Bab 3: Sinyal dan Sistem di Domain *z*

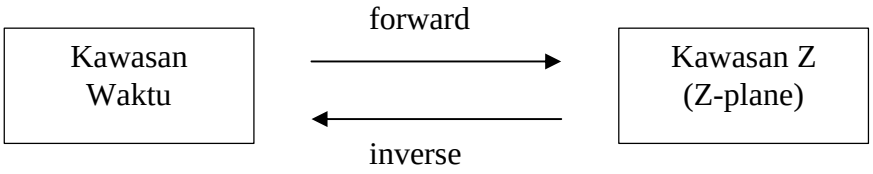
Analisa sinyal dan sistem bisa dipermudah apabila dilakukan pada domain *z*. Untuk itu, sinyal dan sistem direpresentasikan ke dalam domain ini kemudian hasilnya dipakai untuk analisa.

1 Transformasi z pada Sinyal

1.1 Definisi Transformasi z

Tujuan Belajar 1

Peserta mengetahui definisi Transformasi *z* (*X*(*z*)) dari sinyal *x*(*n*) beserta definisi dan pengertian *Region of Convergence* (RoC), yakni sebuah polinomial.



sequence ⟷ polinomial

x(n) ⟶ $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

Z-transform untuk sinyal x(n) :

$$X(z) = z\{x(n)\}$$

$$x(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X(z)$$

Region of Converge (ROC) : karena *X*(*z*) adalah deret tak hingga maka secara matematis bisa bernilai ∞ untuk *z* terhingga ⇒ tidak boleh. Oleh sebab itu z yang bisa digunakan adalah z ∈ ROC

Tujuan Belajar 2

Peserta mengetahui bahwa untuk sinyal berdurasi terbatas (finite duration), *X*(*z*) adalah polinomial berorde terbatas dengan RoC seluruh bidang *z* kecuali titik tertentu.

x(n) = {1, 2, 5, 7, 0, 1}

$\Rightarrow X(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$

ROC seluruh z-plane kecuali z = 0, z = ∞

Tujuan Belajar 3

Peserta mengetahui *X*(*z*) dari impuls dan versi tergesernya sejauh *k* sampel.

x(n) = {1, 2, 5, 7, 0, 1}

$\Rightarrow X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3}$

ROC seluruh z-plane kecuali z = 0, z = ∞

$x(n) = \delta(n) \Rightarrow X(z) = 1$

ROC : seluruh z-plane

$x(n) = \delta(n-k), k > 0 \Rightarrow X(z) = z^{-k}$

ROC : seluruh z-plane, kecuali z = 0

$x(n) = \delta(n+k), k > 0 \Rightarrow X(z) = z^{k}$

ROC : seluruh z-plane, kecuali z = ∞

Tujuan Belajar 4

Peserta mengetahui *X*(*z*) untuk sinyal durasi tak hingga $x(n) = (a)^n u(n)$ beserta RoC yang sesuai bagi $\lvert a \rvert \le 1$.

Cari Z-transform dari $x(n) = (1/2)^n u(n)$

Jawab :

$$x(n) = \{ \ldots, 0, 0, \ldots, \left(\tfrac{1}{2}\right)^0, \left(\tfrac{1}{2}\right)^2, \left(\tfrac{1}{2}\right)^3, \ldots\}$$

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \ldots$$

Ingat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, bila |x| < 1

∞, bila |x| ≥ 1

$\rightarrow$ X(z) = $\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2z}\right)}$; ROC : $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$

X(z) = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$; ROC : |z| >1/2

Secara umum berlaku

$\Rightarrow x(n) = a^n u(n) \Leftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ untuk $|z| > a$.

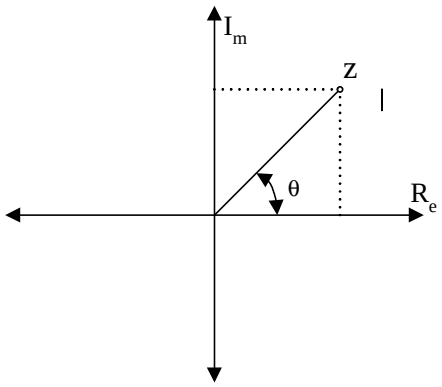
Tujuan Belajar 5

Peserta mengetahui perbedaan RoC untuk sinyal berdurasi tak hingga kausal (di luar lingkaran), anti-kausal (di dalam lingkaran), dan kombinasinya (cincin).

Konvergensi |X(z)| dari sinyal kausal dan Antikausal

Pertama kita tahu bahwa bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk kartesian atau bentuk polar, misalnya

$$z = re^{jq} = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z)$$



Gambar 1. Bentuk polar dari bilangan kompleks *z*.

$$z^{-n} = r^{-n}e^{-jnq}$$

$$X(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(1^{-n}\right)e^{-jnq} \qquad \text{cek } |X(z)| < \infty$$

$$|X(z)| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)r^{-n}e^{-jqn}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|\underbrace{|r^{-n}|}_{\uparrow=1}|e^{-jqn}|$$

$$= \sum\left|x(n)r^{-n}\right|$$

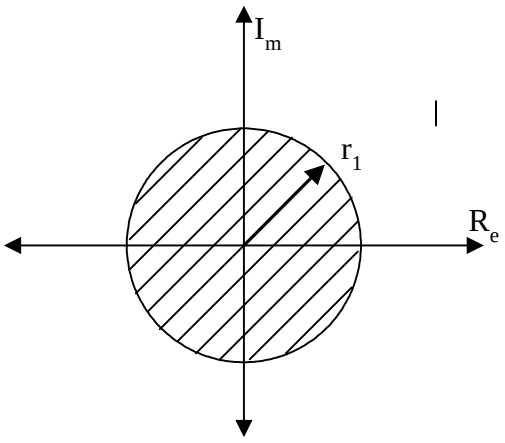
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|x(n-)r^{-n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{r^n}\right|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left|x(n-)r^{n}\right| + \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x(n)}{r^n}\right|$$

Term Noncausal : dua term harus konvergen

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|x(-n)r^{n}\right| < 1 \rightarrow$ r harus kecil, < r_1

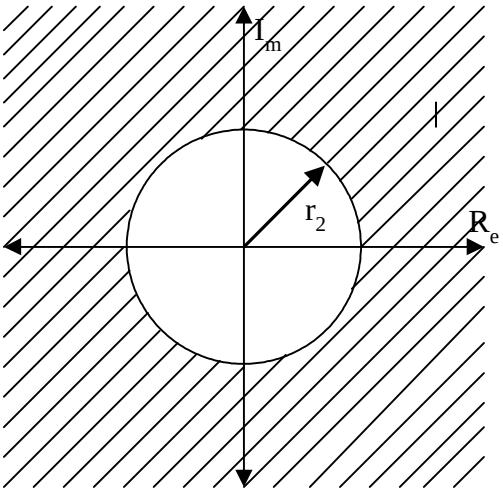
$$\rightarrow |x(-n)| \le \frac{1}{r^n} \rightarrow |z| < r_1$$



Gambar 2. ROC untuk term nonkausal.

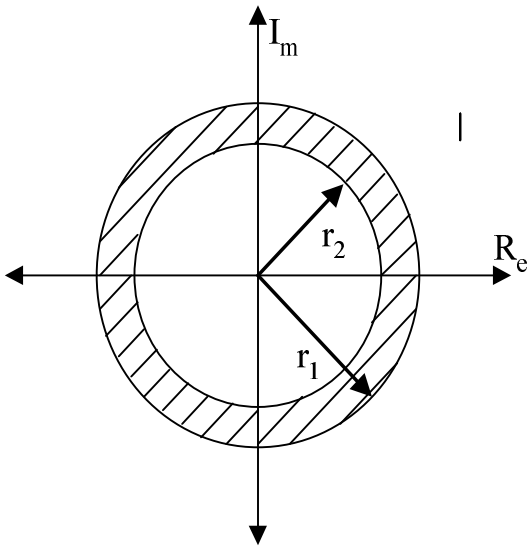
Term kausal

$$\left|\frac{x(n)}{r^n}\right| < 1, \quad r>r_2, |z|>r_2$$



Gambar 3. ROC untuk bagian kausal.

