BAB II

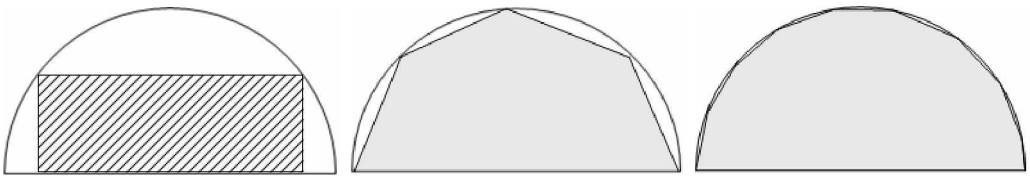
LANDASAN TEORI

2.1 Sejarah Kalkulus

Kalkulus integral terlahir lebih dari 2.000 tahun yang lalu pada waktu bangsa Yunani mencoba menentukan luas dengan suatu proses yang mereka sebut dengan metode pengeringan. Gagasan yang penting dari metode ini sangat sederhana dan dapat dilukiskan dengan singkat sebagai berikut:

> "Diberikan suatu daerah yang luasnya akan ditentukan, kemudian kita buat di dalamnya suatu daerah poligonal yang mendekati daerah yang diberikan dan kita dapat menghitung luasnya dengan mudah. Kemudian dipilih daerah poligonal yang lain yang memberikan suatu pendekatan yang lebih baik, dan kita lanjutkan proses tersebut dengan mengambil poligon-poligon dengan sisi-sisi yang semakin banyak, yang diistilahkan mencoba untuk mengeringkan daerah yang diberikan."

Metode ini pernah sukses digunakan oleh Archimedes untuk mendapatkan rumus-rumus eksak untuk luas-luas lingkaran dan bangun-bangun khusus yang lain. Metode pengeringan untuk setengah lingkaran dapat dilihat pada gambar 2.1.



Gambar 2.1 Pencarian luas setengah lingkaran

Perkembangan dari metode ini, di luar apa yang didapat oleh Archimedes, maka harus ditunggu sampai 18 abad baru digunakan simbol-simbol dan notasi-notasi aljabar sehingga menjadi salah satu bagian dari ilmu matematika. Aljabar elementer yang dikenal di sekolah lanjutan saat ini tidak dikenal sama sekali di zaman Archimedes.

Suatu percobaan yang perlahan-lahan tetapi revolusioner, dalam perkembangan notasi matematika di mulai pada abad ke 16 sesudah Masehi. Sistem bilangan dari bangsa Romawi yang sulit digantikan dengan huruf-huruf Hindu-Arabia yang digunakan sampai sekarang. Dan secara berangsur-angsur pula keuntungan pemakaian notasi dan simbol dalam matematika diakui lebih menguntungkan. Dalam periode yang sama ini, hasil-hasil yang gemilang dari ahli-ahli matematika Italia, seperti Tartag, Cardano, Ferrari dalam menentukan solusi persamaan kuadrat, persamaan pangkat tiga dan menstimulasikan banyak kegiatan dalam matematika memberikan dorongan pada pertumbuhan dan penerimaan dari suatu bahasa matematika yang baru dan lebih baik. Dengan pengenalan yang leibh luas, maka metode pengeringan diperhatikan kembali, dan sejumlah hasil-hasil baru dikemukakan pada abad ke 16 oleh perintis-perintis seperti: Cavalieri, Toricelli, Fermat, Pascal dan Waltes.

Secara setahap demi setahap metode pengeringan lebih dikenal sebagai Kalkulus Integral, suatu disiplin ilmu yang mempunyai kekuatan yang cukup besar, dengan berbagai pengunaan yang tidak hanya di bidang ilmu ukur saja, melainkan juga untuk bidang yang lain yang lebih luas. Cabang dari matematika ini yang bersifat berpegang pada metode pengeringan, menerima suatu

perkembangan yang terbesar pada abad ke 17 ketika Isaac Newton (1642-1727) dan Goltfried Leibniz (1646-1716) mendapat penemuan-penemuan baru dan perkembangannya berlangsung terus dengan baik sampai pada abad ke-19.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) adalah seorang jenius universal, seorang pakar dalam hukum agama, filsafat, kesusasteraan, politik, geologi, sejarah dan matematika. Lahir di Leipzig, Jerman, ia mendaftar di Universitas Leipzig dan menggondol doktor dari Universitas Altdrof. Seperti Decartes, yang karyanya ia pelajari, Leibniz mencari suatu metode universal dengan mana ia dapat memperoleh pengetahuan dan memahami kesatuan sifat-sifat dasarnya. Salah satu keinginan besarnya adalah mendamaikan keyakinan Katolik dan Protestan.

Bersamaan dengan Isaac Newton, ia membagi penghargaan untuk penemuan kalkulus. Masalah prioritas menyebabkan pertentangan yang tidak henti-hentinya antara pengikut dua orang besar ini, satu Inggris, yang lainnya Jerman. Sejarah menjadi hakim bahwa Newtonlah yang pertama mempunyai pemikiran utama (1665-1666), tetapi bahwa Leibniz menemukan mereka secara tersendiri selama tahun (1673-76). Dengan kebesaran itupun, Leibniz tidak menerima kehormatan seperti yang dicurahkan pada Newton. Ia meninggal sebagai orang kesepian, pemakamannya hanya dihadiri seorang pelayat yaitu sekretarisnya.

