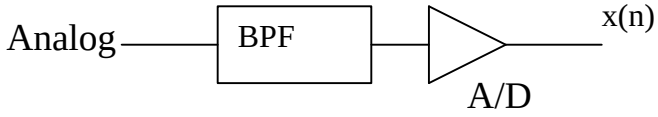
Bab 7: Beberapa Topik Lanjut

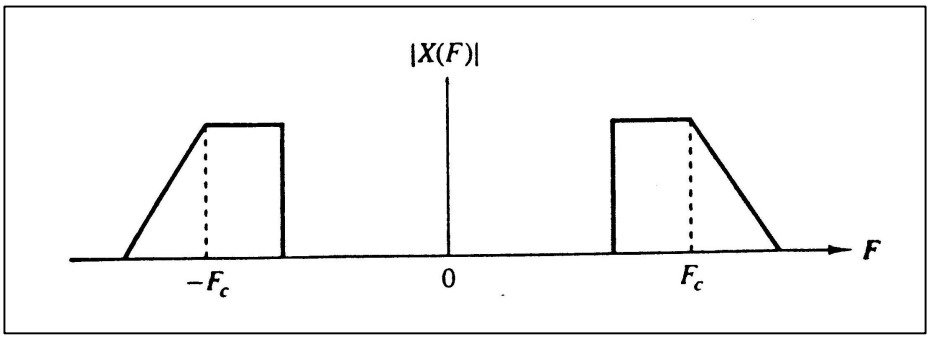
1 Representasi Low Pass dari Sinyal Bandpass

Tujuan Belajar 1

Peserta dapat melakukan sampling sinyal bandpass secara effisien, melalui teknik LP representation dari sinyal BP.

Motivasi :





Misalkan x(t) adalah band-pass signal, maka dapat dibentuk representasi matematis sebagai berikut :

$$X_+(F) = 2V(F)X(F)$$

dimana

V(F) adalah unit step function

X(F) adalah transformasi Fourier dari x(t)

maka

$$x_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_+(F)e^{j2pFt}dF$$

$x_+(t) = F^{-1}[2V(F)] * F^{-1}[X(F)]$ yaitu analytic or preenvelope of x(t)

karena

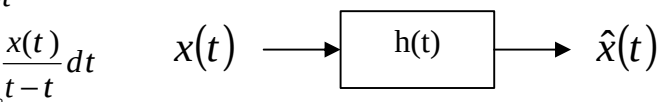
$$F^{-1}[X(F)] = x(t) \text{ dan } F^{-1}[2V(F)] = d(t) + \frac{j}{pt}$$

maka

$$x_+(t) = \left[d(t) + \frac{j}{pt}\right] * x(t)$$

$$= x(t) + j\frac{1}{pt} * x(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

bila $\hat{x}(t) \equiv \frac{1}{pt} * x(t) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{t-t}dt$



$$H(F) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2pFt}dt$$

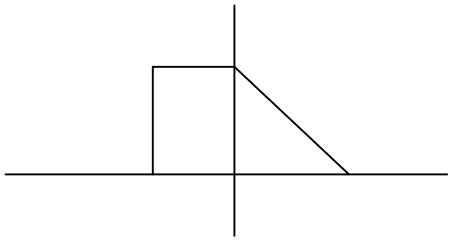
$$= \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t} e^{-j2pFt}dt = \begin{cases} -j & F > 0 \\ 0 & F = 0 \\ j & F < 0 \end{cases}$$

$$|H(F)| = 1 \qquad q(F) = \begin{cases} -\frac{1}{2}p & F > 0 \\ \frac{1}{2}p & F < 0 \end{cases}$$

terjadi beda fasa sebesar 90^o untuk semua frekuensi

Representasi lowpass dari $x_+(t)$ dapat dinyatakan sebagai :

