8 TRANSFORMASI LAPLACE

8.1. DEFINISI TRANSFORMASI LAPLACE

Transformasi Laplace dari fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \qquad \text{.....(1)}$$

dan ada atau tidaknya tergantung dari apakah integral (1) ada (konvergen) atau tidak ada (divergen). Pada pasal ini kita mengandaikan bahwa s adalah riil.

Seringkali dalam prakteknya terdapat suatu bilangan riil s_0 sehingga integral (1) ada untuk $s > s_0$ dan tidak ada untuk $s < s_0$. Himpunan nilai-nilai $s > s_0$ sehingga (1) ada dinamakan daerah kekonvergenan (range of convergence) atau keujudan (existence) dari $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Mungkin juga terjadi kasus bahwa (1) tidak ada untuk suatu nilai s (Lihat Soal 50).

Lambang $\mathcal{L}$ pada (1) dinamakan operator tranformasi Laplace. Kita akan menunjukkan bahwa $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linier, yaitu

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t) \qquad \text{.....(2)}$$

8.2. TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK BEBERAPA FUNGSI ELEMENTER

Dalam tabel berikut ini diberikan transformasi Laplace untuk beberapa fungsi elementer khusus dengan daerah keujudan atau kekonvergenannya. Seringkali kita mengabaikan daerah kekonvergenan ini karena kebanyakan dalam banyak hal dapat diperoleh dengan mudah bilamana diperlukan.

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$ $s > 0$
2.	t^n $n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $s > 0$
3.	t^p $p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ $s > 0$
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $s > a$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$ $s > 0$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ $s > 0$
7.	$\cosh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$
8.	$\sinh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a \rvert$

Pada jajaran 3, $\Gamma\ (p + 1)$ adalah fungsi gamma, yang didefinisikan oleh

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx \qquad p > -1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

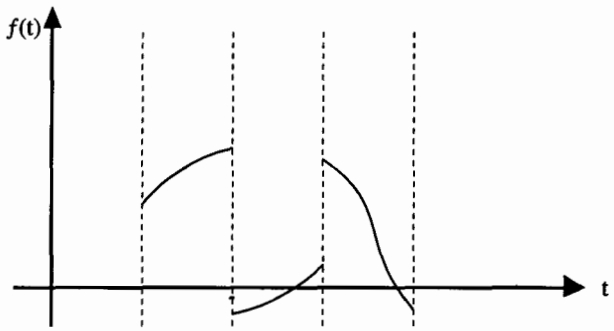
Fungsi ini akan dipelajari pada Bab tentang fungsi Gamma. Sekarang kita hanya memerlukan sifat berikut:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(1) = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

8.3. SYARAT CUKUP UNTUK KEUJUDAN TRANSFORMASI LAPLACE

Agar kita dapat menyatakan syarat cukup untuk $f(t)$ yang menjamin keujudan $\mathcal{L}\{f(t)\}$, kita memperkenalkan konsep kekontinuan bagian-demi-bagian (piecewise continuity) dan order eksponensial (exponential order) sebagai berikut.

1. **Kekontinuan bagian-demi-bagian.** Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu bagian-demi-bagian pada suatu selang jika (i) selang tersebut dapat dibagi menjadi sejumlah berhingga selang bagian di mana $f(t)$ kontinu pada selang bagian ini dan (ii) limit fungsi $f(t)$ untuk t mendekati titik akhir setiap selang bagiannya bernilai hingga. Cara lain untuk menyatakan hal ini adalah bahwa suatu fungsi kontinu bagian demi bagian hanya mempunyai sejumlah berhingga titik di mana fungsi tersebut tak-kontinu. Suatu contoh fungsi kontinu bagian demi bagian ditunjukkan pada Gambar 8-1.



Gambar 8-1

2. **Orde eksponensial.** Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan berada dalam order eksponensial untuk $t > T$ jika kita dapat menentukan konstanta M dan α sehingga $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ untuk $t > T$.

Dengan menggunakan ini kita mempunyai rumus berikut.

Teorema 8-1. Jika $f(t)$ kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga $0 \leq t \leq T$ dan berada dalam tingkat eksponensial untuk $t > T$, maka $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ada untuk $s > \alpha$.

Perhatikanlah bahwa syarat ini hanya syarat cukup (dan bukan syarat perlu), yaitu jika syarat–syaratnya tidak dipenuhi, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ mungkin terjadi ada, Sebagai contoh, $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\}$ ada, meskipun $t^{-1/2}$ tidak kontinu bagian demi bagian pada $0 \leq t \leq T$.

Rumus yang menarik sehubungan dengan Teorema 8-1, adalah sebagai berikut

Teorema 8-2. Jika $f(t)$ memenuhi syarat Teorema 8-1, maka

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{(t)\} = \lim_{s\to\infty} F(s) = 0$$

Ini mengakibatkan bahwa jika $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$, maka $f(t)$ tidak dapat memenuhi syarat Teorema 8-1.

8.4. INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka kita namakan $f(t)$ sebagai invers transformasi Laplace dari F(s) dan ditulis $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$.

Contoh 1. Karena $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$, maka kita mempunyai $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} = t$.

Sementara ini jelaslah bahwa bilamana suatu transformasi Laplace ada, maka ia tunggal. Hal yang sama tidak benar lagi untuk suatu invers transformasi Laplace.

Contoh 2.

Jika $f(t) = \begin{cases} t & t \neq 2 \\ 10 & t = 2 \end{cases}$ kita dapat menunjukkan bahwa $\mathcal{L}\{f(t)\} = 1/s^2$.

Tetapi fungsi $f(t)$ ini berbeda dengan Contoh 1 pada $t = 2$ meskipun keduanya mempunyai transformasi Laplace yang sama. Ini mengakibatkan bahwa $\mathcal{L}^{-1}(1/s^2)$ dapat dinyatakan sebagai dua (atau lebih) fungsi yang berbeda.

Kita dapat menunjukkan bahwa jika dua fungsi mempunyai transformasi Laplace yang sama, maka keduanya tidak berbeda satu sama lain pada sembarang selang dengan panjang positif yang bagaimanapun kecilnya. Hal ini kadang-kadang dinamakan Teorema Lerch. Teorema ini mengakibatkan bahwa jika dua fungsi mempunyai transformasi Laplace yang sama, maka untuk semua keperluan praktis keduanya sama dan dalam prakteknya kita dapat mengambil invers transformasi Laplace sebagai sesuatu yang pada dasarnya tunggal (essentially unique). Khususnya, bila dua fungsi mempunyai transformasi Laplace yang sama, maka keduanya harus identik.

Lambang $\mathcal{L}^{-1}$ dinamakan operator invers transformasi Laplace dan merupakan suatu operator linier, yaitu

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F_2(s)\} = c_1f_1(t) + c_2f_2(t)$$

8.5. TRANSFORMASI LAPLACE DARI FUNGSI TURUNAN

Kita akan menentukan transformasi Laplace untuk keperluan menyelesaikan persamaan differensial linier. Untuk ini kita perlu menentukan transformasi Laplace dari fungsi turunan, yang dasarnya adalah teorema berikut ini.

