MODEL ANTRIAN

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Pertemuan Ke- 11

Riani L.

Jurusan Teknik Informatika

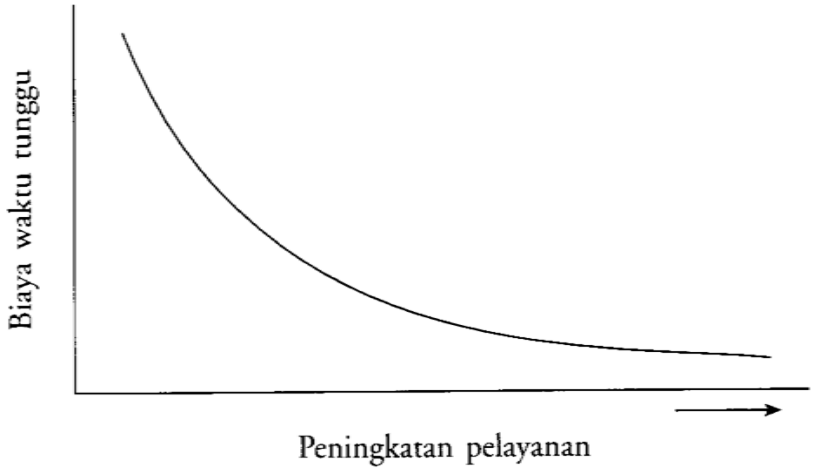
Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan

- Teori antrian merupakan teori yang menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau baris-baris penungguan, dimana formasi baris-baris penungguan ini merupakan fenomena yang biasa terjadi jika kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk menyelenggarakan pelayanan itu.
- Keputusan yang berkenaan dengan kapasitas dapat ditentukan meski tidak mungkin dapat diprediksi dengan tepat kapan unit-unit yang membutuhkan pelayanan tersebut akan datang atau berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk menyelenggarakan pelayanan itu.
- Jika pelayanan terlalu banyak, maka akan memerlukan ongkos yang besar, sebaliknya, jika kapasitas pelayanan kurang maka akan terjadi baris penungguan dalam waktu yang cukup lama sehingga menimbulkan ongkos.

- Contoh :
  - Kendaraan berhenti berderet-deret menunggu di traffic light
  - Pesawat menunggu lepas landas di bandara
  - Mesin rusak antri untuk diperbaiki di sebuah bengkel
  - Surat antri untuk ditik oleh sekretaris
  - Program menunggu diproses oleh komputer digital
- Tujuan :
  - Menentukan karakteristik yang mengukur kinerja sistem sehingga sistem pelayanan dapat bekerja secara optimal
  - Keseimbangan antara ongkos pelayanan dengan ongkos yang disebabkan oleh adanya waktu menunggu.

Hubungan Tk Pelayanan dgn Biaya Waktu Menunggu



$$E(C_W) = n_t \times C_W$$

Dimana :

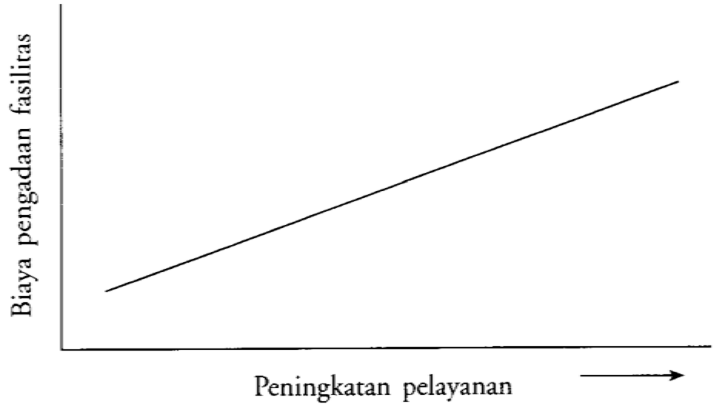
$E(C_W)$ = Total biaya menunggu

n_t = Jumlah rata-rata individu yang menunggu dalam suatu sistem

C_W =Biaya menunggu pada seorang individu menganggur dalam sistem

4

Hubungan Tk Pelayanan dgn Biaya Pengadaan Fasilitas



$$E(C_S) = s \times C_S$$

Dimana :