1. $X_l(F) \equiv X + (F + F_c)$



$$x_l(t) = x + (t)e^{-j2pF_ct}$$
$$= [x(t) + j\hat{x}(t)]e^{-j2pF_ct}$$

atau $x(t) + j\hat{x}(t) = x_e(t)e^{j2pF_ct}$

$x_e(t) = u_c(t) + ju_s(t) \rightarrow$ complex

$x(t) = u_c(t)\cos 2pF_ct - u_s(t)\sin 2pF_ct$

$\hat{x}(t) = u_c(t)\sin 2pF_ct + u_s(t)\cos 2pF_ct$

Komponen frekuensi rendah $u_c(t)$ dan $u_s(t)$ dapat dilihat sebagai amplitude modulations dengan sinyal carrier masing-masing adalaah $\cos 2\pi F_ct$ dan $\sin 2\pi F_ct$. Karena komponen carrier ini dalam fasa quadrature maka $u_c(t)$ dan $u_s(t)$ disebut quadrature components dari bandpass signal x(t)

2. $x(t) = \text{Re}\{[u_c(t) + ju_s(t)]e^{j2pF_ct}\}$
$= \text{Re}\{x_e(t)e^{jpF_ct}\}$

$x_e(t)$ $\Rightarrow$ complex envelope of x(t)
$\Rightarrow$ equivalent lowpass signal

3. $x_e(t) = a(t)e^{jq(t)}$

dimana $a(t) = \sqrt{u_c^{\,2}(t) + u_s^{\,2}(t)}$ dan $q(t) = \tan^{-1}\frac{u_s(t)}{u_c(t)}$

maka $x(t) = \mathrm{Re}\left[x_e(t)e^{j2pF_ct}\right] = \mathrm{Re}\left[a(t)e^{j[2pF_ct+q(t)]}\right] = a(t)\cos\left[2pF_ct+q(t)\right]$

a(t) adalah envelope x(t) dan θ(t) adalah sudut fasa dari x(t)

Hubungan antara spektrum bandpass signal dan representasi lowpass dari BPS.

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2pFt}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{\mathrm{Re}\left[x_e(t)e^{j2pF_ct}\right]\right\}e^{-j2pFt}dt$$

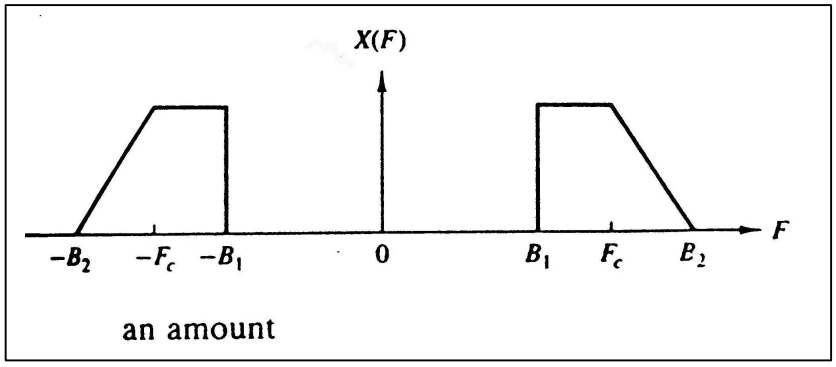
$$\mathrm{Re}(x) = \frac{1}{2}\left(x + x^*\right)$$

$$\Rightarrow X(F) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x_e(t)e^{j2pF_ct} + x_e^*(t)e^{-j2F_ct}\right]e^{-j2pFtdt}$$

$$= \frac{1}{2}\left[X_e(F-F_c) + X_e^*(-F-F_c)\right]$$

Spectrum dari X(F) dapat diperoleh dari $X_L(F)$ dengan frekuensi translasi.

Sampling BPS.