Mungkin Leibnizlah pencipta lambang-lambang matematis terbesar. Kepadanya kita berhutang nama-nama *kalkulus diferensial* dan *kalkulus integral*, sama halnya seperti lambang-lambang baku *dy* / *dx* untuk turunan dan simbol **«**

untuk integral. Istilah fungsi dan penggunaan secara konsisten dari simbol ‘=’ untuk kesamaan merupakan sumbangan-sumbangan lainnya. Kalkulus berkembang jauh lebih cepat di daratan Eropa daripada di Inggris, sebagian besar disebabkan oleh keunggulan perkembangannya.

2.2 Penerapan Kalkulus

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi (iptek) yang dicapai pada saat ini, terutama kemajuan pada abad-abad terakhir, pada dasarnya tidak terlepas dari akibat dari kemajuan matematika sebagai alat bantu yang sangat penting. Berbagai cabang matematika seperti Kalkulus Diferensial, ataupun Integral adalah merupakan senjata yang tepat dan sangat ampuh untuk menggarap berbagai problema yang timbul dalam fisika, kima, biologi dan berbagai cabang ilmu yang lain baik eksak maupun yang non-eksak.

Dengan kecepatan berapakah sebuah roket harus ditembakkan ke atas agar ia tak pernah lagi kembali ke bumi, dan berapa kecepatan mengorbitkan Appolo agar pada saat yang tepat ia dapat mendarat di Bulan. Jika suatu bakteri berkembang biak dengan kecepatan yang sebanding dengan banyaknya bakteri pada suatu saat dan jika populasinya menjadi dua kali dalam satu jam, berapa banyak bakteri yang berkembang selama dua jam. Dan jika sebuah gaya sebesar 10 Newton meregangkan suatu benang plastik sepanjang satu centimeter, berapakah gaya yang dibutuhkan untuk meregangkan benang tersebut sampai 10 centimeter.

Contoh-contoh yang dikemukakan di atas, yang diambil dari berbagai bidang disiplin ilmu, menggambarkan berbagai persoalan yang dapat dijawab dengan matematika, terutama kalkulus. Jadi kalkulus lebih dari suatu alat teknik, bahkan ia merupakan suatu sumber gagasan-gagasan yang memikat dan mengagumkan yang telah menarik perhatian dari berbagai ahli pikir selama berabad-abad. Para ahli pikir harus bekerja dengan gagasan-gagasan mengenai kecepatan, luas, isi kecepatan tumbuh kekontinuan, garis singgung serta konsep-konsep yang lain dari berbagai bidang. Kalkulus memaksa kita untuk berhenti dan berpikir dengan baik tentang arti dari konsep-konsep ini. Suatu aspek lain yang menarik perhatian dari subjek ini adalah kekuatan mempersatukannya. Gagasan-gagasan di atas dirumuskan dalam suatu bentuk perumusan yang khusus yang disertai dengan pemecahan masalahnya.

Kalkulus harus bekerja dengan perumusan yang tepat dan jawaban dari persoalan yang khusus dalam kalkulus. Untuk ini kita bisa bekerja denga ndua konsep, yakni Kalkulus Integral dan Kalkulus Diferensial.

Kalkulus Integral bekerja dengan persoalan luas dan volume sementara kalkulus diferensial banyak berbicara dengan garis singgung.

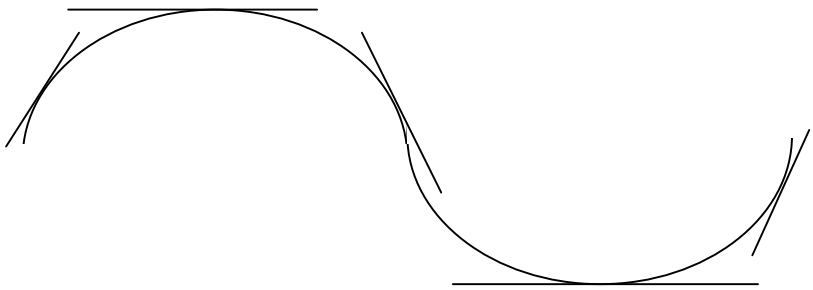
2.3 Diferensial (Turunan)

Newton dan Leibniz secara terpisah satu dengan yang lain mengembangkan ide mengenai kalkulus integral sampai pada suatu keadaan dimana sebelumnya persoalan tersebut hanya dipecahkan dengan metoda-metoda biasa saja. Karya-karya mereka terutama mengenai fakta bahwa mereka mampu

menggabungkan kalkulus integral dengan konsep kalkulus yang lain, yakni kalkulus diferensial.

Ide pokok dari kalkulus diferensial adalah pengertian turunan (*derivative*). Seperti halnya integral, turunan berasal dari suatu problema dalam geometri, yakni persoalan mencari garis singgung di suatu titik pada suatu kurva. Tetapi agak berbeda dengan integral, turunan berkembang sangat terlambat dalam sejarah matematika. Pada permulaan abad ke-17, ketika seorang ahli matematika Perancis bernama Pierre de Fermat mencoba menentukan maksimum dan minimum beberapa fungsi khusus, konsep turunan belumlah dirumuskan.

Fermat memberikan ide yang sangat sederhana, yakni berprinsip pada mencari garis singgung pada suatu kurva. Misalkan suatu kurva pada gambar 2.2, diandaikan bahwa setiap titik dari kurva mempunyai arah tertentu yang ditunjukkan oleh garis-garis singgung yang mempunyai arah tertentu.



Gambar 2.2 Jenis – Jenis Garis Singgung pada Kurva

Fermat memperhatikan bahwa titik-titik tertentu pada kurva mempunyai suatu maksimum atau suatu minimum, seperti yang dilukiskan pada gambar dengan absis x_0 dan x_1, garis singgung haruslah horizontal. Jadi persoalan mencari

harga ekstrim ini tergantung pada jawaban persoalan yang lain yakni mencari garis singgung yang horizontal.