Kalau kedua-dua nya (kausal dan nonkausal) ada dan $r_2 < r_1$, maka ROCnya berbentuk cincin.



Gambar 4. ROC untuk sinyal dengan bagian kausal dan nonkausal.

Contoh :

$x(n) = \alpha^n u(n)$, cari X(z)

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \qquad \text{ROC} : |\alpha z^{-1}| < 1$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > \alpha$$

Ctt.

Bila x(n) = u(n) $\Rightarrow$ x(n) = α^nu(n), $\alpha = 1$

$$\rightarrow\ X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

Contoh :

$$x(n) = -a^{n}u(n-1) = \begin{cases} 0, n \geq 0 \\ -a^{n}, n \leq 1 \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{1} (-a^{n})z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} (a^{-1}z)^{l}$$

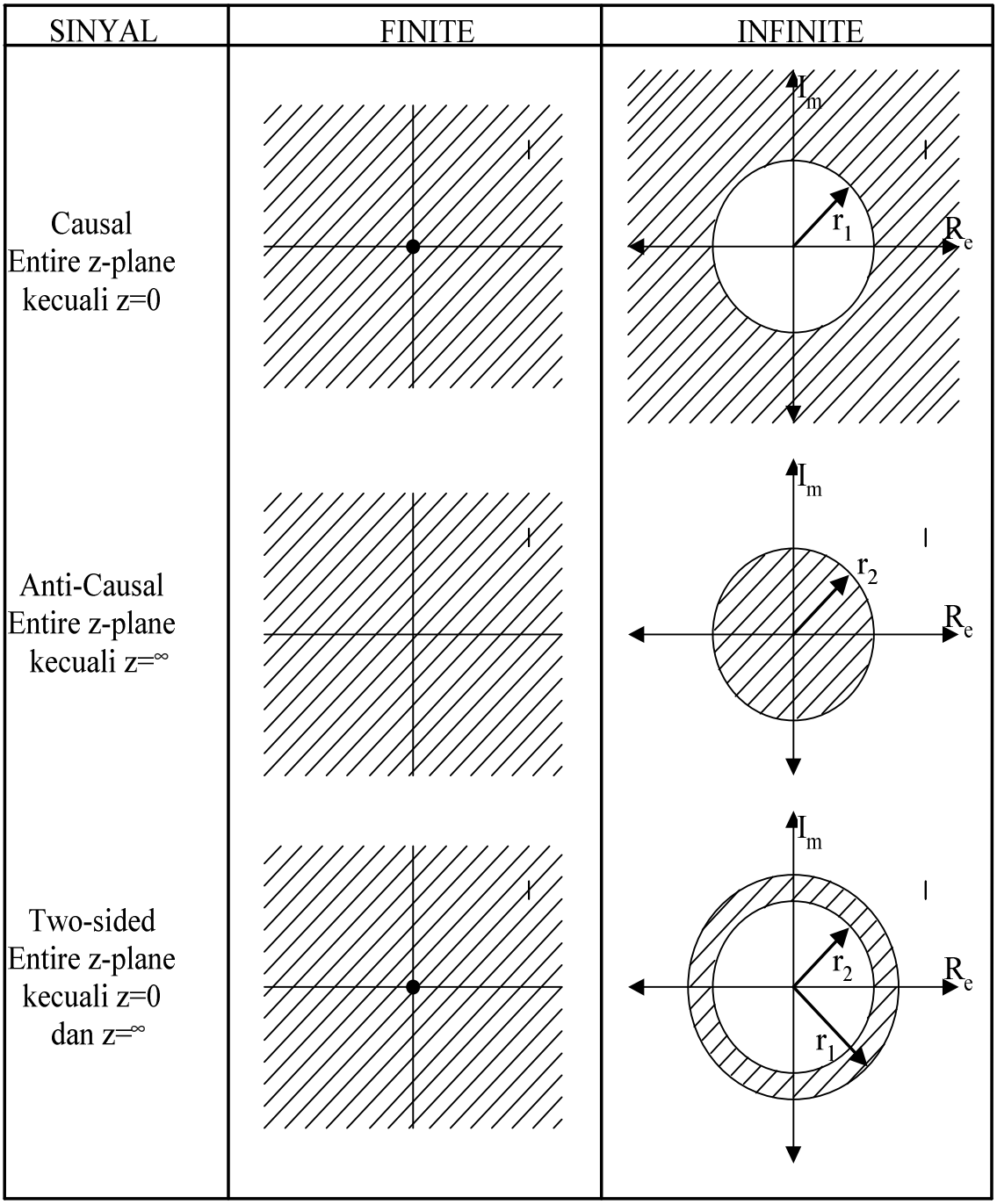
Ctt.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n = A\sum_{n=0}^{\infty} A^N = \frac{A}{1-A}, \qquad |A| < 1$$

$$X(z) = -\frac{a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |\alpha^{-1}z| < 1$$

$$|z| < |\alpha|$$

$\Rightarrow$ ternyata sama dengan sebelumnya kecuali ROC nya



Gambar 5. ROC untuk sinyal yang finite maupun infinite.

One sided

$$X^{+}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

1.2 Inversi Transformasi z

Tujuan Belajar 6

Peserta mengerti definisi Inverse transformasi z beserta penurunannya dari teorema Cauchy *countour integral*.

Inverse :

Cauchy Contour Integral

$$\oint_c (z - z_k)^{n-1-k} dz = \begin{cases} 2pj, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

$$\oint_c z^{n-1-k} dz = \begin{cases} 2pj, k = n \\ 0, k \neq n \end{cases}$$

$$\oint_c X(z) z^{n-1} dz = \oint_c \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \right) z^{n-1-k} dz$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \oint_c z^{n-1-k} dz$$

$$= x(n) 2pj$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{2pj} \oint_c X(z) z^{n-1} dz$$

1.3 Sifat-Sifat Transformasi z

Tujuan Belajar 7

Peserta mengetahui dan dapat memanfaatkan sifat linier dari transformasi z, termasuk untuk menghitung transformasi z dari sinyal $\cos(w_0 n)u(n)$ dan $\sin(w_0 n)u(n)$.

Sifat Linear:

$x_1(n) \Leftrightarrow X_1(z)$ $\quad ROC_1$

$x_2(n) \Leftrightarrow X_2(z)$ $\quad ROC_2$

$$\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n) \Leftrightarrow \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$$

ROC : $\cap$ ROC_i

Contoh :

$x(n) = [3(2^n) - 4(3^n)]u(n)$

$= 3x_1(n) + (-4)x_2(n)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$(2^n)u(n) \quad (3^n)u(n)$

$X_1(z) = \dfrac{1}{1-2z^{-1}}$ ROC : $|z| > 2$

$X_2(z) = \dfrac{1}{1-3z^{-1}}$ ROC : $|z| > 3$

$\Rightarrow X(z) = 3X_1(z) + (-4)X_2(z)$ ROC : $|z| > |3|$

$= \dfrac{3}{1-2Z^{-1}} - \dfrac{4}{1-3Z^{-1}}$ $|Z| > 3$

Hitung a). $x(n) = \cos(\omega_o n)u(n)$

b). $x(n) = \sin(\omega_o n)u(n)$

Contoh :

$x(n) = a^n\cos(\omega_o n)u(n)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-a_1\cos w_o}{1-2az^{-1}\cos w_o + a^2z^{-2}}$

$x(n) = a^3\sin\omega_o nu(n)$

$\Leftrightarrow \dfrac{az^{-1}\sin w_o}{1-2az^{-1}\cos w_o + a^2z^{-2}}$

Tujuan Belajar 8

Peserta mengetahui akibat pergeseran di domain waktu terhadap $X(z)$ dan dapat memanfaatkannya.

