dimana $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ maka total derivatif menjadi :

$dz = dz/dx.dx + dz/dy.dy$ dikatakan total deferensial

$Dz/dt = dz/dx \,.\, Dx/dt + dz/dy.dy/dt$

Contoh :

$Z = 5x + 2y$ dimana $x = t^2 + 3$ dan $y = 5t^3 + 4$

$Dz/dx = 5$ $dz/dy = 2$ $dx/dt = 2t$ $dy/dt = 15t^2$

$Dz/dt = 5.2t + 2.15t^2 = 10t + 30t^2 = 10(1+3t)$

Maksimum dan Minimum

Untuk fungsi perubah tiga z = f(x,y) maka titik stationer dapat merupakan ekstrem relatif, titik pelana dan titik belok, Dan syarat untuk mencapai titik ekstrem adalah:

1. Syarat perlu, adalah syarat orde pertama
   dz/dx = fx = 0
   dz/dy = fy = 0
2. Syarat cukup adalah syarat orde kedua
   Ekstem bila fxx fyy – fxy2 > 0
   Titik pelana bila fxx fyy – fxy2 < 0
   Ekstrem minimum bila fxx dan fyy > 0
   Ekstrem maksimum bila fxx dan fyy < 0
   tanda fxx dan fyy senantiasa sama
   Contoh :
   $Z = -x^2 + 12x - y^2 + 10y - 45$
   Fx = dz/dx = -2x + 12 menjadi x = 6
   Fy = dz/dy = -2y + 10 menjadi y = 5
   Titik statisioner (6,5)
   fxx = -2 fyy = -2 fxy = 0
   fxx fyy – fxy2 = (-2) (-2) – 0 = 4 > 0 *titik ekstrem
   Fxx = -2 < 0 titik maksimum
   $Z_{maksimum} = -x^2 + 12x - y^2 + 10y - 45$
   $= -(6)^2 + (12)(6) - (5)^2 + 10(5) - 45$
   = 16