Hal ini menimbulkan ide yang lebih luas, yakni menentukan arah dari garis singgung-garis singgung di suatu titik yang sembarang pada kurva. Ini adalah suatu usaha untuk memecahkan persoalan umum yang menjadi dasar dari pengertian turunan. Sepintas lalu tampaknya tidak ada hubungan sama sekali antara pesoalan mencari luas daerah yang berada di bawah suatu kurva dengan persoalan mencari garis singgung di suatu titik pada kurva. Orang pertama yang mengetahui hubungan kedua persoalan ini adalah Isaac Barrow (1630 – 1677), bekas guru dari Newton. Tapi bagaimanapun peranan Newton dan Leibniz-lah yang menentukan bagaimana pentingnya masalah tersebut, yang dapat membuka suatu era baru dalam perkembangan matematika.

Turunan mula-mula memang hanya ditujukan untuk mencari garis singgung suatu kurva, tetapi ternyata kemudian sangat berguna untuk menyelesaikan problema-problema yang ada hubungannya dengan kecepatan, atau secara lebih umum kecepatan perubahan suatu fungsi. Banyak persoalan-persoalan fisika maupun bidang lain yang akhirnya menggunakan konsep turunan untuk menyelesaikan masalahnya.

Bila kita melihat keadaan di sekeliling kita, maka akan banyak melihat adanya perubahan-perubahan misalnya,

a. Banyaknya kelahiran per tahun.
b. Perubahan keadaan lingkungan.
c. Perubahan jumlah penduduk.

Untuk mengetahui suatu sistem yang sedang berubah, di samping memperhatikan faktor-faktor yang ada (yang dianggap penting) dalam sistem tersebut perlu diperhatikan pula pengaruh dari suatu perubahan suatu faktor pada faktor yang lain. Selain itu, juga harus diperhatikan cepat dan lambatnya perubahan dari suatu faktor, sebagai akibat dari perubahan pada faktor lain. Dalam persoalan inilah konsep turunan memegang peranan yang sangat penting. Untuk lebih jelasnya ikuti contoh berikut ini,

a. Misalkan batang besi dipanaskan, maka akan bertambah panjang. Dalam contoh ini kita dapat mengatakan mengenai perubahan panjang dalam suatu selang suhu tertentu atau mungkin juga mengenai lajunya perubahan panjang pada suhu tersebut.
b. Mengenai hukum gravitasi Newton, kita mengetahui bahwa gaya tarik antara dua benda, berbanding terbalik dengan kuadrat jarak kedua benda tersebut. Dalam hal ini perubahan jarak mengakibatkan besarnya perubahan gaya tarik.

2.3.1 Diferensial dari Fungsi

Diferensial dari fungsi f sering dilambangkan dengan simbol f' yang nilainya pada sembarang bilangan c dapat dicari dengan persamaan berikut,

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Suatu fungsi dikatakan dapat dideferensialkan apabila fungsi itu dapat didiferensialkan di setiap titik pada wilayah domainnya. Diferensial dari beberapa fungsi dasar matematika dapat dilihat pada penjabaran berikut ini,

a. $y = x^n$ à $y' = n \cdot x^{n-1}$

   Cth: $y = x^3$ à $y' = 3x^2$

b. $y = u^n$, dimana $u = f(x)$ à $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

   Cth: $y = {}^1/_3 (x^2 + 6)^{1.5}$

   Misalkan: $u = (x^2 + 6)$, maka turunan dari y adalah:

   $y' = {}^1/_3 \cdot 1.5 \cdot (x^2 + 6)^{0.5} \cdot (2x)$

   $y' = {}^1/_3 \cdot 1.5 \cdot (x^2 + 6)^{0.5} \cdot (2x)$

   $y' = (x^2 + 6)^{0.5} \cdot x$

c. $y = u \cdot v$ à $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

   Cth: $y = (x^3 + 5) \cdot (x^2 - 2)$

   Misalkan: $u = (x^3 + 5)$, maka $u' = 3x^2$,

   $v = (x^2 - 2)$, maka $v' = 2x$

   $y' = (3x^2) \cdot (x^2 - 2) + (x^3 + 5) \cdot (2x)$

   $y' = 3x^4 - 6x^2 + 2x^4 + 10x$

   $y' = 5x^4 - 6x^2 + 10x$

d. $y = u / v$ à $y' = (u' \cdot v - u \cdot v') / v^2$

   Cth: $y = (x^3 + 5) / (x^2 - 2)$

   Misalkan: $u = (x^3 + 5)$, maka $u' = 3x^2$,

   $v = (x^2 - 2)$, maka $v' = 2x$

   $y' = ((3x^2) \cdot (x^2 - 2) + (x^3 + 5) \cdot (2x)) / (x^2 - 2)^2$

   $y' = (3x^4 - 6x^2 + 2x^4 + 10x) / (x^4 - 4x^2 + 4)$

   $y' = (5x^4 - 6x^2 + 10x) / (x^4 - 4x^2 + 4)$

e. $y = e^x$ à $y' = e^x$

f. $y = e^{f(x)}$ à $y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

Cth: $y = e^{(x \wedge 3 + 5)}$

Misalkan: $f(x) = (x^3 + 5)$, maka $f(x)' = 3x^2$

$y' = e^{(x \wedge 3 + 5)} \cdot 3x^2$

g. $y = ln\ x$ à $y' = 1 / x$

h. $y = ln\ f(x)$ à $y' = 1 / f(x) \cdot f'(x)$

Cth: $y = ln\ (x^3 + 5)$

Misalkan: $f(x) = (x^3 + 5)$, maka $f(x)' = 3x^2$

$y' = (1 / (x^3 + 5)) \cdot 3x^2$

$y' = 3x^2 / (x^3 + 5)$

2.3.2 Penerapan Diferensial

Diferensial dapat diterapkan untuk menyelesaikan beberapa persoalan yang sering dihadapi dalam kehidupan sehari-hari antara lain,