$E(C_S)$ = Total biaya pelayanan per periode

s = Jumlah fasilitas pelayanan

C_S = Biaya penambahan fasilitas

5

Contoh :

- Jika diketahui biaya menunggu (mencakup biaya menganggurnya para karyawan, kehilangan penjualan, kehilangan kepercayaan dalam manajemen) adalah Rp. 20.000,- per jam. Bila jumlah rata-rata individu dalam sistem adalah 5 orang, maka total biaya tunggu yang diharapkan sebesar :

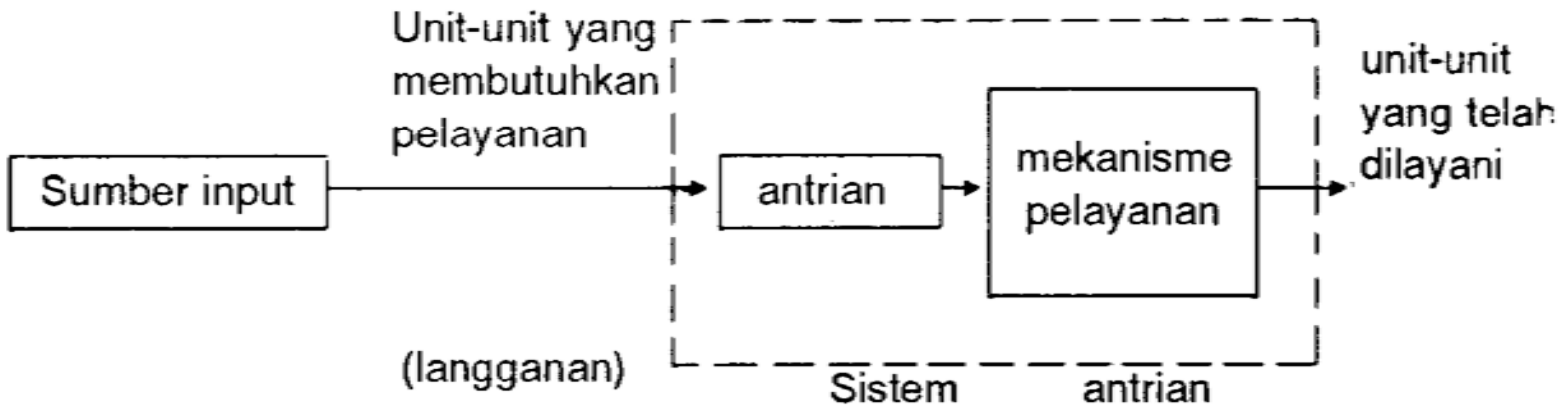
$$E(C_W) = (5)\ (20.000) = \text{Rp. } 100.000,-$$

- Jika biaya per periode waktu per fasilitas pelayanan adalah Rp. 120.000,- per jam dan jumlah fasilitas pelayanan adalah 3 unit, maka total biaya pelayanan yang diharapkan sebesar :

$$E(C_S) = (3)\ (120.000) = \text{Rp. } 360.000,-$$

6

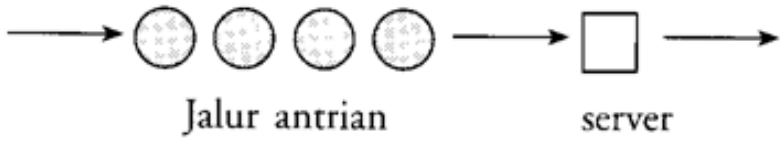
Stuktur Dasar Model Antrian



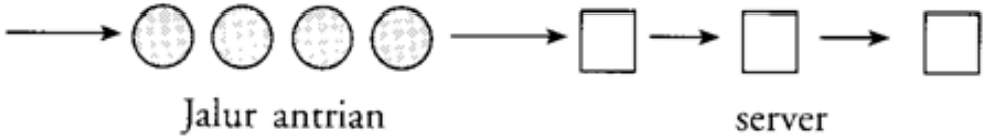
Ada 4 struktur dasar berdasarkan fasilitas pelayanan :