$x(n) \leftrightarrow X(z)$

$\Rightarrow x(n-k) \leftrightarrow Z^{-k}X(z)$

ROC : sama dengan X(z)

kecuali $z = 0$ $k > 0$

$z = \infty$ $k < 0$

Contoh :

$$x(n)=\begin{cases}1, 0\le n\le N-1\\ 0, elsewhere\end{cases}$$

Cari X(z)

Perhatikan : $x(n) = x_1(n) - x_2(n)$

Di mana $x_1(n) = u(n)$

$x_2(n) = u(n-N) = x_1(n-N)$

$$X_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$X_2(z)=z^{-N}X_1(z)=\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$\rightarrow X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \qquad \text{ROC } |z| > 1$$

hitung lewat cara lain

$$x(n)=\cos(w_0 n)u(n)=\tfrac{1}{2}e^{jwon}u(n)+\tfrac{1}{2}e^{-jwon}u(n)$$

$$e^{jwon}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{jwo}z^{-1}} \qquad |z| > 1$$

$$e^{-jwon}u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-jwo}z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$X(z)=\frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{jw_o}z^{-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{e^{-jw_o}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-jw_o}z^{-1}+1-e^{-jw_o}z^{-1}}{1-e^{-jw_o}z^{-1}-e^{jw_o}z^{-1}+z^{-2}}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{2}\left(e^{jw_o}+e^{-jw_o}\right)z^{-1}}{1-\frac{2}{2}\left(e^{jw_o}+e^{-jw_o}\right)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1-\cos w_o z^{-1}}{1-2\cos w_o z^{-1}+z^{-2}} \qquad \text{ROC}:|z|>1$$

$$x(n) = \sin(w_o n)u(n) = \frac{1}{2j}(e^{jwon} - e^{-jwon})u(n)$$

$$X(z) = \frac{z^{-1}\sin w_o}{1 - 2z^{-1}\cos w_o + z^{-2}} \qquad \text{ROC : } |z| > 1$$

Tujuan Belajar 9

Peserta mengetahui akibat *scaling* di domain z terhadap sinyal di domain waktu dan dapat memanfaatkannya.

$x(n) \leftrightarrow X(z) \quad r_1 < |z| < r_2$

$\Rightarrow a^n u(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z) \quad |a|r_1 < |z| < |a|r_2$

Bukti:

$$Z(a^n x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{a}\right)^{-n} = \sum a(n) z^{-n}\Big|_{z=\frac{z}{a}}$$

$$= X(z)\Big|_{z=\frac{z}{a}} = X(a^{-1}z)$$

bila X(z) ROC : $r_1 < |z| < r_2$

$r_1 < |z/a| < r_2$

$|a|r_1 < |z| < |a|r_2$

Tujuan Belajar 10

Peserta mengetahui akibat *time-reversal* di domain waktu terhadap sinyal di domain z dan dapat memanfaatkannya.

$x(n) \xleftrightarrow{2} X(z) \qquad \text{ROC : } r_1 < |z| < r_2$

maka $x(-n) \leftrightarrow X(z^{-1}) \qquad \text{ROC : } 1/r_2 < |z| < 1/r_1$

Bukti :

$$z(x(n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)(z^{-1})^{-l}$$

$$= X(z)\Big|_{z=z^{-1}} \qquad r_1 < |z^{-1}| < r_2$$

$$1/r_2 < z < 1/r_1$$

Contoh :

x(n) = u(-n)

$$\Rightarrow u(-n) \leftrightarrow z(u(n))\Big|_{z=z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}\Big|_{z=z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{1-z} \qquad \text{ROC} : |z| < 1$$

Tujuan Belajar 11

Peserta mengetahui akibat diferensiasi di domain z terhadap sinyal di domain waktu dan dapat memanfaatkannya.

$$x(n) \xleftrightarrow{z} X(z)$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)(-n)z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [nx(n)]z^{-n}$$

$$= -z^{-1}Z\{nx(n)\}$$

$$Z\{nx(n)\} = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

Contoh :

x(n) = $na^n u(n)$

= $n(a^n u(n))$

$\downarrow x_1(n)$

$$x_1(n) = a^n u(n) \leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = X_1(z) \quad \text{ROC} : |z| > |a|$$

$$X(z) = -z\frac{dX_1(z)}{dz} = -z.(-1)\frac{1}{(1-az^{-1})^2}(+az^{-2})$$

$$= \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} \quad |z| > |a|$$

Contoh :

$$nu(n) \leftrightarrow \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \quad |z| > 1$$

Tujuan Belajar 12

Peserta mengetahui bahwa konvolusi dua sinyal di domain waktu menghasilkan perkalian kedua sinyal di domain z, dan dapat memanfaatkannya.

$x_1(n) \leftrightarrow X_1(z)$

$x_2(n) \leftrightarrow X_2(z)$

$$x_1(n) * x_2(n) \equiv x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n}z^{k}.z^{-k}\right]x_2(n-k)$$

$$= X_2(z)\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k} = X_2(z)X_1(z)$$

$$\downarrow X_1(z)$$

Contoh :

Hitung $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$

Di mana $x_1(n) = \{1, -2, 1\}$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 5 \\ 0, & elsewhere \end{cases}$$

jawab :

$X_1(z) = 1- 2z^{-1}+ z^{-2}$

$X_2(z) = 1 +z^{-1} +z^{-2} +z^{-3} + z^{-4} +z^{-5}$

$X(z) = X_1(z)X_2(z)=1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$

$\Rightarrow x(n) = \{1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, 1\}$

$\uparrow$

Cara lain:

$X_1(z) = (1 - z^{-1})^2$

$X_2(z) = \dfrac{1 - z^{-6}}{1 - z^{-1}}$ lihat contoh sebelumnya

$X_1(z) * X_2(z) = (1 - z^{-6})(1 - z^{-1})$

$= 1 - z^{-1} - z^{-6} + z^{-7}$ dst.

Tujuan Belajar 13

Peserta mengetahui teorema kondisi awal dan menggunakannya.

Teorema Kondisi Awal

x(n) causal (i.e., x(n), n < 0)

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = \lim_{z\to\infty}\left(x(0) + \frac{x(1)}{z} + \frac{x(2)}{z^2} \right)$$

$= x(0)$

lihat tabel!

2 Bentuk Rasional dari Transformasi z

2.1 Bentuk Rasional dan Plot Pole-Zero

Tujuan Belajar 14

Peserta mengenal bentuk khusus rasional dari $X(z)$, dan mengerti serta dapat mencari pole dan zero dari $X(z)$ tersebut. Peserta dapat memplot pole-zero tersebut di bidang z.

Definisi :

Zero dari X(z) adalah nilai-nilai z di mana X(z) = 0

Pole dari X(z) adalah nilai-nilai z di mana X(z) = ∞

X(z) rasional,

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+...+b_Mz^{-M}}{z^N+(\frac{a_1}{a_0})z^{N-1}+...+a_N/a_o}=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_kz^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_kz^{-k}}$$

Bila $a_0 \neq 0$ dan $b_0 \neq 0$

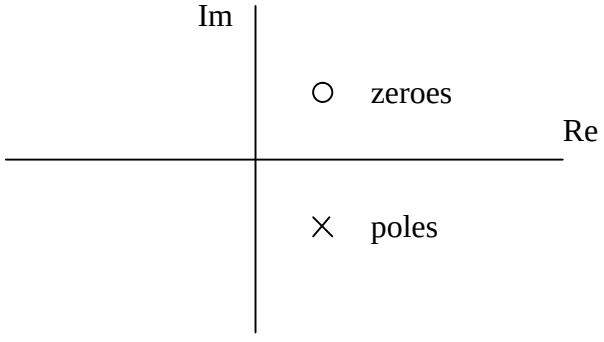
$$X\left(\frac{b_oz^{-M}}{a_oz^{-N}}\right)\frac{z^M+\left(\frac{b_1}{b_o}\right)z^{M-1}+...+\frac{b_M}{b_o}}{z^N+\left(\frac{a_1}{a_o}\right)z^{N-1}+...+\frac{a_N}{a_o}}$$

karena N(z) dan D(z) polinomial, maka

$$X(z)=\left(\left(\frac{b_o}{a_o}\right)z^{-M+N}\right)\frac{(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)...(z-p_N)}$$

$$=X(z)=\left(Gz^{N-M}\right)\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}$$

Plot :



Gambar 6. Pole dan zero diletakkan pada z-plane masing-masing dengan lambang x dan o.