1. Masalah garis singgung pada kurva.

   Garis singgung pada suatu titik pada kurva dapat dicari dengan terlebih dahulu mencari tanjakan (*gradien*) garis di titik tersebut. *Gradien* garis singgung pada kurva dapat dicari dengan terlebih dahulu mencari persamaan *gradien* dengan mendiferensialkan fungsi kurva tersebut, kemudian substitusikan nilai koordinat absis (sumbu *x*) pada titik tersebut ke dalam persamaan *gradien* tersebut sehingga didapat nilai *gradien* garis. Secara matematis dapat dirumuskan sebagai berikut,

$$m(x) = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx}$$

   Titik (x_1, y_1) à $m(x_1) = f'(x_1)$.

2. Masalah perubahan kecepatan.

   Kegunaan turunan lainnya adalah untuk menerangkan kecepatan perubahan. Dalam hal ini ditinjau dari segi luas, perubahan yang dimaksud dapat menyangkut beberapa hal. Misalnya dalam mekanika, perubahan tersebut bisa menyangkut perpindahan, kecepatan ataupun percepatan. Misalkan ditinjau suatu partikel yang bergerak sepanjang kurva atau garis lurus. Untuk mendapat gambaran lengkap mengenai gerak partikel tersebut diciptakan besaran-besaran seperti kecepatan rata-rata, kecepatan sesaat, percepatan dan besaran lainnya.

   Anggap suatu partikel bergerak sepanjang garis lurus. Gerak yang demikian disebut gerak lurus. Misalkan partikel tersebut bergerak dari kiri ke kanan. Misalkan *s* merupakan jarak dari titik tersebut dari titik semula pada saat *t*, maka *s* sebagai fungsi dari *t* dapat dituliskan sebagai,

   $$\boxed{s = f(t)}$$

   adalah menyatakan jarak titik 0 (titik asal mula partikel bergerak) ke titik setelah bergerak selama *t*. Persamaan $s = f(t)$ dikatakan persamaan dari partikel. Untuk lebih jelasnya diambil contoh berikut,

   $$s = t^2 + 2t - 3,\ t = 0$$

   Hal ini berarti,

   $t = 0$ à $s = -3$, partikel berada di 3 satuan panjang sebelah kiri dari titik 0.

   $t = 1$ à $s = 0$, partikel tepat berada di titik 0.

   $t = 2$ à $s = 5$, partikel berada di 5 satuan panjang sebelah kanan 0.

   Kalau digambarkan pada grafik lintasan maka didapat gambar 2.3.



Gambar 2.3 Grafik Lintasan

Pada interval $t = 1$ dan $t = 2$ perubahan jaraknya adalah 5 – 0 = 5, sehingga kecepatan rata-ratanya adalah 5/(2 – 1) = 5 satuan panjang / satuan waktu. Sedangkan kecepatan rata-rata dalam interval $t = 0$ sampai $t = 2$ sebesar : (5 –(-3)) / (2 – 0) = 4 satuan panjang / satuan waktu. Ternyata kecepatan rata-rata akan selalu berubah untuk waktu yang berlainan. Kecepatan partikel yang bergerak dengan persamaan gerak $s = f(t)$ dalam interval waktu t_1, t_2 diberikan oleh rumus,

$$v(t_1, t_2) = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Dalam kenyataannya, kecepatan rata-rata tidak pernah tetap besarnya, sebagai contoh seseorang mengendarai sepeda motor sepanjang 70 km dalam waktu 2 jam, maka kecepatan rata-rata dalam interval ini adalah 70/2 = 35 km/jam. Dalam kenyataannya, orang tersebut akan mengendarainya dalam berbagai kecepatan yang berbeda setiap saat. Artinya setiap saat kecepatan berubah, dan kita dapat menerangkan gerak partikel apabila dapat mencari kecepatan yang berubah setiap saat itu. Untuk itu, diperkenalkan konsep kecepatan sesaat, yakni kecepatan partikel pada waktu tertentu. Ini didapat dengan mengamati kecepatan rata-rata pada suatu interval waktu tertentu dimana interval waktu dibuat sekecil mungkin. Misalkan pada contoh di atas, kita buat interval waktu

$[t_1, t_2]$ sekecil mungkin atau untuk $t_2 \to t_1$ atau $(t_2 - t_1) \to 0$. Maka didapat persamaan matematika berikut,

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Misalkan $(t_2 - t_1) = \Delta t$, maka untuk $t_2 \to t_1$ didapat $\Delta t \to 0$, sehingga kecepatan sesaat dapat ditulis sebagai,

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$$

Kecepatan sesaat bisa positif, bisa negatif, tergantung pada arah gerak partikel. Arah ke kanan dianggap positif dan ke kiri negatif. Besarnya kecepatan sesaat, disebut besaran kecepatan atau laju partikel, adalah nilai mutlak kecepatan pada suatu saat.