Nyquist → $2B_2$ samples/sec

→ geser $F_c = \dfrac{B_1 + B_2}{2}$

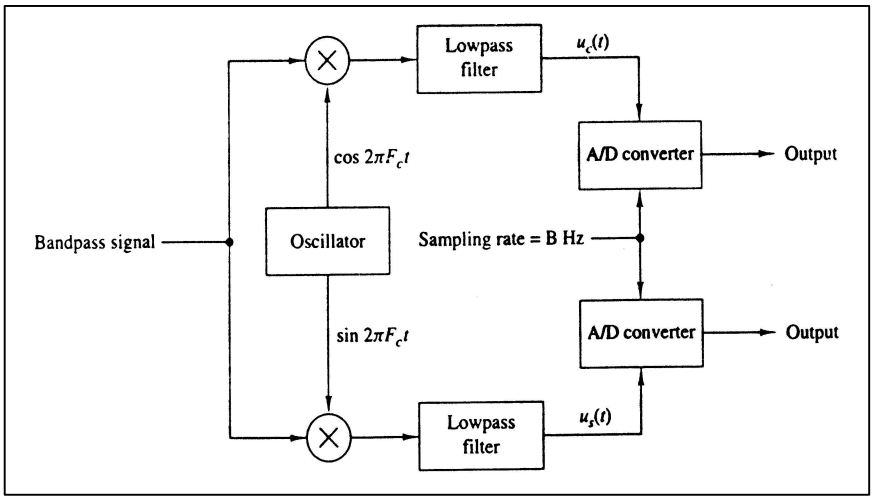
⇒ sampling terhadap low pass

⇒ shifting ⇒ $xe^{j2pF_ct} = \cos 2pF_ct + j\sin 2pF_ct$

⇒ lowpass filter to remove signals at $2F_c$

→ Bandwidth ⇒ $\dfrac{B}{2} \equiv \dfrac{B_2 - B_1}{2}$ ⇒ Nyquist B samples/sec

⇒ terdapat 2B samples/sec



Sampling x(t) at comparable rates

Let upper frequency = $F_c + B/2 = kB$

↓ positive integer

bila x(t) → sample at 2B = 1/T sample/sec

$$x(nT) = U_c(nT)\cos 2pF_c nT - U_s(nT)\sin 2pF_c nT$$

$$= U_c(nT)\cos\frac{pn(2k-1)}{2} - U_s(nT)\sin\frac{pn(2k-1)}{2}$$

karena $F_c = kB - \frac{B}{2}$ dan $T = \frac{1}{2B}$

⇒ n genap = 2m

$$x(2mT) \equiv x(mT_1) = u_c(mT_1)\cos pm(2k-1)$$

$$= (-1)^m u_c(mT_1)$$

⇒ n ganjil = 2m - 1

$$x(2mT - T) \equiv x\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right) = u_s\left(mT_1 - \frac{T_1}{2}\right)(-1)$$

- Jadi even-numbered samples of x(t) yang muncul dengan rate B samples/sec, menghasilkan samples dari LPF $u_c(t)$
- Odd-numbered samples of x(t) (juga dengan B samples per second) menghasilkan $u_s(t)$

Rekonstruksi $x_e(t)$ dari $u_c(mT_1)$

$U_s(mT_1 - T_1/2)$

Let $T_1 = 1/B$

$$\Rightarrow u_c(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_c(mT_1) \frac{\sin\left(\frac{p}{T_1}\right)(t - mT_1)}{\left(\frac{p}{T_1}\right)(t - mT_1)}$$

$$u_s(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_s(mT_1 - \frac{T_1}{2}) \frac{\sin\left(\frac{p}{T_1}\right)\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)}{\left(\frac{p}{T_1}\right)\left(t - mT_1 + \frac{T_1}{2}\right)}$$

karena $x(t) = u_c(t)\cos 2pF_c t - u_s(t)\sin 2pF_c t$

maka $x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ (-1)^m x(2mT) \frac{\sin\left(\frac{p}{2T}\right)(t - 2mT)}{p\ /\ 2T(t - 2mT)} \cos 2pF_c t + \right.$

$$\left. + (-1)^{m+1} x((2M-1)T) \frac{\sin\left(\frac{p}{2T}\right)(t - 2mT + T)}{\left(\frac{p}{2T}\right)(t - 2mT + T)} \sin 2pF_c t \right\}$$