Tujuan Belajar 15

Peserta dapat mencari $X(z)$ dan $x(n)$ berdasarkan plot pole–zero.

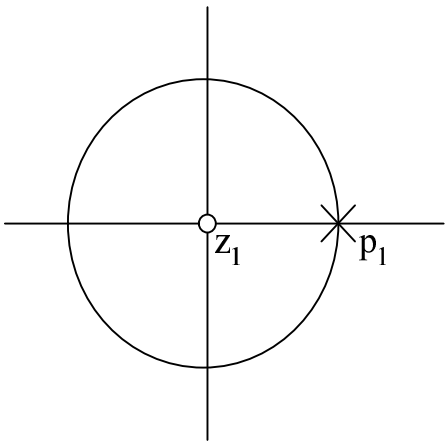
Contoh :

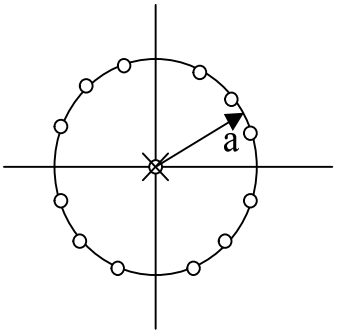
Plot pole-zero dari sinyal

$x(n) = a^n u(n) \quad a > 0$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad \text{ROC : } |z| > a$$

$\Rightarrow$ zero $\Rightarrow z_1 = 0; \qquad P_1 = a$

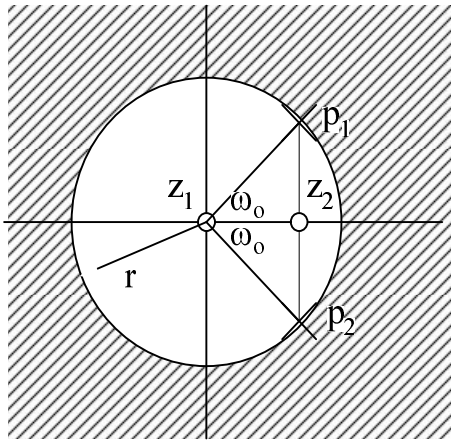




Gambar 8. Konfigurasi pole dan zero.

Soal :

Cari Z-transform dari sinyal dari :



Tujuan Belajar 16

Peserta memahami sifat sinyal kausal di kawasan waktu akibat lokasi pole, menggunakan kasus satu pole $x(n)=(a)^n u(n)$, pole ganda $x(n)=n(a)^n u(n)$, dan sepasang pole complex conjugate. Peserta juga mengerti hubungan lokasi pole dengan stabilitas sistem.

Sifat kawasan waktu sinyal kausal akibat lokasi pole

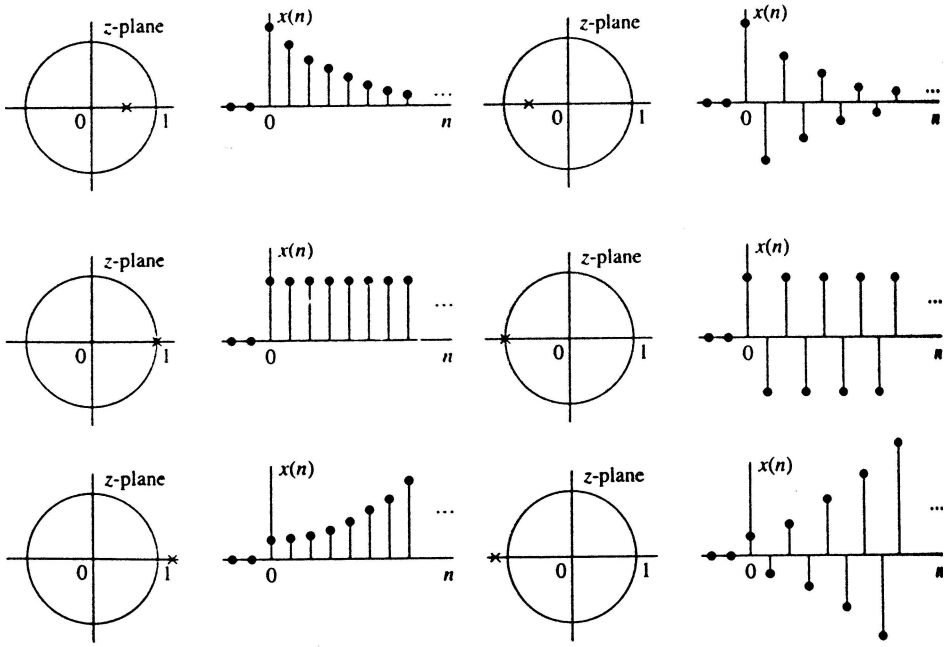
Cek pada |z| < 1, |z| = 1, |z| > 1

↑

unit circle

- Kasus 1 pole real

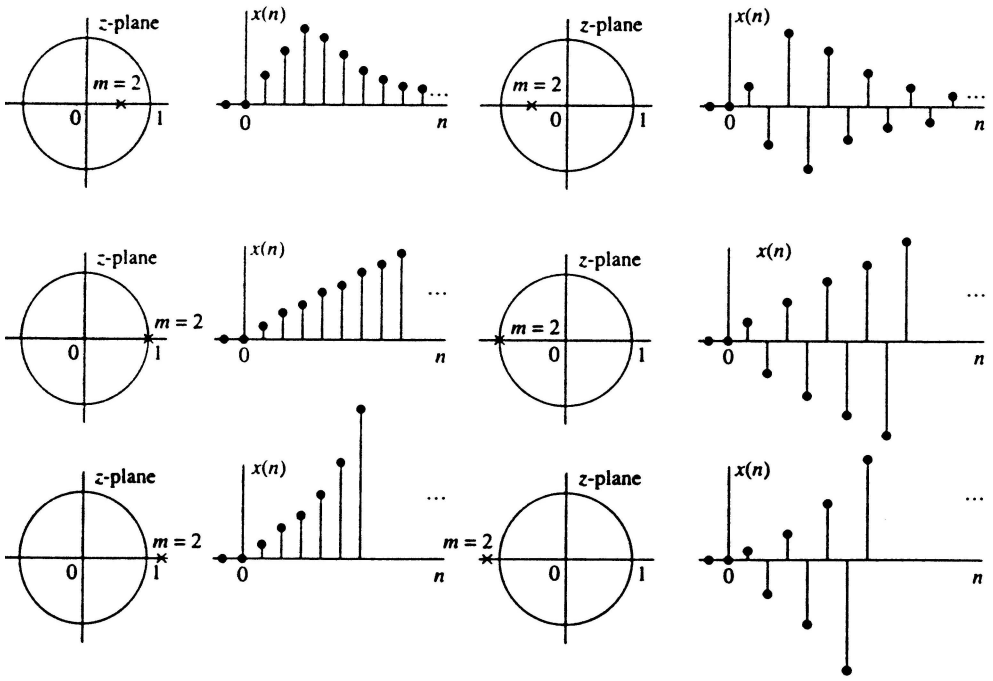
$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| > |a|$$



Gambar 10. Pengaruh posisi pole terhadap dinamika sinyal.