2.4 Integral (Anti Turunan)

Jika saya mengenakan sepatu saya, saya dapat melepasnya lagi. Operasi yang kedua menghapuskan yang pertama, mengembalikan sepatu pada posisinya yang semula. Kita katakan dua operasi tersebut adalah operasi balikan (inversi). Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan seperti penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar, serta penarikan logaritma dan penghitungan logaritma. Kebalikan dari pendiferensialan (penurunan) yaitu anti pendiferensialan (anti turunan) yang

diberi nama integral. Secara garis besar, integral terdiri dari dua macam, yaitu integral tak tentu dan integral tentu.

2.4.1 Integral Tak Tentu

Misalkan kita harus menentukan suatu lengkungan yang garis singgungnya pada tiap titik (x,y) pada lengkungan tersebut, memiliki koefisien *gradien* $3x^2$. Maka untuk langkah pertama kita cari $y = f(x)$ sedemikian rupa sehingga turunannya,

$$D_x y = 3x^2$$

Kita tahu bahwa $3x^2$ adalah hasil penurunan dari x^3, maka dapat disimpulkan bahwa

$$y = x^3$$

merupakan persamaan lengkungan yang garis singgungnya di tiap titik pada lengkungan mempunyai *gradien* $3x^2$. Sehingga didapat bahwa anti turunan dari suatu fungsi f adalah suatu fungsi sembarang F yang turunannya F' adalah sama dengan f. Jadi,

$$F' = f$$

Kita melihat bahwa proses pencarian turunan fungsi dengan proses pencarian anti turunannya merupakan dua proses yang berlawanan (berkebalikan). Jika tiap fungsi memiliki satu turunan, maka ia mungkin mempunyai lebih dari satu anti turunan. Istilah lain untuk anti turunan adalah primitif atau fungsi primitif atau disebut juga fungsi integral. Contohnya,

1. Fungsi $F(x) = x^3$ adalah anti turunan dari $f(x) = 3x^2$, karena $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
2. Fungsi $F(x) = x^3 - 2$ dan fungsi $x^3 + 6$ juga merupakan anti turunan dari $f(x) = 3x^2$.

Jadi, jelas bahwa suatu fungsi turunan, mungkin memiliki lebih dari satu fungsi primitif atau anti turunan. Sehingga muncul dua dalil berikut ini,

1. Jika $H'(x) = 0$ untuk semua x dalam selang buka (a,b), maka $H(x) = C$ dalam selang tersebut, dimana C adalah konstanta sembarang.
2. Jika $H'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam selang buka (a,b) maka berlaku,

   $$H(x) = G(x) + C$$

   dimana, C adalah suatu konstanta sembarang.

Atau dengan perkataan lain dapat dinyatakan bahwa anti turunan dari f adalah $F(x) + C$ dimana F adalah anti turunan dari f dan C adalah suatu konstanta sembarang dan semua anti turunan dari f diperoleh dari $F(x) + C$ dengan merubah nilai dari C.

Pembentukan anti turunan adalah proses menentukan anti turunan yang paling umum untuk suatu fungsi yang diberikan. Untuk operasi pembentukan anti turunan digunakan operasi yang diberi notasi : "$\int$".

Integral tak tentu dari suatu fungsi f, ditunjukkan dengan,

$$\int f(x)\, dx$$

adalah merupakan anti turunan f yang paling umum yakni,

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \text{ ; dimana C = konstanta sembarang.}$$

Jika dan hanya jika $f(x) = F'(x)$.

Ternyata proses pembentukan anti turunan suatu fungsi adalah merupakan proses pembentukan integral tak tentu dari fungsi tersebut. Karenanya operasi pembentukan integral tak tentu sering disebut dengan pengintegralan tak tentu atau pengintegralan.

Jika diketahui suatu persamaan berikut,

$$\int d(F(x)) = F(x) + C$$

Jika F(x) = x dalam persamaan di atas maka diperoleh,

$$\int dx = x + C$$

Jika C suatu konstanta maka berlaku,

$$\int c.f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

yakni anti turunan perkalian konstanta C dengan suatu fungsi adalah sama dengan perkalian konstanta C dengan anti turunan fungsi tersebut.

Dari persamaan $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ maka dengan menurunkan ruas kiri dan ruas kanannya didapatkan,

$$D_x \int f(x)\, dx = F'(x)$$

Tetapi karena $F'(x) = f(x)$ maka diperoleh dalil berikut,

1. Turunan dari suatu anti turunan untuk suatu fungsi adalah fungsi itu sendiri.

$$D_x \int f(x)\, dx = f(x)$$

2. Jika r adalah suatu bilangan rasional dan $r \neq -1$ maka,

$$\int x^y dx = \frac{1}{r+1} x^{y+1} + c$$

3. Anti turunan jumlah dua fungsi adalah jumlah anti turunan kedua fungsi tersebut.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

4. Aturan rantai untuk anti turunan.

   Jika suatu fungsi yang terdiferensialkan dan $u = f(x)$ maka untuk $n \neq -1$ berlaku,

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

   atau,

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

Rumus-rumus integrasi untuk fungsi trigonometri dapat dinyatakan sebagai berikut,

1. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
2. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
3. $\int tg\, x\, dx = -\ln \cos x + c = \ln \sec x + c$
4. $\int ctg\, x\, dx = \ln \sin x + c = -\ln cosec\, x + c$
5. $\int \sec x\, dx = \ln |\sec x + tg\, x| + c$
6. $\int cosec\, x\, dx = -\ln |cosec\, x + ctg\, x| + c$

Untuk fungsi $\int f(x)\, dx$ dengan bentuk akar dapat diselesaikan dengan menerapkan rumus-rumus berikut ini,

a. Bila $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, maka misalkan $x = a \cos \theta$ atau $x = a \sin \theta$
b. Bila $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$, maka misalkan $x = a\, tg\, \theta$ atau $x = a\, ctg\, \theta$
c. Bila $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$, maka misalkan $x = a \sec \theta$ atau $x = a\, cosec\, \theta$

2.4.2 Integral Tentu

Konsep integral tentu merupakan inti hitung integral yang sangat luas sekali pemakaiannya. Berbagai bidang ilmu pengetahuan menggunakan konsep ini. Perhitungan luas suatu daerah, isi benda putar, penentuan titik berat suatu benda, menghitung momen inersia atau pengukuran luas permukaan bola (*speric*) menggunakan konsep integral tentu.