tetapi $(-1)^m \cos 2pF_c t = \cos 2pF_c(t - 2mT)$

dan $(-1)^{m+k} \sin 2pF_c t = \cos 2pF_c(t - 2mT + T)$

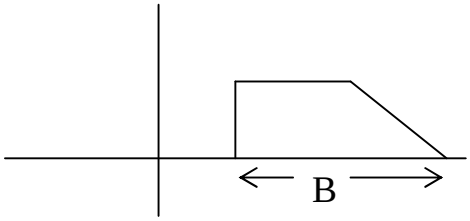
$$\Rightarrow x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT) \frac{\sin\left(\frac{p}{2T}\right)(t - mT)}{\frac{p}{2T}(t - mT)} \cos 2pF_c(t - mT)$$

T = 1/2Bs

Secara Umum :

$$F_c \geq \frac{B}{2}$$

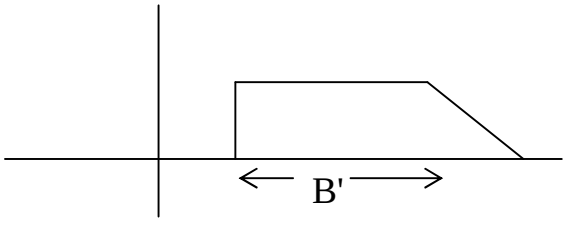
$$r = \left[\frac{F_c + \frac{B}{2}}{B} \right]$$



$$B \rightarrow B^1 \Rightarrow \frac{F_c + \frac{B}{2}}{B^1} = r$$

$$\Rightarrow F_c^1 = F_c + \frac{B}{2} - \frac{B^1}{2}$$

$$\text{cut off} = F_c + \frac{B}{2} = r.B^1$$



$$\Rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n+1) \frac{\sin\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(t - mT^1\right)}{\left(\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(t - mT^1\right)\right)} \cos 2pF_c^1\left(t - mT^1\right)$$

$\Rightarrow$ x(t) can be represented by samples taken by

$$\frac{1}{T^1} = 2B\frac{r^1}{r} \text{ s/s, di mana}$$

$$\mathrm{r}^1 = \frac{F_c + \frac{B}{2}}{B} = \frac{F_c}{B} + \frac{1}{2} \text{ dan } r = \left[r^1\right]$$

Jadi bila $F_c + \frac{B}{2}$ is not rB, sampling rate musti naik by $\frac{r^1}{r}$

Tetapi begitu F_c/B naik, $\frac{r^1}{r} \rightarrow 1$ % increase tends to ϕ of sampling rate

Ctt.

$$u_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x\left(2nT^1\right) \frac{\sin\left(\frac{p}{2T^1}\right)\left(t - 2nT^1\right)}{\left(\frac{p}{2T^1}\right)\left(t - 2nT^1\right)}$$

dan $$u_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+r+1} x\left(2nT^1 - T^1\right) \frac{\sin\left(\frac{p}{2T^1}\right)\left(t - 2nT^1 + T^1\right)}{\left(\frac{p}{2T^1}\right)\left(t - 2nT^1 + T^1\right)}$$

$r = [r^1]$

$\Rightarrow 2B \le F_s < 4B$

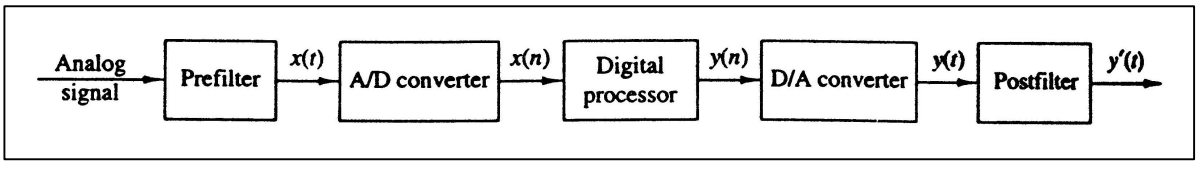
$\downarrow$ $\downarrow$ bila r = 1 $r^1 \approx 2$ (worst condition)

bila $F_c + B/2 = rB$

2 Pemrosesan Sinyal Analog Secara Digital

Tujuan Belajar 2

Peserta dapat melakukan pemrosesan sinyal waktu kontinu di domain waktu diskrit.