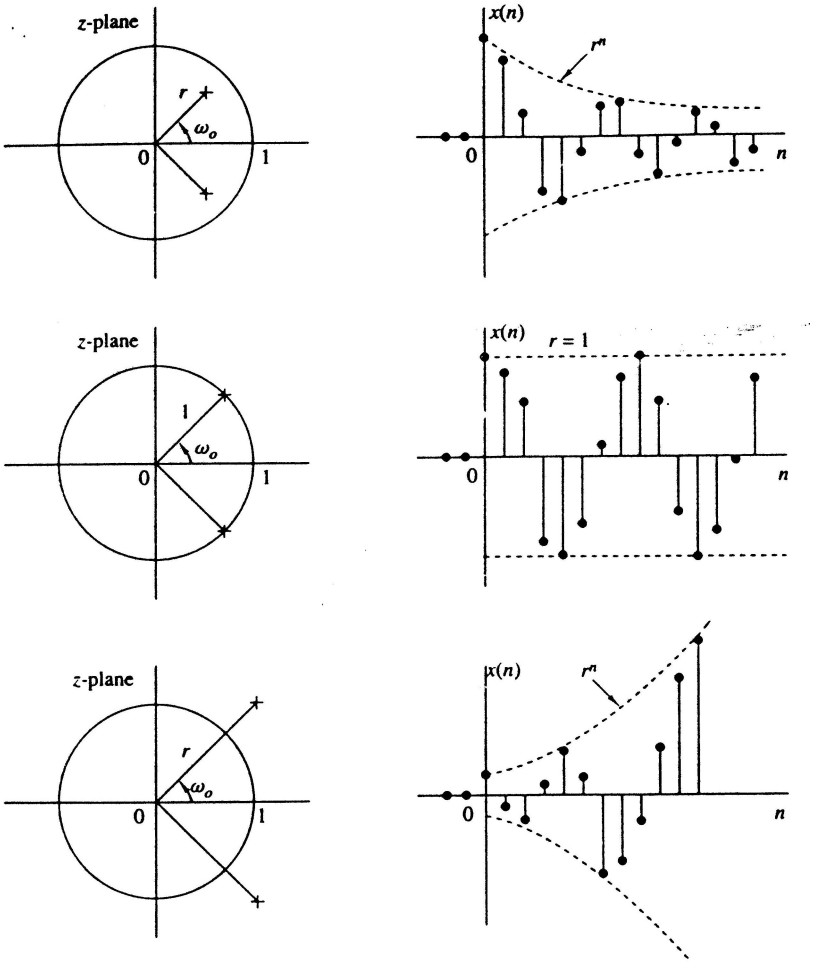
- Kasus z pole real (double)

$$x(n) = na^n u(n) \leftrightarrow \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} \quad |z| > a$$



Gambar 11. Pengaruh posisi pole ganda terhadap dinamika sinyal.

- Kasus sepasang complex conjugate



Gambar 12. Pengaruh posisi pole ganda konjugate terhadap sifat dinamika sinyal.

Jadi:

sinyal dengan pole di dalam unit circle selalu terbatas amplitudanya. Pole dekat origin → decay cepat → berlaku untuk sistem stabil

3 Transformasi z Untuk Sistem

Tujuan Belajar 17

Peserta dapat mendefiniskan fungsi sistem $H(z)$ dari $h(n)$ maupun hubungan I/O dari sistem LTI. Peserta juga dapat mencari $H(z)$ dari sistem LCCDE secara cepat, termasuk untuk kasus khusus all-zero dan all-pole.

Fungsi Sistem:

Y(z) = H(z) X(z)

$\Rightarrow$ H(z) = Y(z)/X(z)

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-h}$$

$\uparrow$ Fungsi Sistem

Sistem LCCDE:

$$y(n) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$Y(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} Y(z) + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = H(z)$$

Kasus khusus

- $H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$ $\in$ all zero, FIR

$$H(z) = \frac{b_o}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \Rightarrow \text{ all pole}$$

Contoh :

Cari H(z) dan h(n) dari y(n) = 1/2y(n-1) + 2x(n)

Jawab:

$$H(z) = \frac{2}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \Rightarrow h(n) = 2(\tfrac{1}{2})^n u(n)$$

4 Inversi dengan Cara *Partial Fraction*

Tujuan Belajar 18

Peserta mengerti prinsip inversi transformasi z dengan cara partial fraction, baik untuk *X*(*z*) yang proper maupun yang improper.

Inversi partial fraction

$X(z) \rightarrow \sum$ term standar, bergantung pole dan ROC

$\downarrow$

$x(n) \leftarrow \sum$ inverse masing-masing k

Inversi dengan Partial Fraction

Definisi

X(z) proper bila bila $a_N \neq 0$ dan M < N bila tidak proper bisa dibentuk

$$X(z) = \frac{1 + 3z - 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{3}z^{-3}}{1 + \frac{5}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

buat proper + inproper

$$X(z) = 1 + 2z^{-1} + \frac{\frac{1}{6}z^{-1}}{1 + \frac{1}{6}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}$$

Tujuan Belajar 19

Peserta dapat melakukan inversi transformasi z dengan cara partial fraction untuk *X*(*z*) yang proper dan memiliki pole distink.

$a_N \neq 0$ M < N

$$x(z) = \frac{b_o z^N + b_1 z^{N-1} + \ldots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \ldots + a_N} \times \frac{z^N}{z^N}$$

$$= \frac{X(z)}{z} = \frac{b_o z^{N-1} + \ldots b_M z^{N-M-1}}{z^N + \ldots + a^N} \quad \text{selalu proper}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - P_1} + \frac{A_2}{z - P_2} + \ldots + \frac{A_N}{z - P_N}$$

Contoh :

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1.5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}$$

$$= \frac{z^2}{z^2 - 1.5z + 0.5} = \frac{z^2}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z^{-1}} + \frac{A_2}{z^{-0.5}}$$

$$= \frac{A_1(z-0.5) + A_2(z-1)}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\Rightarrow z = A_1(z-0.5) + A_2(z-1)$$

$$1 = A_1(2 - 0.5) \Rightarrow A_1 = 2$$

$$0.5 = A_2(0.5 - 1) \Rightarrow A_2 = -1$$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

Ctt.

$$(z - P_k)\frac{X(z)}{z} = \frac{(z-P_k)A_1}{z-P_1} + \ldots + A_k + \frac{(z-P_k)A_n}{z-P_n}$$

$$\Rightarrow A_k = (z-P_k)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=P_k} \quad k = 1,\ldots,N$$

Contoh :

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2 - z + 0.5}$$

$P_1 = 1/2 + j1/2$

$P_2 = 1/2 - j1/2$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-P_1)(z-P_2)} = \frac{A_1}{z-P_1} + \frac{A_2}{z-P_2}$$

$$A_1 = \frac{(z-P_1)X(z)}{z}\Big|_{z=P_1} = \frac{z+1}{z-P_2}\Big|_{z=P_1} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$

$$A_2 = \frac{(z-P_2)X(z)}{z}\Big|_{z=P_2} = \frac{z+1}{z-P_1}\Big|_{z=P_2} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2}$$

Tujuan Belajar 20

Peserta dapat melakukan inversi transformasi z dengan cara partial fraction untuk $X(z)$ yang proper dan memiliki pole yang berorde ganda.