Teorema 8-3. Misalkan $f(t)$ kontinu dan mempunyai turunan yang kontinu bagian demi bagian $f'(t)$ pada setiap selang berhingga $0 \le t \le T$. Andaikan juga bahwa $f(t)$ berada dalam tingkat eksponensial untuk $t > T$. maka

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\ \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Teorema ini dapat diperluas sebagai berikut

Teorema 8-4. Misalkan $f(t)$ suatu fungsi sehingga $f^{(n-1)}(t)$ kontinu dan $f^{(n)}(t)$ kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga $0 \le t \le T$. Misalkan pula bahwa $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ berada dalam tingkat eksponensial untuk $t > T$.
Maka

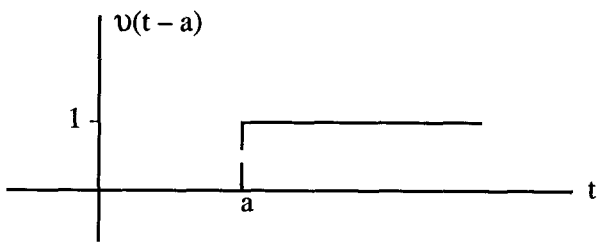
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\ \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

8.6. FUNGSI TANGGA SATUAN

Fungsi tangga satuan (unit step function), juga dinamakan fungsi tangga satuan Heaviside, didefinisikan sebagai berikut

$$\upsilon(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

dan grafiknya ditunjukkan pada Gambar 8-2.



Gambar 8-2

Ini memungkinkan kita untuk menyatakan berbagai fungsi takkontinu sebagai suku-suku fungsi tangga satuan.

Kita dapat menunjukkan (Soal 17) bahwa transformasi Laplace dari fungsi tangga satuan ini adalah

$$\mathcal{L}\{\upsilon(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s} \qquad s > 0$$

dan dengan cara yang serupa kita memperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s}\right\} = \upsilon(t-a)$$

8.7. BEBERAPA TEOREMA KHUSUS PADA TRANSFORMASI LAPLACE

Karena ada hubungan di antara transformasi Laplace dan inversnya, maka suatu teorema yang melibatkan transformasi Laplace akan berkaitan dengan teorema yang melibatkan inversnya. Berikut ini kita akan melihat beberapa hasil penting yang melibatkan transformasi Laplace dan dikaitkan dengan inversnya. Pada semua kasus kita mengandaikan bahwa $f(t)$ memenuhi syarat Teorema 8-1.

Teorema 8-5 [Teorema Translasi pertama].

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

Dengan cara yang sama jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$

Teorema 8-6 [Teorema Translasi kedua].

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka $\mathcal{L}\{\upsilon(t-a)\, f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$

Dengan cara yang sama, jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = \upsilon(t-a)\, f(t-a)$

Teorema 8-7. Jika $\mathcal{L}\{f(t) = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Dengan cara yang sama, jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\left(\frac{s}{a}\right)\} = af(at)$$

Teorema 8-8. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ maka untuk $n = 1,2,3, \ldots$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Dengan cara yang sama, jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n f(t)$$

Teorema 8-9 [Fungsi periodik]

Jika $f(t)$ mempunyai periode $P > 0$, yaitu jika $f(t + P) = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^P e^{-st} f(t)\, dt}{1 - e^{-sP}}$$

Teorema 8-10. [Pengintegralan]. Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t f(u)du \right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Dengan cara yang sama, jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\, du$$

Teorema 8-11. Jika $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t}$ ada dan $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$$

Teorema 8-12. [Teorema konvolusi].

Jika $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$, maka

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)\, du\right\} = F(s)\, G(s)$$

Dengan cara yang sama, jika $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\, G(s)\} = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

Kita menamakan integral di atas sebagai konvolusi dari f dan g, dan ditulis

$$f*g = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

Kita memperoleh hasil bahwa $f*g = g*f$, yaitu konvolusi tersebut komulatif. Dengan cara yang sama kita dapat membuktikan bahwa konvolusi tersebut asosiatif dan distributif (Lihat Soal 75).

8.8. PECAHAN BAGIAN (PARTIAL FRACTION)

Meskipun teorema di atas seringkali digunakan dalam menentukan invers transformasi Laplace, barangkali metode elementer tunggal yang terpenting untuk keperluan kita adalah metode pecahan bagian. Hal ini disebabkan karena banyak masalah yang akan ditentukan memerlukan invers dari P(s)/Q(s) dimana P(s) dan Q(s) adalah suku banyak dan derajat Q(s) lebih besar dari pada P(s). Untuk ilustrasi metode ini lihatlah Soal 39 – 41.

8.9. PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL DENGAN TRANSFORMASI LAPLACE

Metode tranformasi Laplace secara khusus digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial linier dengan koefisien konstan dan memenuhi syarat awal. Untuk menyelesaikan ini, kita mengambil transformasi Laplace dari persamaan differensial yang diberikan (atau persamaan-persamaan dalam kasus suatu sistem), kemudian gunakan syarat-syarat awalnya. Ini memberikan suatu persamaan aljabar (atau sistem persamaan aljabar) dalam transformasi Laplace dari penyelesaian yang diinginkan. Dengan menyelesaikan transformasi Laplace ini dan kemudian mengambil inversnya, diperoleh penyelesaian yang diinginkan. Untuk ilustrasinya lihatlah Soal 42 – 44.

8.10. RUMUS INVERSI LAPLACE

Terdapat suatu metode langsung untuk menentukan invers transformasi Laplace, yang dinamakan rumus inversi kompleks (complex incersion formula).

8.11. SOAL-SOAL LATIHAN DAN PENYELESAIAN

TRANSFORMASI LAPLACE DARI FUNGSI ELEMENTER

1. Buktikanlah bahwa : $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$ jika $s > a$.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\Big|_0^\infty,$$

$$= \frac{1}{s-a} \text{ asalkan } s - a > 0, \text{ yaitu } s > a$$

2. (a) Buktikanlah bahwa $\mathcal{L}\{t^p\} = \dfrac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ jika $s > 0$ dan $p > -1$.

(b) Tunjukkanlah bahwa : jika p = n suatu bilangan bulat positif, maka

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{di sini } s > 0.$$

(a) $\mathcal{L}\{t^p\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^p\, dt$. Misalkan st = u dan perhatikan bahwa agar integral tersebut konvergen, maka haruslah s > 0. Jadi integralnya sama dengan

$$\frac{1}{s^{p+1}} \int_0^\infty u^p e^{-u}\, du = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

Pembatasan $p > -1$ terjadi karena integral tersebut mendefinisikan gamma yang konvergen jika dan hanya jika $p > -1$.

(b) Dengan pengintegralan parsial kita peroleh

$$\mathcal{L}(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\, dx = (x^p)(-e^{-x}) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (px^{p-1})(-e^{-x})\, dx$$

$$= p \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$$

yaitu $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

Jika p = n, maka

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2) =$
$n(n-1)\ldots 1\Gamma(1)$

Tetapi $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1$. Jadi $\Gamma(n+1) = n!$ sehingga dari (a)

diperoleh $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

3. Buktikanlah bahwa $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linier.

Kita harus menunjukkan bahwa jika c_1, c_2 adalah konstan dan $f_1(t)$, $f_2(t)$ suatu fungsi sehingga tranformasi Laplacenya ada, maka

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \quad \{f_2(t)\}$$

kita peroleh

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\, dt$$

$$= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)\, dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)\, dt$$

$$= c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}$$

sehingga $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linier.

4. Buktikanlah bahwa (a) $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$. (b) $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

Metode 1. Jika $s > 0$, maka

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s - i\omega)t}\, dt = \frac{e^{-(s - i\omega)t}}{s - i\omega} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s - i\omega}$$

Kemudian ambillah bagian riil dan imajinernya, kita peroleh

$$\int_0^\infty e^{-st} (\cos \omega t + i \sin \omega t)\, dt = \frac{s + i\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} + i \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

atau $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t\, dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t\, dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

Metode 2. Dengan pengintegralan langsung,

$$\int_0^\infty e^{-st} \cos \omega t\, dt = \frac{e^{-st}(\omega \sin \omega t - s \cos \omega t)}{s^2 + \omega^2} \Big|_0^\infty = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t\, dt = \frac{e^{-st} (\omega \sin \omega t - s \cos \omega t)}{s^2 + \omega^2} \Big|_0^\infty = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

5. Tentukanlah transformasi Laplace dari setiap fungsi berikut.

(a) $3e^{-4t}$, (b) $2t^2$, (c) $4 \cos 5t$, (d) $\sin \pi t$, (e) $-3/\sqrt{t}$.