- Single Channel Singel Phase
- Single Channel Multiple Phase
- Multiple Channel Singel Phase
- Multiple Channel Multiple Phase

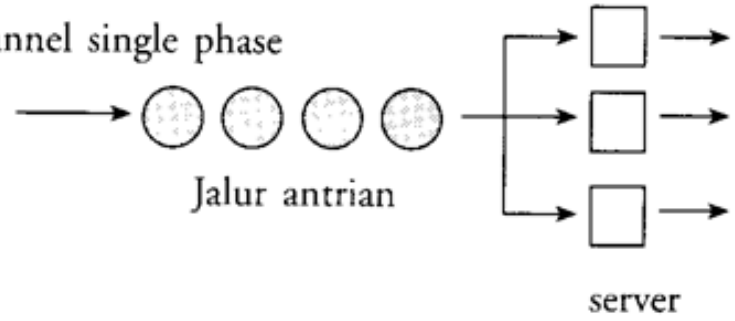
Single channel single phase



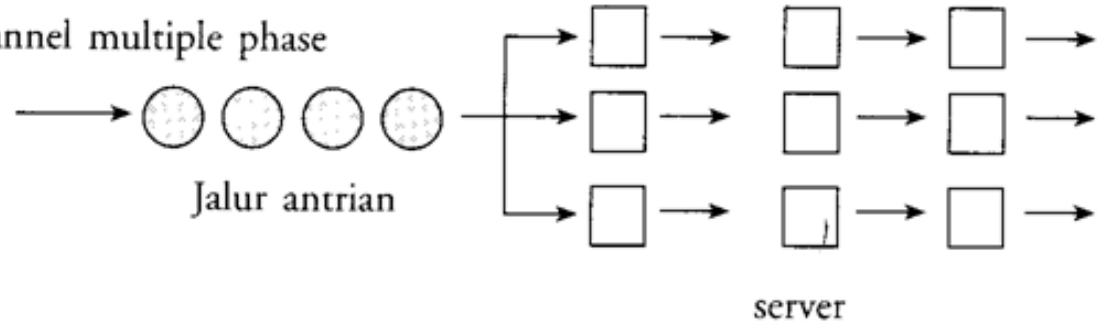
Single channel multiple phase



Multiple channel single phase

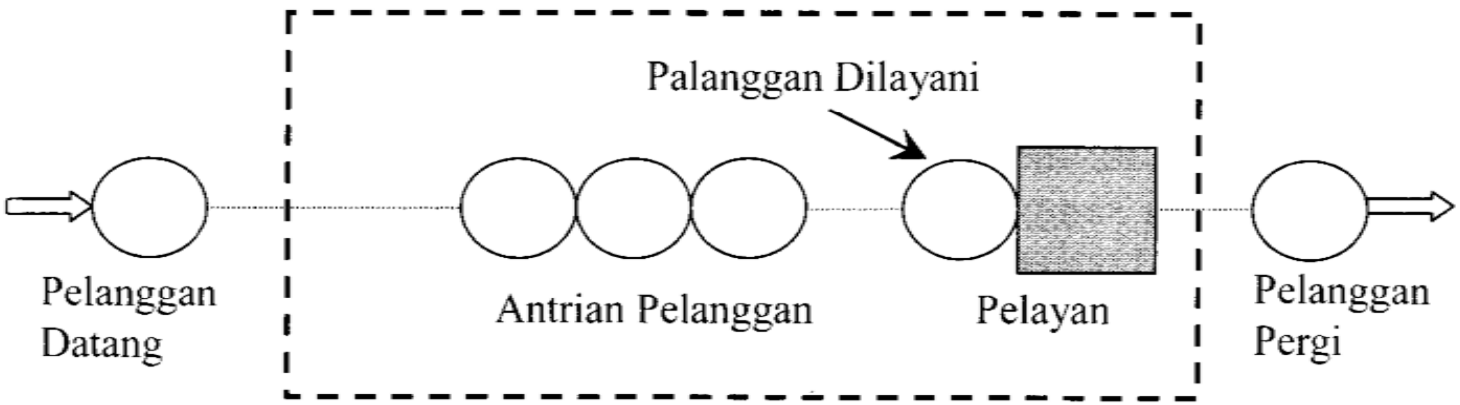


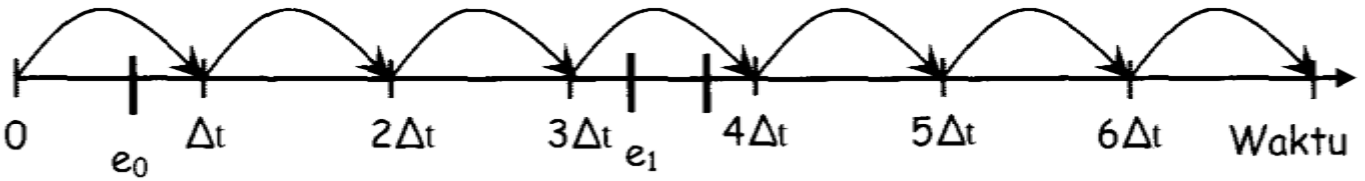
Multiple channel multiple phase