$$X(z)=\frac{1}{(Hz^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{z^2}{(z+1)(1-z^{-1})^2}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_1}{z+1}+\frac{A}{z-1}+\frac{A_3}{(z+1)^2}$$

$$\frac{(z+1)X(z)}{z}=A_1+\frac{z+1}{z-1}A_2+\frac{z+1}{(z-1)^2}A_3$$

$$A_1=\frac{(z+1)X(z)}{z}\Big|_{z=-1}=\frac{1}{4}$$

$$A_3=\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}$$

$$A_2=\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right]_{z=1}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{A_ik}{z-p_k}$$

$$z^{-1}\left(\frac{1}{1-P_kz^{-1}}\right)=\begin{cases}(P_k)^nu(n), causal \rightarrow |z|>|P_k| \\ -(P_k)^nu(-n-1)\end{cases}$$

$$X(z) = (A_1P_1^{\,n} + A_2P_2^{\,n} + \ldots + A_NP_n^{\,n})u(n)$$

$$X(z)=\frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Contoh :

$$X(z)=\frac{2}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}},$$

ROC |z| > 1, |z| < 0.5, atau 0.5<|z|<1

Ketika |z| > 1 x(n) causal

$x(n) = 2(1)^n u(n)-(0.5)^n u(n)$

$|z| < 0.5 \rightarrow$ x(n) is non causal

$x(n) = -2\, u(-n-1) +(0.5)^n u(-n-1)$

$$-a^n u(-n-1) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

* ROC $0.5 < |z| < 1$

$|z|<1$ anti causal

$|z| > 0.5$ causal

$x(n) = -2u(-n-1) - (0.5)^n u(n)$

Tujuan Belajar 21

Peserta dapat melakukan inversi transformasi z dengan cara partial fraction untuk $X(z)$ yang proper dan memiliki pasangan pole complex conjugate.

Contoh :

$$X(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-P_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-P_2 z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \tfrac{1}{2} - j\tfrac{3}{2}$$

$$A_2 = A_1^* = \tfrac{1}{2} + j\tfrac{3}{2}$$

$$P_1 = \tfrac{1}{2} + j\tfrac{1}{2} \qquad\qquad P_1 = \tfrac{1}{2} - j\tfrac{1}{2}$$

$$x(n) = \left[A_k (p_k)^n + A_k^* \left(p_k^*\right)^n \right] u(n)$$

$$x(n) = |A_k| r_k^n \left[e^{j(b_k n + a_k)} + e^{-j(b_k n + a_k)} \right] u(n)$$

$$= 2|A_k| r_k^n [\cos(b_k n + a_k)] u(n)$$

$$|A_1| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

$$a = -71.565$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{p}{4}}$$

$$\rightarrow x(n) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{pn}{4} - 71.565^o\right) u(n)$$

Tujuan Belajar 22

Peserta dapat melakukan inversi transformasi z pada $X(z)$ LCCDE melalui perubahan bentuk ke dalam bentuk pole-zero, dan kemudian mendekomposisi $X(z)$ ke dalam beberapa kelompok term (improper, single real pole, conjugate poles, dan multiple poles), kemudian masing-masing diproses sesuai cara masing-masing.

$$z^{-1}\left\{\frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})2}\right\} = np^n u(n) \qquad |z| > |p|$$

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{1+z^{-1}} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$x(n) = 1/4(-1)^n u(n) + 3/4u(n) + [1/2n(1)^n)]u(n)$

$= [1/4(-1)^n + 3/4 + n/2]u(n)$

Dekomposisi

$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = b_o \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-p_k z^{-1})}$$

$$= \sum_{k=0}^{M-N} c_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{k_1} \frac{b_k}{1+a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{b_{ok}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}} + multipoles$$

Alternatif :

$$b_o \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-z_k z^{-1})}{(1-p_k z^{-1})} = b_o \prod_{k=1}^{M} \frac{1+b_k z^{-1}}{1+a_k z^{-1}} \prod_{k=1}^{M} \frac{1+b_{1k} z^{-1}+b_{2k} z^{-2}}{1+a_k z^{-1}+a_2 k z^{-2}}$$

5 Transformasi *z* Satu Sisi

Tujuan Belajar 23

Peserta mengetahui definisi transformasi z satu sisi ($X^+(z)$) beserta sifat-sifat dan persamaan dan perbedaannya dari $X(z)$ biasa.

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$X^+(z)$ punya sifat-sifat :

- Tidak mempunyai informasi x(n) untuk n<0
- Unik untuk sinyal kausal
- ROC selalu ekterior dari sebuah lingkaran

Tujuan Belajar 24

Peserta dapat menurunkan sifat shifting dari $X^+(z)$ (baik time delay maupun time advanced) dan mengerti perbedaannya dari sifat shifting $X(z)$.

Semua Z transform properties berlaku kecuali sifat shifting

Kasus 1.

Time delay

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$\Rightarrow x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^{-k}[X^+(z) + \sum_{n-1}^{k} x(-n)z^n] \quad k > 0$$

$$\downarrow = 0 \text{ bila } x(n) \text{ kausal}$$

Bukti :

$$Z^+[x(n-k)] = \sum_{n=0}^{\infty} x(n-k)z^{-n}$$

$$= x(-k)x^{-0} + x(-k)x^{-0} + x(-k+1)x^{-1} + x(2-k)x^{-2}$$
$$+ ... + x(0)x^{-k} + x(1) + x(-k+1)$$

$$= z^{-k}[x(-k)x + x(-k+1)x^{k-1} + x(2-k)x^{k-2}$$
$$+ ... + x(0)x^{o} + x(1)x^{-1} + x(2)x^{-} + ...$$

$$= z^{-k}\left[\sum_{l=-1}^{-k} x(l)z^{-l} + X^+(z)\right] \text{ dst.}$$

Contoh :

$$x(n) = a^n u(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$x_1(n) = x(n-2)$ di mana $x(n) = a^n$

$$Z^+(x(n-2)) = z^{-2}[X^+(z) + x(-1)z^{+1} + x(-2)z^2]$$

$$= z^{-2}X^+(z) + x(-1)z^{-1} + x(-2)$$

karena $x(-1) = a^{-1}$

$x(-2) = a^{-2}$ dan $X^+(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

$$\Rightarrow Z^+(x(n-2)) = \frac{z-2}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-1} + a^{-2}$$

Secara intuitif :

$$Z^+\{x(n-k)\} = [x(-k) + x(-k+1)z^{-1} + ... + x(-1)z^{-k+1}] + z^{-k}X^+(z) \quad k > 0$$

Kasus 2. Time Advanced

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$x(n-k) \xleftrightarrow{z^+} z^k \left[x^+(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n)z^{-n} \right] \quad k > 0$$

Bukti :

$$Z^+\{x(n+k)\} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n+k)z^{-n} = z^k \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

sedangkan

$$X^+(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-l} = \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^{-l} + \sum_{l=k}^{\infty} x(l)z^{-l}$$

$$\Rightarrow Z^+\{x(n+k)\} = z^k \left[X^+(z) - \sum_{l=0}^{k-1} x(l)z^{-l} \right]$$

Contoh :

Bila $x(n) = a^n$, cari $Z^+\{x(n+2)\}$

Jawab:

$$Z^+\{x(n+2)\} = z^2[X^+(z) - x(0) - x(1)z^{-1}]$$

$$= \frac{z^2}{1-az^{-1}} - x(0)z^2 - x(1)z$$

Tujuan Belajar 25

Peserta mengerti sifat asimptotik dari transformasi *z* satu sisi.

$$x(n) \xleftrightarrow{z^+} X^+(z)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{n\to\infty} (z-1)X^+(z)$$

limit exist bila ROC $(z-1)X^+(z)$ mengandung $|z| = 1$

Contoh :

$h(n) = d^n u(n)$ $|\alpha| < 1$

cari nilai step sequence dari $n \to \infty$

$Y(z) = H(z)\, X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \Rightarrow (z-1)Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)} \quad \text{ROC} : |z| = 1$$

Karena $|\alpha| < 1 \rightarrow$ ROC mengandung $|z| = 1$

$$\lim_{n\to\infty} y(n) = \lim_{z\to 1} \frac{z^2}{(z-a)} = \frac{1}{1-a}$$

Tujuan Belajar 26

Peserta dapat menerapkan transformasi *z* satu sisi pada kasus solusi dari deret Fibonacci.