(a) $\mathcal{L}\{3e^{-4t}\} = 3\mathcal{L}\{e^{-4t}\} = \dfrac{3}{s - (-4)} = \dfrac{3}{s + 4}$, $s > -4$

(b) $\mathcal{L}\{2t^2\} = 2\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2\Gamma(3)}{s^3} = \dfrac{2 \cdot 2!}{s^3} = \dfrac{4}{s^3}$, $s > 0$

(c) $\mathcal{L}\{4 \cos 5t\} = 4\mathcal{L}\{\cos 5t\} = 4 \cdot \dfrac{s}{s^2 + 25} = \dfrac{4s}{s^2 + 25}$, $s > 0$

(d) $\mathcal{L}\{\sin \pi t\} = \dfrac{\pi}{s^2 + \pi^2}$, $s > 0$

(e) $\mathcal{L}\left\{-\frac{3}{\sqrt{t}}\right\} = -3\ \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = -\frac{3\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = -\frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = -3\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{s}}},\quad s > 0$

6. Tentukanlah transformasi Laplace dari setiap fungsi berikut.

(a) $3t^4 - 2t^{3/2} + 6$, (b) $5 \sin 2t - 3 \cos 2t$, (c) $3\sqrt[3]{t} + 4e^{2t}$, (d) $1/t^2$.

(b) $\mathcal{L}\{3t^4 - 2t^{3/2} + 6\} = 3\ \mathcal{L}\{t^4\} - 2\mathcal{L}\{t^{3/2}\} + 6\ \mathcal{L}\{1\}$

$$= \frac{3\Gamma(5)}{s^5} - \frac{2\Gamma(5/2)}{s^{5/2}} + \frac{6}{s}$$

$$= \frac{3 \cdot 4!}{s^5} - \frac{2 \cdot (3/2)(1/2)\Gamma(1/2)}{s^{5/2}} + \frac{6}{s}$$

$$= \frac{72}{s^5} - \frac{3\sqrt{\pi}}{2s^{5/2}} + \frac{6}{s}$$

(c) $\mathcal{L}\{5 \sin 2t - 3 \cos 2t\} = 5\ \mathcal{L}\{\sin 2t\} - 3\ \mathcal{L}\{\cos 2t\}$

$$= \frac{5 \cdot 2}{s^2 + 4} - \frac{3 \cdot s}{s^2 + 4} = \frac{10 - 3s}{s^2 + 4}$$

(d) $\mathcal{L}\{3\sqrt[3]{t} + 4e^{2t}\} = 3\ \mathcal{L}\{t^{1/3}\} + 4\ \mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{3\Gamma(4/3)}{s^{4/3}} + \frac{4}{s-2}$

$$= \frac{3(1/3)\Gamma(1/3)}{s^{4/3}} + \frac{4}{s-2} = \frac{\Gamma(1/3)}{s^{4/3}} + \frac{4}{s-2}$$

(e) $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t^2}\right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{t^2}\,dt$. Karena integral ini tidak konvergen, transformasi Laplacenya tidak ada.

Dalam bagian (a), (b), (c) kita hilangkan daerah keujudannya, yang dengan mudah dapat ditentukan.

7. Jika $f(t) = \begin{cases} 3 & 0 < t < 2 \\ -1 & 2 < t < 4 \\ 0 & t > 4 \end{cases}$ tentukanlah $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

Kita peroleh

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^2 e^{-st} f(t)\,dt + \int_2^4 e^{-st} f(t)\,dt + \int_4^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \int_0^2 e^{-st}(3)\ dt + \int_2^4 e^{-st}(-1)dt + \int_4^\infty e^{-st}(0)dt$$

$$= 3\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) \Big|_0^2 - \left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) \Big|_2^4 + 0$$

$$= \frac{2(1 - e^{-2s})}{s} + \frac{e^{-4s} - e^{-2s}}{s} = \frac{3 - 4e^{-2s} + e^{-4s}}{s}$$

8. Tentukanlah $\mathcal{L}\{\sin t \cos t\}$

Diketahui : sin 2 t 2 sin t cos t sehingga sin t cos t = $^1/_2$ sin 2 t. Jadi

$$\mathcal{L}\{\sin t \cos t\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = \frac{1}{s^2 + 4}$$

KEUJUDAN TRANSFORMASI LAPLACE

9. Buktikanlah (a) Teorema 8-1, dan (b) Teorema 8-2

(a) Diketahui :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\ dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

Sekarang karena $f(t)$ kontinu bagian demi bagian untuk $0 \le t \le T$, demikian juga $e^{-st} f(t)$ sehingga integral pertama di ruas kanan ada.

Untuk menunjukkan bahwa integral kedua di ruas kanan ada, kita gunakan kenyataan bahwa $|f(t))| \le Me^{\alpha t}$ sehingga :

$$\left| \int_T^\infty e^{-st} f(t)\ dt \right| \le \int_T^\infty e^{-st}|f(t)|\ dt \le \int_T^\infty e^{-st} Me^{\alpha t}\ dt$$

$$\le M \int_0^\infty e^{-(s - \alpha)t}\ dt = \frac{M}{s - \alpha} \qquad \text{..... (1)}$$

untuk $s > \alpha$ dan hasil yang diinginkan terbukti.

(b) Seperti bagian (a), diketahui :

$$|F(s)| = |\mathcal{L}\{f(t)\}| \le \int_0^T e^{-st}|f(t)|\ dt + \int_T^\infty e^{-st}|f(t)|\ dt$$

Sekarang, karena $f(t)$ kontinu bagian demi bagian pada $0 \le t \le T$, maka ia terbatas, yaitu $|f(t)| \le K$ untuk satu konstanta K. Gunakanlah ini dan hasil dari (1), maka diperolehlah :

$$|F(s)| \le \int_0^T e^{-st} K \, dt + \frac{M}{s-\alpha} < \int_0^\infty e^{-st} K \, dt + \frac{M}{s-\alpha} = \frac{K+M}{s-\alpha}$$

Ambillah limitnya untuk $s \to \infty$, ini mengakibatkan $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$

seperti yang diinginkan.

10. Buktikanlah bahwa (a) $\mathcal{L}\{\frac{e^{2t}}{t+4}\}$ ada, (b) $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{\frac{e^{2t}}{t+4}\} = 0$

(a) Pada setiap selang, $e^{2t}/(t+4)$ adalah kontinu (dan dengan sendirinya kontinu bagian demi bagian). Juga untuk setiap $t \ge 0$,

$$\frac{e^{2t}}{t+4} < \frac{e^{2t}}{4}$$

sehingga $e^{2t}/(t+4)$ berada dalam orde eksponensial. Jadi berdasarkan Soal 9(a), transformasi Laplace tersebut ada.

(b) Ini langsung diperoleh dari soal 9 (b) dan hasil dari (a).

BEBERAPA INVERS TRANSFORMASI LAPLACE YANG ELEMENTER

11. Buktikanlah bahwa $\mathcal{L}^{-1}$ adalah suatu operator linier.

Karena $\mathcal{L}$ adalah suatu operator linier [Soal 3], maka diperoleh :

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s).$$

Jadi berdasarkan definisinya,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} &= c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \\ &= c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa $\mathcal{L}^{-1}$ adalah suatu operator linier.

12. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{5}{s+2}\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s-3}{s^2+4}\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}(\frac{2s-5}{s^2})$, (d) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^k}\}$ $> k > 0$.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{5}{s+2}\} = 5\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\} = 5e^{-2t}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4s-3}{s^2+4}\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\} - \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\} = 4\cos 2t = -\frac{3}{2}\sin 2t$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{2s-5}{s^2}\} = 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\} = 2 - 5t$

(d) karena $\mathcal{L}\{t^p\} = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$

$$\mathcal{L}\{\frac{t^p}{\Gamma(p+1)}\} = \frac{1}{s^{p+1}} \text{ atau } \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{p+1}}\} = \frac{t^p}{\Gamma(p+1)}$$

Kemudian misalkan $p = k - 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^k}\} = \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$$

13. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4-5s}{s^{3/2}}\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+2s}\}$

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{4-5s}{s^{3/2}}\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{3/2}}\} - 5\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^{1/2}}\}$

$$= 4 \cdot \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} - 5 \cdot \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{8t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{5t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{8t^{1/2} - 5t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+2s}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s(s+2)}\} = {}^1/_2\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\}$

$$= {}^1/_2\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} - {}^1/_2\,\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+2}\}$$

$$= {}^1/_2 - {}^1/_2 e^{-2t} = {}^1/_2(1 - e^{-2t})$$

TRANSFORMASI LAPLACE UNTUK FUNGSI TURUNAN

14. Buktikanlah Teorema 8

Karena $f'(t)$ kontinu bagian demi bagian pada $0 < t < T$, maka ada sejumlah berhingga selang bagian, katakanlah $(0, T_1)$, (T_1, T_2), . . ., (T_n, T), di mana pada setiap selang ini $f'(t)$ kontinu dan limit $f'(t)$ untuk t mendekati titik akhir setiap selang bagiannya berhingga. Maka

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt + \int_0^{T_1} e^{-st}f'(t)\,dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st}f'(t)\,dt + \ldots + \int_{T_n}^{T} e^{-st}f'(t)\,dt$$

Dengan metode pengintegralan parsial, ruas kanannya menjadi

$$\left[e^{-st}f(t)\,\Big|_0^{T_1} + s\int_0^{T_1} e^{-st}f(t)\,dt\right] + \left[e^{-st}f(t)\,\Big|_{T_1}^{T_2} + s\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}f(t)\,dt\right]$$

$$+ \ldots + \left[e^{-st}f(t)\,\Big|_{T_n}^{T} + s\int_{T_n}^{T} e^{-st}f(t)\,dt\right]$$

Karena $f(t)$ kontinu, kita dapat menuliskan

$$\int_0^T e^{-st}f'(t)\,dt = e^{-st}f(T) - f(0) + s\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt \qquad \text{.....(1)}$$

Sekarang, karena $f(t)$ berada dalam orde eksponensial, maka untuk T yang cukup besar berlaku

$$|e^{-sT}f(T)| \le |e^{-sT}Me^{\alpha T}| = Me^{-(s-\alpha)T} \qquad \text{.....(2)}$$

Kemudian ambillah limitnya untuk $T\to\infty$ pada (1), dan gunakanlah kenyataan bahwa $\lim_{T\to\infty} e^{-st}f(T) = 0$, kita memperoleh yang diinginkan:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = s\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

15. Buktikanlah bahwa jika $f'(t)$ kontinu dan $f''(t)$ kontinu bagian demi bagian pada setiap selang berhingga $0 < t$, T dan jika $f(t)$ dan $f'(t)$ berada dalam orde eksponensial untuk $t > T$, maka

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$$

Misalkan $g(t) = f'(t)$. Maka g(t) memenuhi syarat Teorema 8-3, sehingga:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

Jadi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\,\mathcal{L}\{f'(t) - f'(0)\\ &= s\,[s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0)\\ &= s^2\,\mathcal{L}\{(t)\} - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

16. Misalkan $f(t) = te^{at}$. (a) Tunjukkanlah bahwa $f(t)$ memenuhi persamaan $f'(t) = af(t) + e^{at}$. (b) Gunakanlah bagian (a) untuk menentukan $\mathcal{L}\{te^{at}\}$.

(a) $f'(t) = t(ae^{at}) + e^{at} = af(t) + e^{at}$

(b) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \mathcal{L}\{af(t) + e^{at}\} = a\ \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{e^{at}\}$

Karena $f(0) = 0$, maka dengan menggunakan soal 14. kita memperoleh

$$s\ \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = a\ \mathcal{L}\{f(t)\} + \frac{1}{s-a} \text{ atau } (s-a)\ \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-a}$$

yaitu

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}$$

FUNGSI TANGGA SATUAN

17. Buktikanlah bahwa $\mathcal{L}\{\upsilon(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$ jika $s > 0$

Diketahui $\upsilon(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$ sehingga

$$\mathcal{L}(\upsilon(t-a)\} = \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)\,dt = 0 + \frac{e^{-st}}{-s}\Big|_a^\infty$$

$$= \frac{e^{-as}}{s} \text{ jika } s > 0$$

18. (a) Nyatakanlah fungsi $f(t) = \begin{cases} 8, & t < 2 \\ 6, & t > 2 \end{cases}$ dalam suku-suku fungsi tangga satuan dan

(b) tentukanlah transformasi Laplacenya.

(a) Diketahui $f(t) = 8 + \begin{cases} 0 & t < 2 \\ -2 & t > 2 \end{cases}$

$$= 8 - 2\begin{cases} 0 & t < 2 \\ 1 & t > 2 \end{cases}$$

$$= 8 - 2\upsilon(t-1)$$

(b) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{8 - 2\upsilon(t-1)\} = \dfrac{8}{s} - \dfrac{2e^{-s}}{s} = \dfrac{8 - 2e^{-s}}{s}$

Hasil tersebut dapat juga diperoleh secara langsung.

TEOREMA-TEOREMA KHUSUS PADA TRANSFORMASI LAPLACE

19. Buktikanlah Teorema 8-5

Diketahui $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

Maka $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [e^{at} f(t)]\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = F(s - a)$

20. Buktikanlah Teorema 8-6

Metode 1. Karena $\upsilon(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$ maka

$$\mathcal{L}\{\upsilon(t - a)\, f(t - a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\, \upsilon(t - a)\, f(t - a)\, dt$$

$$= \int_0^a e^{-st}\,(0)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} f(t - a)\, dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t - a)\, dt = \int_0^\infty e^{-st(v+a)} f(v)\, dv$$

$$= e^{-as} \int_0^\infty e^{-sv} f(v)\, dv$$

$$= e^{-as} F(s)$$

Metode 2. Karena $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$, maka

$$e^{-as} F(s) = \int_0^\infty e^{-s(t + a)} f(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-sv} f(v - a)\, dv$$

$$= \int_0^a e^{-sv}(0)\, dv + \int_a^\infty e^{-sv} f(v - a)\, dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \begin{Bmatrix} 0 & , & t < a \\ f(t - a) & , & t > a \end{Bmatrix} dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} f(t - a) \begin{Bmatrix} 0 & , & t < a \\ 1 & , & t > a \end{Bmatrix} dt$$

$$= \mathcal{L}\{t - a)\, \upsilon(t - a)\}$$

21. Buktikanlah Teorema 8-7

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\, dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-sv/a} f(v)\, dv = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

di mana kita gunakan transformasi t = v/a.