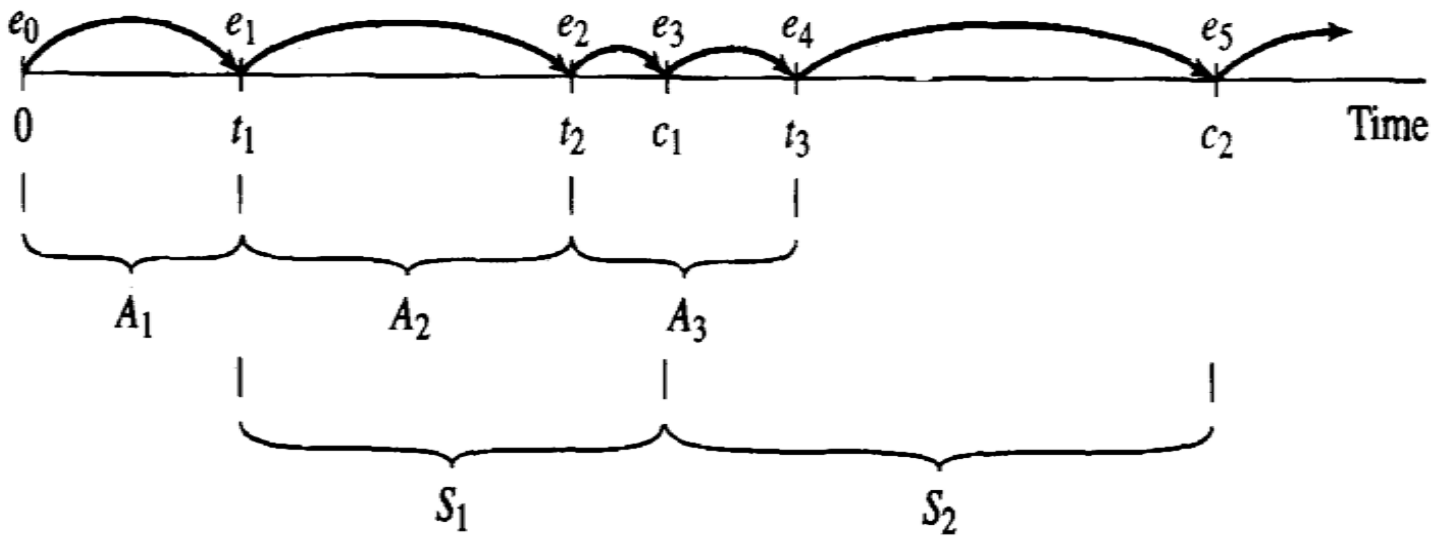
8

Contoh Antrian Bank Satu Kasir





9



ti = waktu kedatangan pelanggan ke-i ($t_0 = 0$)
Ai = $ti - ti$-1 = waktu antar kedatangan antara pelanggan ke (i-1) dan i
Si = waktu untuk melayani pelanggan ke-i
Di = waktu tunggu (*delay*) antrian pelanggan ke-i
Ci = $ti + Di + Si$ = waktu pelanggan ke-i selesai dilayani dan pergi

Notasi Model Antrian

Notasi Standar :

(a / b / c / d / e)