Gambar diatas adalah konfigurasi umum pemroses digital dari sinyal analog. Pertama-tama yang perlu diperhatikan adalah besarnya bandwidth dari sinyal yang akan diproses, karena besarnya bandwidth menentukan sampling rate minimum.

Prefilter, adalah sebuah antialiasing filter yaitu filter analog dengan dua fungsi. Pertama, memastikan bahwa bandwidth dari sinyal yang akan disampling terbatas pada frekuensi yang telah ditentukan, jadi semua komponen frekuensi diatas Fs/2 diredam agar distorsi sinyal akibat aliasing dapat dihilangkan. Fungsi kedua antialiasing filter adalah untuk membatasi spektrum noise dan interferensi lainnya.

Setelah menentukan prefilter dan memilih sampling rate yang dikehendaki, selanjutnya adalah merancang algoritma pemrosesan sinyal. Pemilihan sampling rate Fs = 1/T, dimana T adalah interval sampling, tidak sekedar menentukan frekuensi tertinggi yang akan diproses tetapi juga sebagai faktor skala yang berpengaruh pada spesifikasi filter digital dan sistem waktu diskrit yang diproses.

Contoh :

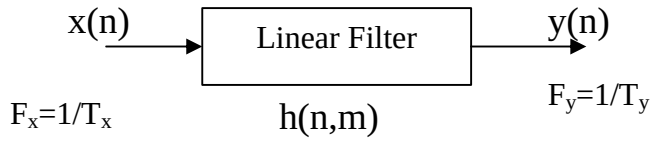
Terdapat sinyal analog dengan bandwidth 3000 Hz dan disampling pada 8000 Hz, hendak dirancang sebuah differensiator. Dalam hal ini, Fs = 8000 Hz mempunyai folding frequency 4000 Hz, yang dalam sistem waktu diskrit sesuai dengan $\omega = \pi$. Jadi bandwidth sinyal 3000 Hz sesuai dengan frekuensi $\omega_c = 0.75\pi$. Jadi, differensiator yang dirancang akan mempunyai passband pada $0 \le |\omega| \le 0.75\pi$.

3 Multirate Signal Processing

Tujuan Belajar 3

Peserta dapat menjelaskan motivasi, definisi dan untung-rugi teknik multirate DSP, termasuk konversi sampling rate.

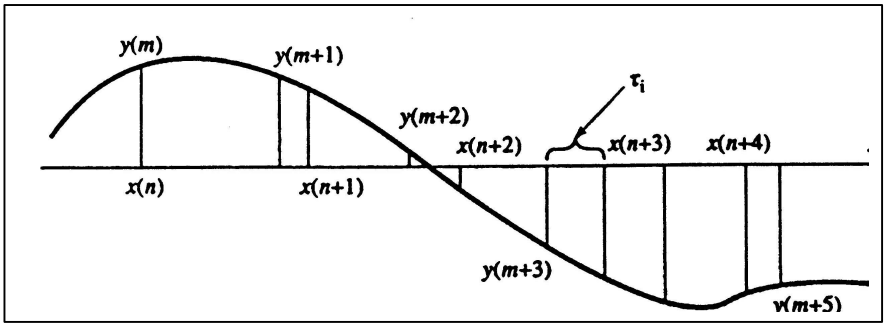
Sampling rate conversion dapat dilihat sebagai sebuah proses linear filtering



Tujuannya adalah untuk merubah frekuensi sampling

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{I}{D} \quad \rightarrow \text{Relatively Prime Integers}$$

Sampling rate conversion dapat dianggapa sebagai proses digital resampling dari sinyal analog yang sama.



y(m) adalah versi x(n) dengan waktu tergeser. Realisasi dapat dilakukan dengan menggunakan linear filter dengan

- flat magnitude response
- linear phase response

$\Rightarrow e^{-jwt_i}$

$\downarrow$ time delay

$\Rightarrow$ delay τ_i berbeda dari sample ke sample

$\Rightarrow$ gunakan sejumlah $e^{-j\omega\tau I}$ untuk semua τ_I

Sampling rate convesion dapat berupa desimasi (down sampling) dengan faktor D atau interpolasi (up sampling) dengan faktor I.