Suatu fungsi *f* dikatakan dapat diintegralkan dalam suatu selang tutup [*a*,*b*] jika integral tentu *f* dari *a* ke *b* ada (terdefinisi). Ungkapan dapat diintegralkan sering juga diartikan sama dengan memiliki integral atau terintegralkan atau integrabel. Berikut ini akan diberikan beberapa dalil dasar yang merupakan sifat dari integral tentu,

1. Jika *f* dan *g* adalah fungsi yang memiliki integral (integrabel) dalam selang tutup [*a*,*b*] maka,

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Jika *f* fungsi yang integrabel pada selang tutup [*a*,*b*] dan *k* sebuah konstanta maka,

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

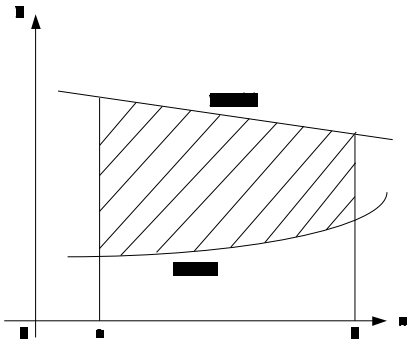
3. Jika *f* integrabel dalam selang tutup [*a*,*b*] dan $f(x) \geq 0$ untuk $a \leq x \leq b$, maka,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

4. Jika f dan g adalah dua fungsi yang memiliki integral (integrabel) pada selang tutup $[a,b]$ dan $0 \le f(x) \le g(x)$ untuk $a \le x \le b$, maka,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Jika suatu fungsi tidak negatif dalam suatu selang tutup, maka integral tentu fungsi itu untuk selang yang sama adalah tak negatif juga. Sifat perbandingan ini menunjukkan bahwa jika untuk suatu selang tutup, fungsi f lebih kecil atau sama dengan g (dengan f dan g keduanya fungsi tak negatif), maka pada selang tutup yang sama, integral tentu f akan lebih kecil atau sama dengan integral tentu g. Secara geometri dapat dilihat pada gambar 2.4, sebagai interpretasi dari poin 4,



Gambar 2.4 Interpretasi Poin 4

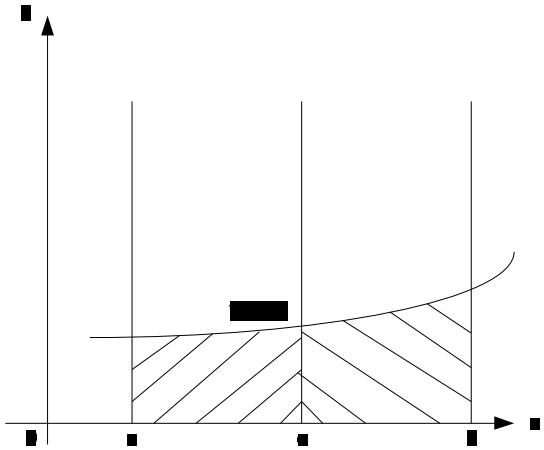
5. Jika f kontinu dalam selang tutup $[a,b]$ $[b,c]$ dan $[a,c]$ maka,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

6. Jika f fungsi kontinu dalam sebuah selang tutup yang mengandung tiga bilangan a, b dan c maka,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Secara geometris, maka didapat grafik pada gambar 2.5.



Gambar 2.5 Interpretasi Poin 6

$$\int_a^c f(x)\,dx = L_I$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = L_{II}$$

$$L = L_I + L_{II} = \int_a^b f(x)\,dx$$

7. Jika k suatu konstanta maka berlaku,

$$\int_a^b k\,dx = k\,(b-a)$$

8. Misalkan f fungsi kontinu dalam selang tutup $[a,b]$. Jika m adalah nilai minimum mutlak dari f di dalam $[a,b]$ dan M nilai maksimum mutlak di dalam selang tutup $[a,b]$ sehingga,

$$m \le f(x) \le M \text{ untuk } a \le x \le b$$

maka,

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a)$$

9. Jika *f* adalah fungsi kontinu dalam selang tertutup [*a*,*b*] dan jika $f(a) \neq f(b)$ maka untuk tiap bilangan *k* antara *f*(*a*) dan *f*(*b*) ada sebuah bilangan *c* antara *a* dan *b* sehingga berlaku,

$$f(c) = k$$

10. Jika *f* fungsi kontinu dalam selang tutup [*a*,*b*] maka ada bilangan μ antara *a* dan *b* sehingga,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\mu)\,(b-a)$$

atau dapat juga dinyatakan sebagai,

$$f(\mu) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

2.5 Integrasi Monte Carlo

Nama Monte Carlo pertama kali diberikan pada metode matematika yang dikerjakan oleh para peneliti di pengembangan senjata nuklir di Los Alamos tahun 1940an. Inti dari metode ini adalah penemuan permainan peluang yang sifat dan hasilnya dapat digunakan untuk mempelajari beberapa fenomena menarik. Karena belum ada keterhubungan berarti dengan komputer, keefektifan peluang simulasi atau numerik menjadi terangkat berkat ketersediaan komputer digital modern.