Dimana :

a = distribusi kedatangan

b = distribusi waktu pelayanan

c = jumlah fasilitas pelayanan (s = 1, 2, 3, ... , ∞)

d = jumlah konsumen maksimum dalam sistem

e = ukuran populasi atau sumber

Notasi standar untuk simbol a dan b :

M = Poisson (Markovian)

D = interarrival atau service time konstan (deterministik)

E_k = intearrival atau service time berdistribusi Erlang atau Gamma

11

Model (M / M / 1 / ∞ / ∞)

Syarat kondisi Model Server Tunggal :

1. Jml kedatangan tiap satuan waktu mengikuti distribusi Poisson
2. Wkt pelayanan berdistribusi eksponensial
3. Disiplin antrian yang pertama datang pertama dilayanan (FCFS)
4. Sumber populasi tak terbatas
5. Ada jalur tunggal
6. Tk rata-rata kedatangan lebih kecil daripada tingkat rata-rata pelayanan
7. Panjang antrian tidak terbatas

Notasi persamaan :

λ = Tk rata-rata kedatangan per satuan waktu (unit/waktu)

μ = Tk rata-rata pelayanan per satuan waktu (unit/waktu)

Lq = Rata-rata jumlah individu dalam antrian (unit)

Ls = Rata-rata jumlah individu dalam sistem (unit)

Wq = Rata-rata waktu dalam antrian (jam)

Ws = Rata-rata waktu dalam sistem (jam)

Pn = Probabilitas terdapat n individu dalam sistem (frekuensi relatif)

Po = Probabilitas tidak ada individu dalam sistem (frekuensi relatif)

Pw = Probabilitas menunggu dalam sistem (frekuensi relatif)

r = Tk kegunaan fasilitas sistem atau utilitas (rasio)

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad Ls = \frac{\lambda^2}{\mu - \lambda} \qquad Pn = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \qquad P_w = \frac{\lambda}{\mu}$$

13

CONTOH :

Sebuah minimarket mempunyai satu cash register dan satu orang petugas kasir untuk mengoperasikannya dalam transaksi pembayaran terhadap konsumen. Konsumen harus antri dalam satu jalur di depan kasir untuk membayar belanjaannya. Tingkat rata-rata kedatangan konsumen λ=24 per jam dan sesuai dengan distribusi Poisson. Waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dengan tingkat rata-ratanya adalah μ=30 konsumen per jam. Manajer minimarket ingin mengevaluasi karakteristik operasional dari sistem antrian tersebut. Tentukan :

a. Probabilitas tidak ada konsumen dalam sistem
b. Rata-rata jumlah konsumen dalam antrian
c. Rata-rata jumlah konsumen dalam sistem
d. Rata-rata waktu dalam antrian
e. Rata-rata waktu dalam sistem
f. Tingkat kegunaan fasilitas cash register

14

Model (M / M / s / ∞ / ∞)

- Merupakan model antrian fasilitas pelayanan (server) ganda.
- Diasumsikan rata-rata tingkat kedatangan lebih kecil daripada tingkat pelayanan keseluruhan (agregat) atau penjumlahan segenap rata-rata tingkat pelayanan di tiap jalur.
- Syarat & kondisi lain sama dengan Model Server Tunggal

Probabilitas bahwa tidak ada konsumen dalam sistem (semua server menganggur) :

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right)}$$

Probabilitas bahwa seorang konsumen memasuki sistem dan hasrus menunggu untuk dilayani (probabilitas semua server sibuk) :

$$P_w = \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \left(\frac{s\mu}{s\mu - \lambda}\right) P_0$$

Rata-rata jumlah konsumen dalam sistem dan antrian masing-masing :

$$L_s = \frac{\lambda\mu(\lambda/\mu)^s}{(s-1)!(s\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \qquad L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

Rata-rata waktu dalam sistem dan rata-rata waktu antrian masing-masing :

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} \qquad W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Tk kegunaan fasilitas :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

16

CONTOH :

Sebuah departemen store mempunyai bagian khusus yang menangani masalah dan keluhan konsumen terhadap transaksi pembayaran melalui kartu kredit. Bagian ini mempunyai tiga petugas pelayanan dan konsumen yang datang harus menunggu giliran untuk mendapatkan pelayanan, tempat duduk di ruang tunggu diatur hanya satu baris. Konsumen yang datang pertama dilayani lebih dulu.