22. Buktikanlah Teorema 8-8, untuk (a) n = 1, (b) suatu bilangan bulat positif n.

(a) Karena $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$,

maka dengan mendifferensialkannya terhadap s dan dengan menggunakan Kaidah Leibnitz, kita memperoleh

$$\frac{dF}{ds} = F'(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[e^{-st} f(t)]\, dt$$

$$= -\int_0^\infty e^{-st}\, tf(t)\, dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Jadi $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$.

(b) $$\frac{d^nF}{ds^n} = \frac{d^n}{ds^n}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}[e^{-st} f(t)]\, dt$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty e^{-st}[t^n f(t)]\, dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

Jadi $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$.

23. Buktikanlah Teorema 8-9

Diketahui

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + \int_P^{2P} e^{-st} f(t)\, dt + \int_{2P}^{3P} e^{-st} f(t)\, dt + \ldots$$

$$= \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + \int_0^P e^{-s(v+P)} f(v+P)\, dv + \int_0^P e^{-s(v+2P)} f(v+2P)\, dv + \ldots$$

Kemudian, karena $f(t)$ mempunyai periode $P > 0$, maka $f(v + P) = f(v)$, $f(v + 2P) = f(v)$, dan seterusnya kita dapat menggantikan peubah v dengan t. Jadi :

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + e^{-sP}\int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + e^{-2sP}\int_0^P e^{-st} f(t)\, dt + \ldots$$

$$= (1 + e^{-sP} + e^{-2sP} + \ldots) \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-sP}} \int_0^P e^{-st} f(t)\, dt \text{ di mana } s > 0$$

24. Buktikanlah Teorema 8-10

Misalkan $G(t) = \int_0^t f(u)\, du$. Maka $G'(t) = f(t)$, $G(0) = 0$, Jadi

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = s\, \mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) \text{ atau } \mathcal{L}\{f(t)\} = s\, \mathcal{L}\{G(t)\}$$

sehingga $$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\} = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

Dari sini diperoleh $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\, du$$

25. Buktikanlah Teorema 8-11

Kita akan mengandaikan bahwa

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t}$$

ada (dan juga syarat Teorema 8-1, dalam hal lain, transformasi Laplacenya mungkin tidak ada. Kemudian, jika $g(t) = f(t)/t$, atau $f(t) = tg(t)$,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -\frac{d}{ds}\, \mathcal{L}\{g(t) = -\frac{d\, G(s)}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Jadi $$G(s) = -\int_c^s F(u)\, du = \int_s^c F(u)\, du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Karena g(t) memenuhi syarat Teorema 8-1, maka $\lim_{s \to \infty} G(s) = 0$.

Dari (2) kita lihat bahwa c haruslah berhingga, dan

$$G(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)\, du$$

26. Buktikanlah Teorema 8-12

Diketahui $F(s) = \int_0^\infty e^{-su} f(u)\, du$, $G(s) = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv$

Maka $$F(s)\,G(s) = \left[\int_0^\infty e^{-su} f(u)\,du\right]\left[\int_0^\infty e^{-sv} g(v)\,dv\right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)\,g(v)\,du\,dv$$

$$= \int_{t=0}^\infty \int_{u=0}^t e^{-st} f(u)\,g(t-u)\,du\,dt$$

$$= \int_{t=0}^\infty e^{-st}\left[\int_{u=0}^t f(u)\,g(t-u)\,du\right]dt$$

$$= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,du\right\}$$

di mana kita telah menggunakan transformasi $t = u + v$ dari bidang uv ke bidang ut.

PENGGUNAAN TEOREMA-TEOREMA UNTUK MENENTUKAN TRANSFORMASI LAPLACE

27. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 4t\}$, (b) $\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\}$, (c) $\mathcal{L}\{e^t/\sqrt{t}\}$

(a) Karena $\mathcal{L}\{\sin 4t\} = \dfrac{4}{s^2+16}$, maka menurut Teorema 8-5

$$\mathcal{L}\{e^{3t}\sin 4t\} = \frac{4}{(s-3)^2-16} = \frac{4}{s^2-6s+25}$$

(b) Karena $\mathcal{L}\{t^2\} = \dfrac{2!}{s^3}$, maka $\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\} = \dfrac{2!}{(s+2)^3}$

(c) Karena $\mathcal{L}\{1/\sqrt{t}\} = \mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}(1/2)/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/s$, maka $\mathcal{L}\{e^t/\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/(s-1)$

28. Tentukanlah $\mathcal{L}\{F(t)$ di sini $f(t) = \begin{cases} \sin t & t < \pi \\ t & t > \pi \end{cases}$

Diketahui $f(t) = \sin t + \begin{cases} 0 & t < \pi \\ t - \sin t & t > \pi \end{cases}$

$$= \sin t + (t - \sin t)\upsilon(t-\pi)$$
$$= \sin t + [\pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)]\upsilon(t-\pi)$$

Kemudian gunakanlah Teorema 8-6

$$\mathcal{L}\{f(t) = \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{[\pi + (t-\pi) + \sin(t-\pi)]\upsilon(t-\pi)\}$$

$$= \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s}\left[\frac{\pi}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1}\right]$$

Hasil ini dapat juga langsung diperoleh tanpa menggunakan Teorema 8-6.

29. Diketahui $\mathcal{L}\{\frac{\sin t}{t}\} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$, tentukan $\mathcal{L}\{\frac{\sin at}{t}\}$

Menurut Teorema 8-7

$$\mathcal{L}\{\frac{\sin at}{at}\} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{1}{s/a}) \text{ yaitu } \mathcal{L}\{\frac{\sin at}{t}\} = \tan^{-1}(\frac{a}{s})$$

30. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{t \sin 2t\}$, (b) $\mathcal{L}\{t^2 \sin 2t\}$.

Menurut Teorema 8-8, karena $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4}$, maka

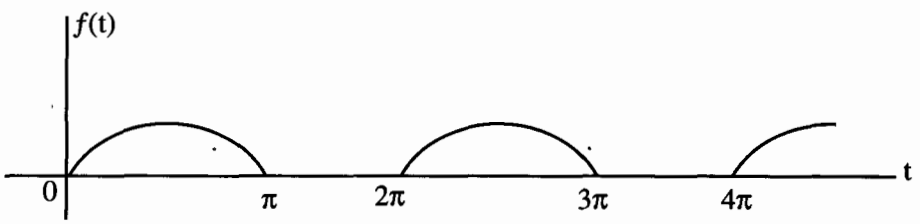
(a) $\mathcal{L}\{t \sin 2t\} = -\frac{d}{ds}(\frac{2}{s^2 + 4}) = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$

(b) $\mathcal{L}\{t^2 \sin 2t\} = \frac{d^2}{ds^2}(\frac{2}{s^2 + 4}) = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}$

31. Tentukanlah transformasi Laplace dari suatu fungsi yang periodenya 2π pada selang $0 \le t < 2\pi$ dan ditentukan oleh persamaan :

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t < 2\pi \end{cases}$$

Grafik fungsi ini menyerupai gelombang sinus dan ditunjukkan dalam Gambar 8-3.