Tujuan Belajar 4

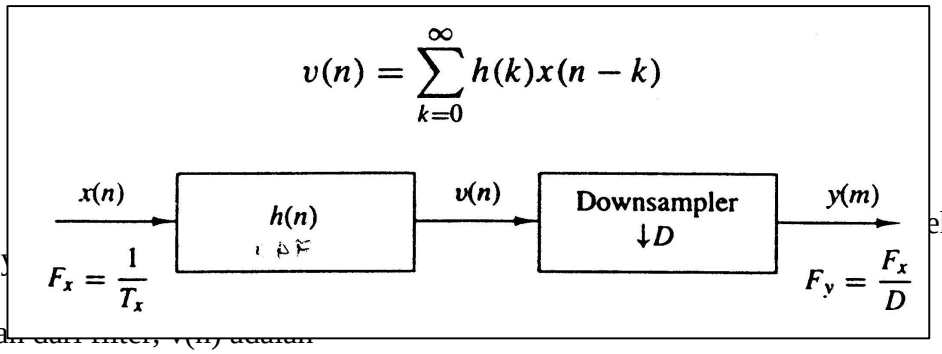
Peserta mengerti proses desimasi dengan faktor D, beserta karakteristik di domain frekuensi

Misal x(n) dengan spektrum X(ω) ingin dilakukan down-sampling dengan faktor D

X(ω) non zero $0 \le |\omega| \le \omega$

$|F| \le F_x/2$

Bila x(n) langsung disubsampling maka terjadi aliasing. Jadi x(t) difilter dulu agar bandwitdth menjadi $F_{max} = F_x/2D$ atau $\omega_{max} = \pi/D$



Karena [illegible] eh ada di daerah y[illegible]

Keluaran dari filter, v(n) adalah

$$v(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

Down-sampling dengan faktor D

$$y(m) = V(mD)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(mD-k)$$

$\rightarrow$ time variant system]

$x(n) \rightarrow y(m)$

$x(n-n_o) \rightarrow y(n-n_o)$ kecuali bila $n_o = kD$

Karakteristik frekuensi :

Misalkan $\hat{V}(n) = \begin{cases} V(n) & \text{n} = 0, \pm \text{D}, \pm 2\text{D} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

maka

$$\hat{v}(n) = v(n) \times p(n)$$

$\uparrow$ periodic train of impulses

p(n) dengan perioda D

$$p(n) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j2pkn/D} \quad \leftarrow \text{Fourier Series}$$



D=3

Jadi $\hat{v}(n) = v(n)\,p(n)$ dan $y(m) = v(mD) = v(mD)\,p(mD) = v(mD)$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y(m)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{v}(mD)z^{-m}$$

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{v}(m)z^{-m/D}$$

karena $\hat{V}(m) = 0$ kecuali pada kD

maka $Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left[\frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} e^{j2pmk/D}\right]z^{-m/D}$

$$Y(z) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m)\left(e^{-j2pk/D}z^{1/D}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{D}}\sum_{k=0}^{D-1} V\left(e^{-j2pk/D}z^{1/D}\right)$$

$$= \frac{1}{\text{D}}\sum_{k=0}^{D-1} H_D\left(e^{-j2pk/D}z^{1/D}\right)X\left(e^{-j2pk/D}z^{1/D}\right)$$

karena $\text{V(z)} = \text{H}_\text{D}\text{(z)X(z)}$ pada $\text{z} = \text{e}^{\text{j}\omega}$ maka $w_y = \frac{2pF}{F_y} = 2pFT_y$

$$F_y = \frac{F_x}{D} \rightarrow w_y = Dw_x \quad \text{karena } w_x = \frac{2pF}{F_x} = 2pFT_x$$