Berdasarkan pengamatan selama 6 bulan, menunjukkan rat-rata ada 10 konsumen yang datang tiap jam (sesuai distribusi Poisson), dan rata-rata ada 4 konsumen per jam bisa dilayani oleh tiap petugas (berdistribusi Poisson).

a. Pihak manajemen ingin menganalisis sistem antrian tersebut, bila waktu tunggu berlebihan di bagian ini maka akan membuat konsumen kesal dan cenderung tidak sabar, sehingga bisa dengan mudah mencari tempat lain untuk berbelanja.

b. Untuk meningkatkan pelayanan maka manajemen mempertimbangkan untuk menambah seorang petugas pelayanan di bagian ini. Apakah keputusan pihak manajemen ini sudah tepat ?

17

Model (M / M / 1 / N / ∞)

- Terdapat batas jumlah dalam sistem
- Jumlah maksimum meliputi individu yang menunggu dan yang sedang dilayani.
- Bila individu mencapai N atau lebih, individu yang datang berikutnya akan meninggalkan antrian dan tidak kembali.
- Jenis model ini merupakan perkiraan logis untuk memecahkan persoalan antrian dalam sektor industri jasa.

  Contoh : Rumah Makan dengan kapasitas parkir yang terbatas. Bila pelanggan tiba dan tidak mendapatkan tempat parkir, maka pelanggan pasti langsung pergi ke tempat lain

18

$$P_n = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)\rho^n$$

$$P_0 = \left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right)$$

$$L_q = L_s - \rho(1-P_N)$$

$$L_s = \frac{\rho(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{N+1})}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}$$

$$W_q = W_s - 1/\mu$$

dengan $\rho = \lambda/\mu$ dan $n = 0, 1, 2, \ldots, N$

19

CONTOH :

Pak Budi membuka usaha jasa cuci mobil yang berada di pingir jalan raya. Rata-rata pelanggan yang datang adalah 5 mobil per jam (sesuai distribusi Poisson). Waktu yang diperlukan untuk mencuci dan membersihkan setiap mobil berbeda-beda, tetapi mengikuti distribusi eksponensial dengan rata-rata 10 menit per mobil. Kapasitas lahan parkir hanya bisa menampung 5 mobil. Jika lahan parkir sudah penuh, pelanggan yang datang akan segera pergi dan mencari tempat lain. Jam kerja selama 8 jam dari pagi hingga sore.

a. Pak Budi ingin mengetahui beberapa pelanggan yang hilang karena keterbatasan lahan parkir, serta karakteristik-karakteristik sistem antrian lainnya.
b. Pak Budi juga ingin mengetahui berapa rata-rata waktu antrian hingga sebuah mobil selesai dicuci

20

Model (M / M / 1 / ∞ / N)

- Sumber populasi dibatasi sebesar N
- Model ini banyak dijumpai dalam sistem antrian pada perbaikan mesin di suatu pabrik.

$$P_0 = \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]^{-1} \qquad P_n = \frac{N!}{(N-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$L_q = N - \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)(1-P_0) \qquad L_s = L_q + (1-P_0)$$

$$W_q = \frac{L_q}{(N-L_s)\lambda} \qquad W_s = W_q + 1/\mu$$

dimana n = 1, 2, ..., N (N= ukuran populasi)

CONTOH :

Sebuah industri manufaktur mempunyai 20 mesin bubut yang secara periodik memerlukan perbaikan karena mengalami kerusakan. Perusahaan mempunyai satu karyawan senior dibantu asistennya untuk mereparasi mesin tersebut. Setiap mesin membutuhkan perbaikan setelah beroperasi rata-rata selama 200 jam dan rata-rata waktu perbaikan adalah 3,6 jam tiap mesin. Rata-rata tingkat kerusakan mesin berdistribusi Poisson dan waktu perbaikan eksponensial. Perusahaan ingin menganalisis beberapa rata-rata lama mesin yang menganggur karena kerusakan dan bila perlu ada tambahan karyawan bagian reparasi.

22