Gambar 8-3

Menurut Teorema 8-9, transformasi Laplace tersebut diberikan oleh persamaan :

$$\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left(\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right) = \frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$$

32. Tentukanlah $\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}$.

Karena $\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}}{1} = 1$ menurut aturan L'hospital dan $1 - e^{-t}$ kontinu dan berada dalam tingkat eksponensial, maka syarat Teorema 8-11 dipenuhi. Kemudian, karena

$$\mathcal{L}\{1-e^{-t}\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}, \text{ maka ini mengakibatkan}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\} = \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \lim_{K\to\infty}\int_s^{K}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du$$

$$= \lim_{K\to\infty}\left[\ln u - \ln(u+1)\right]\Big|_s^K$$

$$= \lim_{K\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\right] = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$$

PENGGUNAAN TEOREMA-TEOREMA UNTUK MENENTUKAN INVERS TRANSFORMASI LAPLACE

33. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+3}}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{(2s-3)^5}\right\}$.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s-1)+5}{(s-1)^2+4}\right\}$

$$= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} + \frac{5}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\}$$

Sekarang karena $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$

berdasarkan Teorema 8-5 kita memperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2+4}\right\} = e^t\cos 2t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+4}\right\} = e^t\sin 2t$$

Jadi : $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-2s+5}\right\} = 2e^t \cos 2t + {}^5/_2\, e^t \sin 2t = {}^1/_2 e^t(4\cos 2t + 5\sin 2t)$

(b) Dari Soal 12 (d) diketahui $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\} = \frac{t^{k-1}}{(k)}$ atau jika $k = {}^1/_2$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$

Kemudian berdasarkan Teorema 8-5,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+3}}\right\} = \frac{e^{-3t}\, t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{(2s-3)^5}\right\} = \frac{1}{2^5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-4}{(s-3/2)^5}\right\} = \frac{1}{32}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-3/2)+1/2}{(s-3/2)^5}\right\}$

$$= \frac{3}{32}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3/2)^4}\right\} + \frac{1}{64}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3/2)^5}\right\}$$

$$= \frac{3}{32}\cdot\frac{t^3}{3!}e^{3t/2} + \frac{1}{64}\frac{t^4}{4!}e^{3t/2} = \frac{t^3(t+8)e^{3t/2}}{1536}$$

34. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-2}}\right\}$

(a) Karena $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{e^2+16}\right\} = \cos 4t$, berdasarkan Teorema 8-6 kita memperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-2s}}{s^2+16}\right\} = \upsilon(t-2)\cos 4(t-2) = \begin{cases} 0 & t < 2 \\ \cos 4(t-2) & t > 2 \end{cases}$$

(b) Karena $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s-2}}\right\} = \frac{t^{-1/2}\, e^{2t}}{\sqrt{\pi}}$

dan juga berdasarkan Teorema 8-6, maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{\sqrt{s-2}}\right\} = \upsilon(t-5)\frac{(t-5)^{-1/2}e^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}} = \begin{cases} 0 & t < 5 \\ \dfrac{(t-5)^{-1/2}e^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}}, & t > 5 \end{cases}$$

35. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\}$.

Misalkan $F(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$ sehingga $F'(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}$.

Kemudian berdasarkan Teorema 8-8,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} = -t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\}$$

atau

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)\right\} = -\frac{1}{t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s}\right\} = \frac{1 - e^{-t}}{t}$$

36. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\}$.

Karena $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+1}}\right\} = \frac{t^{-1/2}e^{-t}}{\sqrt{\pi}}$, berdasarkan Teorema 8-10 kita memperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \int_0^t \frac{u^{-1/2}e^{-u}}{\sqrt{\pi}}\,du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv$$

dengan memisalkan $u = v^2$.

37. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\}$.

Misalkan $F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2 + a^2}$ maka $f(t) = g(t) = \frac{\sin at}{a}$

Jadi berdasarkan teorema konvolusi (Teorema 8-12),

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}\right\} = \int_0^t \frac{\sin au}{a} \cdot \frac{\sin a(t-u)}{a}\,du = \frac{1}{a^2}\int_0^t \sin au \sin a(t-u)\,du$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^t [\cos a(2u - t) - \cos at]\,du = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$$

38. Selesaikanlah y(t) dari persamaan

$$y(t) = 1 + \int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$$

Dengan mengambil transformasi Laplace-nya, dan dengan teorema konvolusi kita memperoleh

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \mathcal{L}\{y(t) * \cos t\} = \frac{1}{s} + \frac{Y(s)}{s^2 + 1}$$

Maka $\left[1 - \frac{1}{s^2 + 1}\right] Y(s) = \frac{1}{s}$ atau $Y(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$

sehingga $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}\right\} = 1 + \frac{t^2}{2}$

yang dapat diperiksa sebagai suatu penyelesaian.

Persamaan yang diketahui dinamakan persamaan integral karena fungsi yang tidak diketahui muncul di bawah tanda integral.

PECAHAN BAGIAN

39. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\}$.

$$\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-3}$$

Untuk menentukan konstanta A, B, C, kalikanlah dengan (s – 2) (s + 1) (s – 3) sehingga

$$2s^2 - 4 = A(s+1)(s-3) + B(s-2)(s-3) - C(s-2)(s+1)$$

yang merupakan suatu kesamaan dan harus berlaku untuk setiap nilai s. Kemudian dengan memisalkan s = 2, –1, 3 secara berturut-turut, diperoleh A = –4/3, B = –1/6, C = 7/2. Jadi :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-4/3}{s-2} + \frac{-1/6}{s+1} + \frac{7/2}{s-3}\right\} = -\,{}^{4}/_{8}e^{2t} - {}^{1}/_{6}e^{-t} + {}^{7}/_{2}e^{3t}$$

40. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad \text{.....(1)}$$

atau $\quad 3s + 1 = A(s^2 + 1) + (Bs + C)(s - 1)$

Misalkan s = 1, kita memperoleh A = 2. Misalkan s = 0, kita memperoleh A – C = 1, sehingga C = 1. Kemudian misalkan s sama dengan suatu bilangan lainnya, katakanlah –1, kita memperoleh –2 = 2A – 2(C – B) dan B = 2. Jadi :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+1}{s^2+1}\right\} = 2e^t - 2\cos t + \sin t$$

Metode lain

Kalikan (a) dengan s sesudah menentukan A dan kemudian misalkan $s\to\infty$, kita memperoleh $A + B = 0$ atau $B = -A = -2$. Metode ini menghasilkan suatu penyederhanaan dalam prosedurnya.

41. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2 - 15s + 7}{(s + 1)(s - 2)^3}\right\}$.

Diketahui : $$\frac{5s^2 - 15s + 7}{(S + 1)(s - 2)^3} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{(s - 2)^3} + \frac{C}{(s - 2)^3} + \frac{D}{s - 2} \quad \text{.....(1)}$$

atau

$$5s^2 - 15s + 7 = A(s - 2)^3 + B(s + 1) + C(s + 1)(s - 2) + D(s + 1)(s - 2)^2$$

Misalkan $s = -1$, kita memperoleh $A = -1$. Misalkan $s = 2$, kita memperoleh $B = -1$. Misalkan s sama dengan dua bilangan lainnya, katakanlah 0 dan 1, kita memperoleh $-2C + 4D = 0$ dan $-2C + 2D = -2$ sehingga $C = 2$, $D = 1$. Jadi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2 - 15s + 7}{(s + 1)(s - 2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s + 1} + \frac{-1}{(s - 2)^3} + \frac{2}{(s - 2)^2} + \frac{1}{s - 2}\right\}$$

$$= -e^{-t} - {}^1/_2 t^2 e^{2t} + 2te^{2t} + e^{2t}$$

Metode lain.

Kalikan (1) dengan s sesudah menentukan A dan misalkan $s\to\infty$, kita memperoleh $A + D = 0$ atau $D = 1$, yang memberikan penyederhanaan dalam prosedur tersebut.

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL

42. Selesaikanlah $y''(t) + y(t) = 1$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Ambil transformasi Laplace dari kedua ruas persamaan differensial yang diberikan dan misalkan $Y = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Maka

$$(Y''(t) + y(t) = \mathcal{L}\{1\} \text{ atau } s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 1/s$$

Karena $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ maka

$$s^2Y - s + Y = \frac{1}{s},\ (s^2 + 1)Y = s + \frac{1}{s} \text{ atau } Y = \frac{2 + 1/s}{s^2 + 1} = \frac{1}{s}$$

Jadi $\quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$

yang merupakan penyelesaian yang diinginkan.