Metode integrasi Monte Carlo adalah algoritma untuk menghitung nilai hampiran integral terbatas, terutama yang multidimensi. Algoritma yang biasa menghitung *integrand* pada batas umum, tetapi memilih titik acak pada *integrand* yang dihitung.

Prinsip dasar dari metode Monte Carlo adalah bahwa harga pendekatan integral suatu fungsi berbading lurus dengan harga rata-rata fungsi tersebut untuk sejumlah besar sampel yang dipilih secara acak atau dengan distribusi tertentu dalam interval integrasi.

2.5.1 Plain Monte Carlo

Plain Monte Carlo adalah metode dasar dari integrasi Monte Carlo. Metode ini melakukan pengambilan titik sampel secara acak untuk memperkirakan distribusi probabilitas. Integral diselesaikan dengan mengambil sejumlah titik acak di atas interval yang ditentukan dan menjumlahkan hasil evaluasi fungsi pada titik-titik ini. Daerah interval yang telah ditentukan tersebut lalu dikalikan dengan nilai fungsi rata-rata dari titik-titik yang dipilih.

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{(b-a) * \sum_{i=1}^{N} f(xi)}{N}$$

N adalah banyaknya titik sampel yang digunakan untuk mencari nilai hampiran dari integral.

2.5.2 MISER Monte Carlo

Teknik ini bergantung pada pembagian interval yang ditentukan ke dalam beberapa potongan dan menghitung integrasi Monte Carlo pada tiap potongan secara terpisah. Dalam teknik ini, potongan yang lebih penting, contohnya interval dimana f(x) memberikan kontribusi paling besar bagi integral, akan menerima lebih banyak titik sampel dalam perhitungan nilai hampiran integral. Ini akan

membuat potongan yang lebih penting untuk memberikan kontribusi yang lebih akurat bagi nilai akhir integral.

Prinsip dari metode ini adalah mengurangi nilai error integral secara keseluruhan dengan mengkonsentrasikan titik integrasi pada daerah dengan varians tertinggi. Idenya diawali dengan mengamati dua bagian terpisah a dan b dengan Monte Carlo. Algoritma MISER berlanjut dengan membagi dua daerah dalam satu koordinat axis yang menghasilkan dua sub-daerah per langkah. Arah ini dipilih dengan menguji semua kemungkinan pembagian dua dan memilih salah satu yang akan memperkecil kombinasi varians dari tiap sub-daerah. Varians tiap subdaerah dihitung dengan sampling sebuah fraksi dari seluruh titik yang tersedia sampai langkah ini. Prosedur yang sama lalu diulangi secara rekursif untuk tiap dua bagian sisa dari pembagian. Titik sampel yang tersisa dialokasikan ke subdaerah. Alokasi titik integrasi berlanjut kepada kedalaman yang ditentukan user dimana tiap subdaerah diintegrasikan menggunakan plain Monte Carlo. Nilai-nilai tunggal dan perkiraan error-nya ini lalu dijumlahkan untuk menghasilkan nilai dan perkiraan error keseluruhanya.

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^{m} \frac{Panjang_i * \sum_{j=1}^{N_i} f(x_j)}{N}$$

m adalah banyaknya potongan pembagian interval. Sedangkan $Panjang_i$ adalah panjang interval dari potongan ke-i.

2.5.3 VEGAS Monte Carlo

Teknik sebelumnya menunjukkan bahwa penggunaan distribusi non-uniform titik acak akan menghasilkan sampling yang lebih baik dan hampiran yang lebih akurat dari sebuah integral. *Importance sampling* adalah perluasan dari teknik tersebut, tapi daripada menggunakan batasan untuk membagi interval, sebuah fungsi distribusi digunakan untuk memilih titik acak.

Importance sampling adalah memilih distribusi yang bagus dari fungsi untuk mensimulasikan variable acaknya. Hal ini termasuk mengkalikan integran dengan 1 (biasanya terselubung dengan suatu fungsi "palsu") untuk menghasilkan nilai ekspektasi dari kuantitas yang sedikit berbeda dari integran asli di atas area integrasi. Sebagai contoh, p(x) adalah densitas untuk variable acak X yang hanya mengambil nilai dalam A sehingga $\int_{x\in A} p(x)dx = 1$. Maka $\frac{p(x)}{p(x)} = 1$ dan

$$\int_{x\in A} f(x)dx = \int_{x\in A} f(x)\frac{p(x)}{p(x)}dx = \int_{x\in A} \frac{f(x)}{p(x)}p(x)dx = \mathrm{E}_h\left(\frac{f(X)}{p(X)}\right)$$

Selama $p(x) \neq 0$ untuk semua $x \in A$ untuk $g(x) \neq 0$, dan dimana E_h menyatakan ekspektasi terhadap densitas h. Ini menjadikan estimator Monte Carlo menjadi :

$$\tilde{g}_n^h(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(Xi)}{p(Xi)} \text{ dimana } Xi \sim p(x).$$

Sekarang saat memilih titik acak untuk menghitung integral, titik tersebut harus mengacu pada fungsi ditribusi yang menghampiri fungsi yang diinginkan. Dengan distribusi titik acak, persamaan hampiran integral harus direvisi. Sekarang distribusi titik acak yang diberikan dengan densitas p(x), perhitungan nilai hampiran integral menjadi :

$$\int_a^b f(x) \approx \frac{(b-a) * \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_n)}{p(x_n)}}{N}$$

Adapun fungsi p(x) yang baik mempunyai beberapa syarat sebagai berikut:

1. p(x) > 0 dan f(x) ≠ 0
2. p(x) harus mendekati proporsi |f(x)|
3. simulasi nilai p(x) harus mudah
4. perhitungan densitas p(x) harus mudah untuk nilai x apapun.