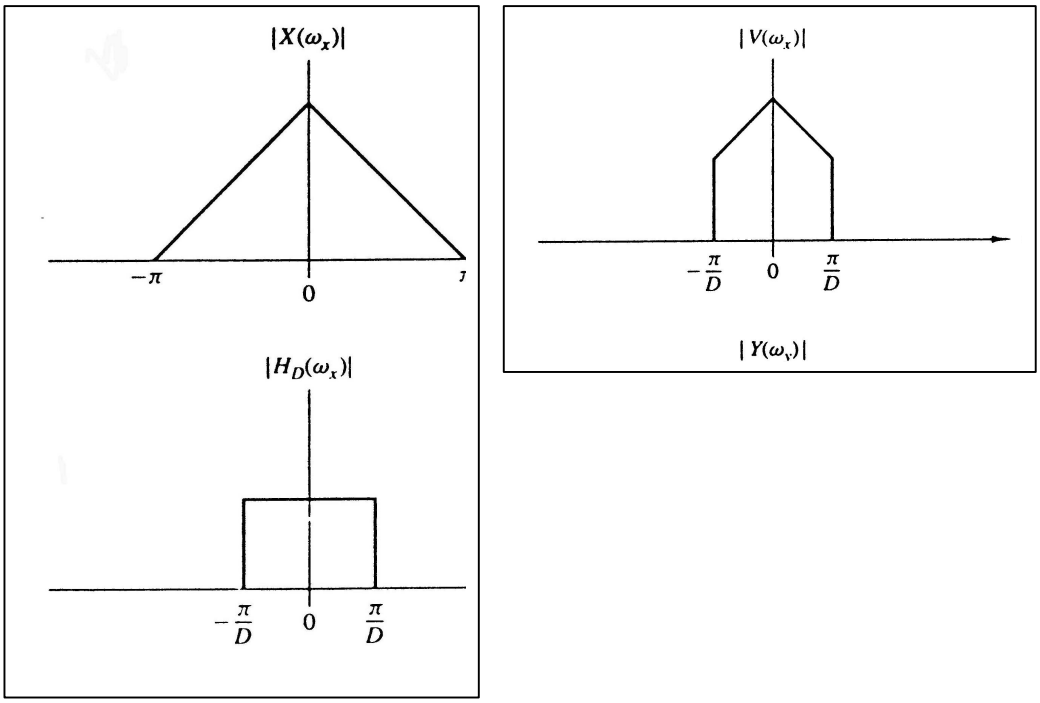
down sampling $\Rightarrow 0 \le |w_x| \le \frac{p}{D}$ ditarik ke $0 \le |w_y| \le p$

Jadi $Y(wy) = \frac{1}{D}\sum_{k=0}^{D-1} H_D\left(\frac{w_y - 2pk}{D}\right)X\left(\frac{w_y - 2pk}{D}\right)$

Bila H_D didesain dengan baik, tidak terjadi aliasing

$$Y(wy) = \frac{1}{D}H_D\left(\frac{w_y}{D}\right)X\left(\frac{w_y}{D}\right) = \frac{1}{D}X\left(\frac{w_y}{D}\right)$$

$$0 \le |\omega_y| \le \pi$$



Tujuan Belajar 5

Peserta mengerti proses interpolasi dengan faktor I, beserta karakteristik di domain frekuensi

Interpolasi adalah mengisi mengisi I-1 sample diantara sample dengan nilai 0.

$$v(m) = \begin{cases} x(m/I) & m = 0, \pm I, \pm 2I, \ldots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

rate v(m) = rate y(m)