43. Selesaikanlah $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

Ambil transformasi Laplace dari persamaan differensial yang diketahui :

$$[s^2Y - sy(0) - y'(0)] - 2[sY - y(0)] + 2Y = \frac{2}{s+1}$$

Kemudian gunakanlah $y(0) = 2$. $y'(0) = -1$ dan selesaikanlah persamaan aljabar ini untuk Y. Dengan menggunakan pecahan bagian diperoleh :

$$Y = \frac{2s^2 - 5s - 5}{(s+1)(s-1)(s-2)} = \frac{1/3}{s+1} + \frac{4}{s-1} + \frac{-7/3}{s-2}$$

Jadi dengan mengambil invers transformasi Laplace tersebut kita memperoleh penyelesaian yang diinginkan :

$$y = {}^1/_3e^{-t} + 4e^t - {}^7/_3e^{2t}$$

44. Selesaikanlah $y^{(iv)} + 2y'' + y = \sin t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 3$, $y'''(0) = 0$.

Ambil transformasi Laplace dari persamaan differensial yang diketahui dan gunakanlah syarat awalnya,

$$[s^4Y - s^3(1) - s^2(-2) - s(3) - 0] + 2[s^2Y - s(1) - (-2)] + Y = \frac{1}{s^2+1}$$

yang dapat ditulis sebagai :

$$(s^4 + 2s^2 + 1)Y = \frac{1}{s^2+1} + s^3 - 2s^2 + 5s - 4$$

$$\text{atau } Y = \frac{1}{(s^2+1)^3} + \frac{s^3 - 2s^2 + 5s - 4}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{(s^2+1)^3} + \frac{(s^3 + s) - 2(s^2+1) + 4s - 2}{(s^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)^3} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1} + \frac{4s-2}{(s^2+1)^2}$$

Dengan menggunakan teorema khusus transformasi Laplace [lihat Soal 78], maka

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{3}{8}\sin t - \frac{3}{8}\cos t - \frac{1}{8}t^2 \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-2}{(s^2+1)^2}\right\} = 2t \sin t - \sin t + t \cos t$$

sehingga diperoleh penyelesaian yang diinginkan :

$$y = (1 + \frac{5}{8}t)\cos t - (\frac{21}{8} - 2t + \frac{1}{8}t^2)\sin t$$

PENGGUNAAN PADA MASALAH FISIS

45. Selesaikanlah Soal 32 di halaman 60 dengan transformasi Laplace.

Seperti dalam Soal 32, persamaan differensialnya adalah :

$$\frac{dI}{dt} + 5I = \frac{E}{2}, \quad I(0) = 0$$

(a) Jika E = 40, transformasi Laplace dari (1) adalah :

$$[s\bar{I} - I(0)] + 5\bar{I} = \frac{20}{s}$$

di mana $\bar{I} = \mathcal{L}\{I\}$. Kemudian gunakan I(0) = 0 dan selesaikan untuk I, diper oleh :

$$I = \frac{20}{s(s+5)} = \frac{20}{5}(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5}) = 4(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+5})$$

Jadi $I = 4(1 - e^{-5t})$

(b) Jika $E = 20e^{-3t}$ maka

$$[s\bar{I} - I(0)] + 5\bar{I} = \frac{10}{s+3}$$

sehingga $\bar{I} = \frac{10}{(s+3)(s+5)} = \frac{10}{2}(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5}) = 5(\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+5})$

Jadi : $I = 5(e^{-3t} - e^{-5t})$

(c) Jika E = 50 sin 5t, maka

$$[s\bar{I} - I(0)] + 5\bar{I} = \frac{125}{s^2+25}$$

sehingga $\bar{I} = \frac{125}{(s+5)(s^2+25)} = \frac{5/2}{s+5} + \frac{(-5/2)s + (25/2)}{s^2+25}$

Jadi : $I = \frac{5}{2}e^{-5t} - \frac{5}{2}\cos 5t + \frac{5}{2}\sin 5t$

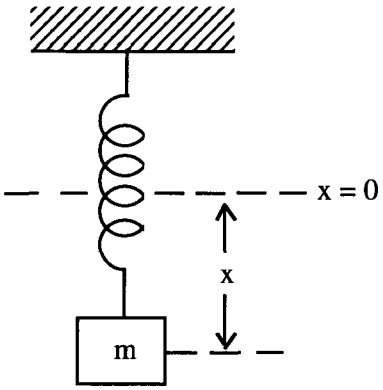
46. Suatu massa m (Gambar 8-4) digantungkan pada ujung suatu pegas tegak dengan konstanta κ (gaya yang diinginkan untuk menghasilkan regangan satuan). Suatu gaya luar F(t) bekerja pada massa dan juga suatu gaya tahanan yang sebanding dengan kecepatan sesaatnya. Andaikan bahwa x adalah perpindahan massa pada saat t dan massa bergerak dari keadaan diam pada x = 0, (a) tentukanlah suatu persamaan differensial untuk gerakan ini dan (b) tentukan x pada saat t.

(a) Gaya tahanan tersebut diberikan oleh $-\beta \dfrac{dx}{dt}$, gaya pembalikan pegas diberikan oleh $-\kappa x$. Maka berdasarkan Hukum Newton,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\beta\frac{dx}{dt} - \kappa x + F(t)$$

atau
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + \kappa x = F(t) \qquad \text{.....(1)}$$

di mana
$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0 \qquad \text{.....(2)}$$



Gambar 8-4

(b) Ambil transformasi Laplace dari (1), $\mathcal{L}\{F(t)\} = \bar{F}(s)$, $\mathcal{L}\{x\} = X$, diperoleh :

$$m[s^2X - sx(0) - x'(0)] + \beta[sX - x(0)] + \kappa X = \bar{F}(s)$$

sehingga dengan menggunakan (2),

$$X = \frac{\bar{F}(s)}{ms^2 + \beta s + \kappa} = \frac{\bar{F}(s)}{m[(s + \beta/sm)^2 + R]} \qquad \text{.....(3)}$$

di mana $R = \dfrac{\kappa}{m} - \dfrac{\beta^2}{4m^2}$. Di sini ada 3 kasus yang diperhatikan.

Kasus 1. $R > 0$. Dalam kasus ini misalkan $R = \omega^2$. Diperoleh

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \beta/2m)^2 + \omega^2}\right\} = e^{-\beta t/2m}\frac{\sin \omega t}{\omega}$$

Kemudian gunakanlah teorema konvolusi, dari (3) kita memperoleh

$$x = \frac{1}{\omega m}\int_0^t F(u)\, e^{-\beta(t-u)/2m} \sin \omega(t - u)\, du$$

Kasus 2. $R = 0$. Dalam kasus ini $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \beta/2m)^2}\right\} = te^{-\beta t/2m}$

dan teorema konvolusi (3) memberikan :

$$x = \frac{1}{m}\int_0^t F(u)e^{-\beta(t-u)/m}\, du$$

Kasus 3. $R < 0$. Dalam kasus ini $R = -\alpha^2$. Diperoleh :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + \beta/2m)^2 - \alpha^2}\right\} = e^{-\beta t/2m}\frac{\sinh \alpha t}{\alpha}$$

Kemudian gunakanlah teorema konvolusi (3) yang memberikan :

$$x = \frac{1}{\alpha m}\int_0^t F(u)e^{-\beta(t-u)/2m} \sinh \alpha\, (t - u)\, du$$