Deret Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Cari close formnya :

$y(n) = y(n-1) + y(n-2)$

Kondisi awal

$y(0) = y(-1) + y(-2) = 1$

$y(1) = y(0) + y(-1) = 1$

$\Rightarrow$ $y(-1) = 0$ dan $y(-2) = 1$

$$Y^+(z) = \left[z^{-1}Y^+(z) + y(-1)\right] + \left[z^{-2}Y^+(z) + y(-2) + y(-1)z^{-1}\right]$$

$$\Rightarrow Y^+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}-z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2-z-1} = \frac{A_1}{1-P_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1-P_2 z^{-1}}$$

Inversi :

$$P_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad P_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{P_1}{\sqrt{5}} \qquad A_2 = -\frac{P_2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^3 - \frac{1-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] u(n)$$

$$\Rightarrow \mathrm{y(n)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \left[\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1} \right] u(n)$$

Tujuan Belajar 27

Peserta dapat menerapkan transformasi *z* satu sisi pada kasus sistem dengan kondisi awal tertentu.

Tentukan respons step dari

$\mathrm{y(n)} = \alpha \mathrm{y(n-1)} + \mathrm{x(n)} \qquad |\alpha| < 1$

dengan kondisi awal y(-1) = 1

jawab :

$$Y^+(z) = a \left[z^{-1} Y^+(z) + y(-1) \right] + X^+(z)$$

$$\Rightarrow Y^+(z) = \frac{a}{1-az^{-1}} + \frac{1}{(1-az^{-1})}$$

$$y(n) = a^{n+1} u(n) + \frac{1-a^{n+1}}{1-a} u(n)$$

$$= \frac{1}{1-a} \left(1-a^{n+2}\right) u(n)$$

6 Respons Sistem

Tujuan Belajar 28

Peserta dapat menghitung respons sistem yang memiliki *H*(*z*) rasional, berdasarkan analisa pole dan zero dari sinyal input dan fungsi sistem, termasuk mengidentifikasi respons natural dan forced response.

Response dari sistem yang memiliki fungsi-fungsi sistem, yang rasional

$$X(z)=\frac{N(z)}{Q(z)} \qquad H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}$$

Bila kondisi awal = 0, y(-1) = y(-2) = …y(-N) = 0

$$\Rightarrow Y(z)=H(z)X(z)=\frac{B(z)N(z)}{A(z)Q(z)}$$

Bila poles

sistem : $p_1, p_2, \ldots, p_N$

sinyal : $q_1, q_2, \ldots, q_L$

$p_k = q_m$

k = 1, 2, …N

m = 1,2,…,L

Bila tidak ada zero yang membuat terjadi pole-zero cancelation, maka

$$Y(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{1-p_k z^{-1}}+\sum_{k=1}^{L}\frac{Q_k}{1-q_k z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y(z)=\sum_{k=1}^{N}A_k(p_k)^n u(n)+\sum_{k=1}^{L}Q_k(q_k)^n u(n)$$

↓ ↓

Natural response Forced Response

Perlu dicatat bahwa $A_k = f^1(p_k,q_k)$

$Q_k = f^2(p_k,q_k)$

Zero input → zero output →natural response = 0

Jadi natural response ≠ zero input response untuk nilai relaxed.

Tujuan Belajar 29

Peserta dapat menghitung respons sistem yang mengandung pole order ganda/banyak.

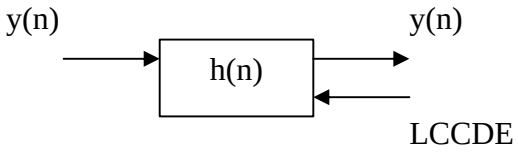
Kasus multiple order poles → kasus seperti pada section 3.4.2, yakni :

⇒ Y(z) mengandung term $\frac{1}{\left(1-p_l z^{-1}\right)^k}$ k = 1, 2, …,m

→ y(n) mengandung term $n^{k-1}p_l^{\,n}$

Tujuan Belajar 30

Peserta dapat menghitung respon sistem yang mengandung pole-zero dan kondisi awal tidak nol (termasuk mengidentifikasi *zero state response* dan *zero input response*).



Misalkan x(n) diterapkan pada n = 0 dan y(-1), …, y(-N) ≠ 0

Cari y(n), n ≥ 0

$$y(n) = -\sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$$Y^+(z) = -\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}\left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n\right] + \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X^+(z) = X(z)$$

$$\Rightarrow Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \sum_{n=1}^{k} y(-n)z^n}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= H(z)X(z) + \frac{N_o(z)}{A(z)}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$Y_{zs}(z) \qquad Y_{zi}^+(z)$$

$Y_{zs}(z) = H(z)X(z)$

$$Y^{+}_{zi} = \frac{N_o(z)}{A(z)}$$

$$\downarrow\ p_1, p_2, \ldots, p_N$$

$$\Rightarrow y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n)$$

$$y_{zi}(n) = \sum_{k=1}^{N} D_k (p_k)^n u(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=1}^{N} A'_k (p_k)^n u(n) + \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

$$\downarrow$$

$$A'_k = A_k + D_k$$

$\Rightarrow$ efek dari initial condition adalah mengalter response natural dengan mengubah amplitudo menjadi A^1_k, tetapi tidak ada efek pada forced response.

Tujuan Belajar 31

Peserta memahami impak dari kondisi awal pada respons.

Contoh :

$$y(n) = 0.9\, y(n-1) - 0.81\, y(n-2) + x(n)$$

Cari response unit step

Init :

$y(-1) = y(-2) = 0$

$y(-1) = y(-2) = 1$

Jawab :

Relaxed

$a_1 = 0.9 \qquad a_2 = 0.81 \qquad b_o = 1$

$$\Rightarrow Y(z) = \left(\frac{1}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}\right)\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$

$$p_1 = 0.9e^{jp/3}$$

$$p_2 = 0.9e^{-jp/3}$$

$$Y(z) = Y_{zs}(z) = \frac{0.542 - j0.049}{1 - 0.9e^{jp/3}z^{-1}} + \frac{0.542 + j0.049}{1 - 0.9e^{-jp/3}z^{-1}} + \frac{1.099}{1 - z^{-1}}$$

$\rightarrow$ y(n) =[1.099 + 1.088(0.9)^{n}cos (πn/3 -5.2^o)]u(n)

Untuk y(-1) = y(-2) = 1

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_o(z)}{A(z)} = \frac{0.09 - 0.81z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$= \frac{0.026 + j0.4936}{1 - 0.9e^{jp/3}z^{-1}} + \frac{0.026 - j0.4936}{1 - 0.9e^{-jp/3}z^{-1}}$$

$\Rightarrow$ y_{zi}(n) = 0.988(0.9)^{n}cos(πn/3 + 87$^{o)}$u(n)

$\Rightarrow$ Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)

$$= \frac{1.099}{1 - z^{-1}} + \frac{0.568 + j0.445}{1 - 0.9e^{jp/3}z^{-1}} + \frac{0.568 - j0.445}{1 - 0.9e^{-jp/3}z^{-1}}$$

$\Rightarrow$ y(n) = [.099 u(n) + 1.44(0.9)^{n}cos(πn/3 +38^o)]

Tujuan Belajar 32

Peserta dapat menghitung transien dan steady state responses dari sistem yang mengandung pole-zero.

$$y_{nr}(n) = \sum_{k=1}^{N} A_k (p_k)^n u(n)$$

$|p_k| < 1 \rightarrow y_{nr}(n)$ decays

In this case $\rightarrow y_{nr}(n) \rightarrow$ transient response

Bila pole dekat |z| = 1 $\rightarrow$ lama decay nya

$$y_{fr}(n) = \sum_{k=1}^{L} Q_k (q_k)^n u(n)$$

bila $|qk| < 1 \rightarrow y_{fr}$ decays $\rightarrow$ transient response

tapi bila $|q_k| = 1 \rightarrow y_{fr}$ sinusoid $\rightarrow$ steady state

$\downarrow$

never decays

→ supaya y(n) ss, x(n) mesti ada terus , n>0

contoh :