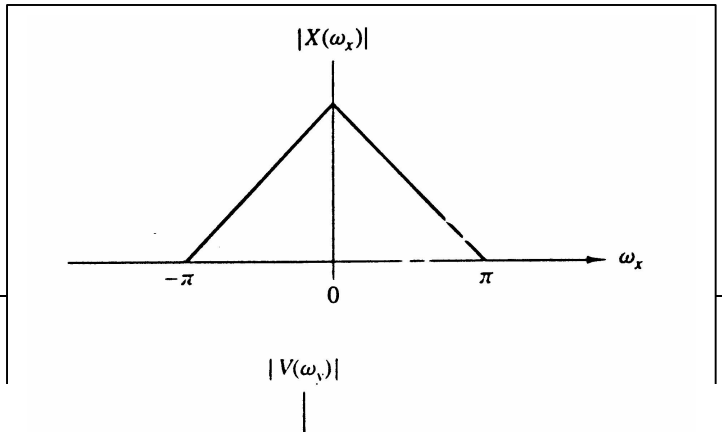
$$V(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-m}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} v(m) z^{-mI} = X\left(z^{I}\right)$$

$$\Rightarrow V(w_y) = X(w_y I)$$

relatif terhadap F_y, $w_y = 2pF / F_y$

$$\Rightarrow F_y = IF_x \rightarrow w_y = \frac{w_x}{I}$$



$$Y(w_y) = \begin{cases} CX(w_y I) & 0 \le |w_y| \le \dfrac{p}{\mathrm{I}} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

C dipilih agar y(m) = X(m/I) untuk m = 0, ±1, ±2, ±…
Pada m = 0

$$y(0) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} Y(w_y)dw_y = \frac{C}{2p}\int_{-p/I}^{p/I} X(w_y I)dw_y$$

karena $\omega_y = \omega_x/I$,

$$y(o) = \frac{C}{I}\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} X(w_x)d(w_x) = \frac{C}{I}x(o)$$

$$\Rightarrow C = I$$

Akhirnya,

$$y(m) = V(n) * h(n)$$

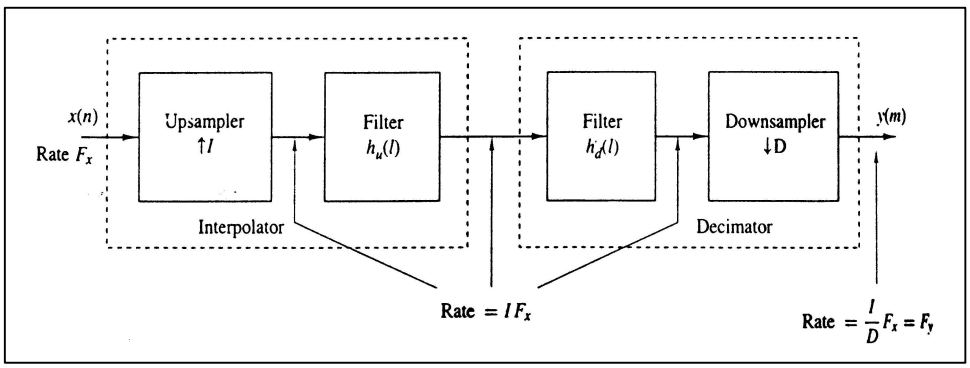
$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-k)v(k)$$

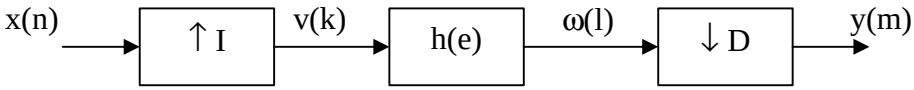
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(m-kI)x(k)$$

karena v(k) = 0, kecuali k = nI

Tujuan Belajar 6

Peserta dapat melakukan konversi sampling rate dengan faktor rasional I/D





$$H(w_v)=\begin{cases} I & 0\le|w|\le\min(p/D,p/I) \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \quad \text{dimana} \quad w_v=\frac{2p\mathrm{F}}{\mathrm{F_v}}=\frac{2pF}{IF_x}=\frac{w_x}{I}$$

$$V(l)=\begin{cases} x\left(\frac{l}{I}\right) & l=0,\pm I,\pm 2I,... \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$