2.6 Visual Basic 6.0

Visual Basic adalah sebuah sarana pembuatan program yang lengkap namun mudah. Basic pada Visual Basic diambil dari kata BASIC yang merupakan bahasa pemrograman juga. Memang Visual Basic merupakan sebuah pengembagan terakhir dari bahasa BASIC.

BASIC *(Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code)* adalah sebuah program bahasa pemrograman "kuno" yang merupakan awal dari bahasa-bahasa pemrograman tingkat tinggi lainnya. BASIC di rancang pada tahun 1950-an dan ditujukan untuk dapat digunakan oleh para programer pemula. Biasanya BASIC diajarkan untuk para pelajar sekolah menengah yang baru mengenal komputer, serta digunakan untuk mengembangkan program-program "cepat saji" yang ringan dan menyenangkan. Banyak para programer andal saat ini memulai karirnya dengan mempelajari BASIC. Visual Basic masih tetap mempertahankan beberapa sintaks atau format penulisan program yang pernah dipakai oleh BASIC.

2.6.1 Keistimewaan Visual Basic 6.0

Sejak dikembangkan pada tahun 80-an, Visual Basic kini telah mencapai versi yang ke-6. Beberapa keistimewaan utama dari Visual Basic 6 ini antaranya seperti :

1. Menggunakan platform pembuatan program yang diberi nama *Developer Studio,* yang memiliki tampilan dan sarana yang sama dengan Visual C++ dan Visual J++. Dengan begitu dapat bermigrasi atau belajar bahasa pemrograman lainnya dengan mudah dan cepat, tanpa harus belajar dari nol.
2. Memiliki *compile* andal yang dapat menghasilkan file *executable* yang lebih cepat dan lebih efisien dari sebelumnya.
3. Memiliki beberapa tambahan sarana Wizard yang baru. Wizard adalah sarana yang mempermudah di dalam pembuatan aplikasi dengan mengotomatisasi tugas-tugas tertentu.
4. Tambahan kontrol-kontrol baru yang lebih canggih serta peningkatan kaidah struktur bahasa Visual Basic.
5. Kemampuan membuat *ActiveX* dan fasilitas Internet yang lebih banyak.
6. Sarana akses data yang lebih cepat dan andal untuk membuat aplikasi database yang berkemampuan tinggi.
7. Visual Basic 6 memiliki beberapa versi atau edisi yang disesuaikan dengan kebutuhan pemakai.

2.6.2 Lingkungan atau Layar Visual Basic 6.0

Layar Visual Basic hampir sama dengan layar program-program aplikasi Windows pada umumnya, terutama jika pernah menggunakan bahasa pemrograman visual lainnya, misalnya seperti Microsoft Visual FoxPro, Microsoft Access, Visual C++, dan sebagainnya.

Layar Visual Basic adalah suatu lingkungan besar yang terdiri dari beberapa bagian-bagian kecil yang kesemuannya memiliki sifat :

a) **Floating :** dapat digeser-geser ke posisi mana saja. Untuk menggeserkan elemen layar Visual Basic, klik dan tahan tombol mouse pada judul (*Title Bar*) elemen tersebut, lalu geserlah ke tempat yang diinginkan.

b) **Sizable :** dapat diubah-ubah ukurannya, seperti mengubah ukuran jendela windows. Untuk mengubah ukuran suatu elemen atau jendela, klik dan tahan tombol mouse pada sisi (border) jendela tersebut, lalu geserlah hingga ke ukuran yang diinginkan.

c) **Dockable :** dapat menempelkan dengan bagian lain yang berdekatan. Untuk menempelkan elemen layar Visual Basic ke elemen lainnya, cukup tempelkan sisi-sisi elemen tersebut, dan secara otomatis akan menempel ke tempat yang diinginkan.

2.6.3 Control Menu

Control Menu adalah menu yang digunakan terutama untuk memanipulasi jendela Visual Basic. Dari menu ini bisa mengubah ukuran, memindahkan, atau menutup jendela Visual Basic atau jendela Windows lainnya.

Untuk mengaktifkan Control Menu ini, klik tombol mouse pada pojok kiri atas jendela. Berikutnya akan muncul menu Control Menu, dimana bisa memilih salah satu dari perintah ini :

- **Restore :** mengubah ukuran jendela ke ukuran sebelumnya.
- **Move :** untuk memindahkan letak jendela.
- **Size :** untuk mengubah ukran jendela.
- **Minimize :** untuk meminimalkan ukuran jendela.
- **Maximize :** untuk memaksimalkan ukuran jendela.
- **Close :** untuk menutup jendela.

2.6.3.1 Menu

Menu Visual Basic berisi semua perintah Visual Basic yang dapat dipilih untuk melakukan tugas tertentu. Isi dari menu ini sebagian hampir sama dengan program-program Windows pada umumnya.

2.6.3.2 Toolbar

Toolbar adalah tombol-tombol yang mewakili suatu perintah tertentu dari Visual Basic. Setiap tombol tersebut dapat langsung diklik untuk melakukan perintah tertentu. Biasanya tombol-tombol ini merupakan perintah-perintah yang sering digunakan dan terdapat pula pada menu Visual Basic. Toolbar yang umum adalah toolbar Standar.

2.6.3.3 Form Window

Form Window atau jendela Form adalah daerah kerja utama, di mana kita akan membuat program-program aplikasi Visual Basic.