Cari transient dan steady state response dari

y(n) = 0.5y(n-1) + x(n)

x(n) = 10 cos (πn/4)u(n)

y(-1)= 0 → relaxed

$\rightarrow H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$ → pole p = 0.5

$\rightarrow X(z) = \frac{10(1-\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1})}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$

→ Y(z) = H(z) X(z)

$$= \frac{6.3}{1-0.5z^{-1}} + \frac{6.78e^{-j28.7^o}}{1-e^{jp/4}z^{-1}} + \frac{6.78e^{j28.7^o}}{1-e^{jp/4}z^{-1}}$$

↓ ↓

milik H(z) milik X(z)

→ $y_{nr}(n) = 6.3\ (0.5)^n u(n)$

$\rightarrow\ y^{fr}(n) = \left[6.78e^{-j28.7}(e^{jpn/4}) + 6.78e^{j28.7}e^{-jpn/4}\right]u(n)$

= 13.56 cos (πn/4 - 28.7°)u(n)n ≥ 0 → persist

7 Analisa Stabilitas Sistem

Tujuan Belajar 33

Peserta mengerti hubungan antara kondisi pole-zero sistem dengan kausalitas dan stabilitas dari sistem, melalui analisa RoC nya. Termasuk di dalamnya kasus pole-zero cancelation, dan multiple pole (pada unit circle).

Kausalitas

h(n) = 0

n < 0 → ROC eksterior dari sebuah lingkaran

LTI causal system ⇔ ROC eksterior dari lingkaran r < ∞, termasuk z = ∞

BIBO

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$\Rightarrow H(z)\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\left|z^{-n}\right|$$

$$\Rightarrow|H(z)|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|$$

Jadi bila BIBO stable, maka |z| = 1 ada di ROC, tebakannya juga benar.

BIBO stabil ⇔ |z| = 1 ∈ ROC

Bila causal → ROC eksterior r

Stabil → |z| = 1 ∈ ROC

Maka |z| > r < 1

→ semua pole harus ada di dalam unit circle

Contoh :

$$H(z)=\frac{3-4z^{-1}}{1-3.5z^{-1}+1.5z^{-2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-3z^{-1}}$$

Cari ROC dari h(n) agar a) stabil b) causal c) anticausal

Jawab :

Systems has poles z = 1/2 & z = 3

a). Stabil → ROC harus termasuk unit circle,

1/2 < |z| < 3 → $h(n) = (1/2)^n u(n) - 2(3)^n u(-n-1)$

b). Causal → ROC > |z| > 3

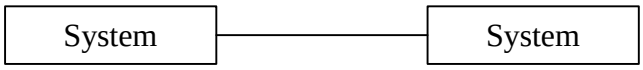
$h(n) = (1/2)^n u(n) + 2(3)^n u(n)$

c). Anti causal → ROC : |z| < 0.5

$h(n) = -(1/2)^n u(-n-1) - 2(3)^n u(-n-1)$

(the systems is unstable)

* Pole - Zero Cancellations



Contoh :

Cari unit sample response δ(n) dari sistem berikut ini :

$y(n) = 2.5y(n-1) - y(n-2) + x(n) - 5x(n-1) + 6x(n-2)$

solusi :

$$H(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2.5z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-2z^{-1})}$$

⇒ poles $p_1 = 1/2$, $p_2 = 2$

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1-5z^{-1}+6z^{2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$= z\left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-2}\right)$$

⇒ A = 5/2 B = 0

ada zero yang mengcancel z-2

Zeros : z = 2 z = 3

$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z-3}{z-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2.5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h(n) = d(n) - 2.5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n)$$

$y(n) = \frac{1}{2} y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$

$\Rightarrow$ terjadi cancelation

Cari response

$$y(n) = \frac{5}{6} y(n-1) - \frac{1}{2} y(n-2) + x(n)$$

$$\Rightarrow x(n) = d(n) - \frac{1}{3} d(n-1)$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{2} z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3} z^{-1}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} \rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$\Rightarrow$ mod $(1/3)^n$ ditekankan sebagai hasil dari pole-zero cancellation

* Multiple pole

Pole on unit circle can be dangerous

Contoh :

$$y(n) = y(n-1) + x(n)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow z_k = 1$$

bila $X(n) = U(n) \rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow z_k = 1$

$$\rightarrow Y(z) = \frac{1}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

$y(n) = (n+1)u(n)$ $\rightarrow$ unstable

kasus multiple pole :

$A_k n^b (p_k)^n u(n)$

$0 \le b \le m-1$, m orde dari pole

$(p_k)^n$ dominates n^b

$\rightarrow$ bila $|p_k| < 1 \rightarrow$ telah stabil

$\Rightarrow$ yang berguna : digital oscilators (marginaly stable)

Tujuan Belajar 34

Peserta mengerti stability test menurut teknik Schur-Cohn, dan teknik untuk orde 2.

Stability test :

$$A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + ... + a_n z^{-N}$$

roots dari A(z) harus ada dalam unit circle

(*lihat Schur-Cohn hal 213!)*

* Stabilitas untuk sistem orde-2

$\Rightarrow$ penting karena pembangun ("*basic building block*")

$$y(n) = -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) + b_o x(n)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_o}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$= \frac{b_o z^2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

$$p_1, p_2 = \frac{-a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{{a_1}^2 - 4a_2}{4}}$$

$\Delta = {a_1}^2 - 4a_2$ determinan

BIBO stable $\rightarrow |p_1| < 1 \qquad |p_2| < 1$

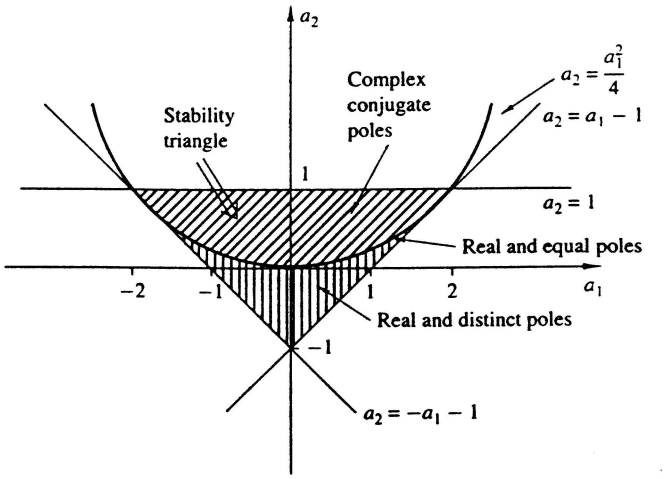
Karena $a_1 = -(p_1 + p_2) = -(p_1 p_1 + p_1 p_2)$

$a_2 = p_1 p_2$

maka $\rightarrow \quad |a_2| = |p_1 p_2| = |a_1||p_2| < 1$

dan $|a1| = 1 + a_2$

merupakan syarat kestabilan segitiga kestabilan



Gambar 13. Daerah segitiga kestabilan Schur-Cohn.

* $a_1^2 > 4a_2$

$$H(z) = \frac{A_1}{1 - p_1 z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - p_2 z^{-1}}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{b_o p_1}{p_1 - p_2} \qquad A_2 = \frac{-b_o p_2}{p_1 - p_2}$$

$$\Rightarrow h(n) = \frac{b_o}{p_1 - p_2}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right)u(n)$$

$\Rightarrow$ difference dari two decays exp. Sequence

$$a_1^2 = 4a^2 \Rightarrow p_1 = p_2 = p = -\frac{a_1}{2}$$

$$H(z) = \frac{b_o}{\left(1 - pz^{-1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow h(n) = b_o(n+1)p^n u(n)$$

↓

ramp decays exp.

8 Penutup

Demikian telah diuraikan sinyal dan sistem di domain *z*.