47. Selesaikanlah Soal 48, dengan transformasi Laplace.

Dari persamaan (1) dan (2) Soal 48: Dengan mengambil transformasi Laplace dan menggunakan $\mathcal{L}\{I_1\} = \bar{I}_1$, $\mathcal{L}\{I_2\} = \bar{I}_2$, $I = I_1 + I_2$, $\mathcal{L}\{I\} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$, kita memperoleh

$$20(\bar{I}_1 + \bar{I}_2) - \frac{120}{s} + 2(s\bar{I}_1 - \bar{I}_1(0)] + 10\bar{I}_1 = 0$$

$$-10I_1 - 2[s\bar{I}_1 - I_1(0)] + 4[s\bar{I}_2 - I_2(0)] + 20\bar{I}_2 = 0$$

Gunakanlah $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$, dan ini menjadi

$$(20 + 2s)\bar{I}_1 + 20\bar{I}_2 = 120/s$$

$$(-10 - 2s)\bar{I}_1 + (4s + 20)\bar{I}_2 = 0$$

Selesaikan,

$$\bar{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} 120/s & 20 \\ 0 & 4s+20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+2s & 20 \\ -10-2s & 4s+20 \end{vmatrix}}, \qquad \bar{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 30+2s & 120/s \\ -10-2s & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 30+2s & 20 \\ -10-2s & 4s+20 \end{vmatrix}}$$

atau $\bar{I}_1 = \dfrac{60}{s(s+20)} = 3\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+20}\right)$, $\bar{I}_2 = \dfrac{30}{s(s+20)} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+20}\right)$

Jadi : $I_1 = 3(1 - e^{-20t})$, $I_2 = {}^8/_2\,(1 - e^{-20t})$, $I = I_1 + I_2 = {}^9/_2\,(1 - e^{-20t})$.

8.12 SOAL-SOAL LATIHAN

TRANSFORMASIKAN LAPLACE DARI FUNGSI ELEMENTER

48. Tentukanlah transformasi Laplace dari setiap fungsi berikut :
    (a) $4e^{2t/3}$
    (b) $6t - 3$
    (c) $(t+1)^2$
    (d) $2\sin 3t + 5\cos 3t$
    (e) $(e^{3t} - e^{-3t})2$
    (f) $(\sqrt{t}+1)(2-\sqrt{t})/\sqrt{t}$
    (g) $9\sin^2 3t$
    (h) $\sin 2t \cos 2t$
    (i) $(\sqrt[3]{t^2} - 1/\sqrt[3]{t})^2$
    (j) $5\sinh 2t - 5\cosh 2t$

49. Tentukanlah $\mathcal{L}\{f(t)\}$ dalam setiap kasus

    (a) $f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 4 \\ 1, & t > 4 \end{cases}$

    (b) $f(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases}$

    (c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 2 \\ 1, & 2 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases}$

50. Buktikanlah bahwa e^{t^2} tidak mempunyai transformasi Laplace.

51. Periksalah apakah $\sin(t^2)$ mempunyai transformasi Laplace, dan berilah kesimpulan alasan anda.

52. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{10\sin 3t \cos 5t\}$, (b) $\mathcal{L}\{f(t)\}$ jika

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t \le \pi \\ 0 & t \ge \pi \end{cases}$$

INVERS TRANSFORMASI LAPLACE YANG ELEMENTER

53. Tentukanlah

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-3}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{4s^2+9}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2-s}{s^{3/2}}\right\}$ (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(2s+1)^2}{s^5}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s+5}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-8}{s^2+36}\right\}$ (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-16}{s^2-64}\right\}$ (j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)(s+5)}\right\}$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3-s^2+s-1}{s^5}\right\}$

54. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{(s^2+10)(s^2+20)}\right\}$.

TRANSFORMASI LAPLACE DARI FUNGSI TURUNAN

55. Periksalah hasil $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(s)\} - f(0)$ untuk setiap fungsi berikut : (a) $f(t) = 3e^{2t}$, (b) $f(t) = \cos 5t$, (c) $f(t) = t^2 + 2t - 4$.

56. Periksalah hasil $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\,\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ untuk setiap fungsi pada Soal 55.

57. Jika $f(t) = t \sin at$, (a) tunjukkanlah bahwa $f''(t) + a^2 f(t) = 2a \cos at$ dan (b) tentukanlah $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

58. Apakah hasil $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ berlaku untuk

(a) $f(t) = \sqrt{t}$, (b) $f(t) = 1/\sqrt{t}$, (c) $f(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 5 & t = 0 \end{cases}$? Jelaskanlah.

59. Buktikanlah bahwa $\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3\,\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$, dan berikanlah syarat agar ini berlaku.

FUNGSI TANGGA SATUAN

60. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{2\upsilon(t-1) + 3\upsilon(t-2)\}$, (b) $\mathcal{L}\{t\upsilon(t-3)\}$ dan gambarkanlah grafik setiap fungsi yang diberikan terhadap t.

61. Bahaslah pengertian dari (a) $[\upsilon(t-a)]^2$, (b) $[\upsilon(t-a)]^p$ di mana p satuan bilangan bulat positif.

62. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-s} - e^{-2s}}{s}\right\}$ dan gambarkanlah.

63. (a) Nyatakanlah fungsi $f(t) = \begin{cases} \cos t & t > \pi/2 \\ 3 & t < \pi/2 \end{cases}$ dalam suku-suku fungsi tangga satuan dan (b) tentukanlah transformasi Laplace-nya.

BERBAGAI MACAM TRANSFORMASI LAPLACE

64. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{t^3e^{-5t}\}$, (b) $\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}$, (c) $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\,e^{4t}\}$, (d) $\mathcal{L}\{e^{-3t}/\sqrt{t}\}$.

65. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{t \sin 3t\}$. (b) $\mathcal{L}\{t^2 \cos 2t\}$.

66. Tentukanlah $\mathcal{L}\{te^t \sin t\}$.

67. (a) Gambarkanlah grafik fungsi $f(t) = t$, $0 \le t < 4$ yang diperluas secara periodik dengan periode 4 dan (b) tentukanlah transformasi Laplace untuk fungsi ini.

68. Tentukanlah $\mathcal{L}\{f(t)\}$ jika $f(t) = e^{-t}$, $0 \le t < 2$ dan $f(t + 2) = f(t)$.

69. Periksalah apakah $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 2u\, du\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\cos 2t\}$.

70. Tunjukkanlah bahwa $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^{t_1} f(u)\, du\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$ di mana $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dan perumum/rampatkanlah (generalize).

71. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-3t} - e^{-5t}}{t}\right\}$, (b) $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos 2t - \cos 3t}{t}\right\}$, (c) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$.

72. Tentukanlah $\mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos t}{t^2}\right\}$.

73. Tunjukkanlah bahwa (a) $\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-4t}}{t}\, dt = \ln 2$, (b) $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

74. Hitunglah (a) $t*e^t$ dan (b) $\mathcal{L}\{t*e^t\}$.

75. Buktikanlah bahwa (a) $f*g = g*f$, (b) $f*(g+h) = f*g + f*h$, (c) $f*(g*h) = (f*g)*h$ dan bahaslah pengertian dari hasilnya.

BERBAGAI MACAM TRANSFORMASI LAPLACE INVERS

76. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s + 9}{s^2 + 2s + 10}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s - 5)^3}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^2 + \pi^2}\right\}$.

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{4s-1}}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s-5)^3}\right\}$

77. Tentukanlah

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8-10s}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{150}{(s^2+2s+5)(s^2-4s+8)}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-12}{(s^2+8)(s-1)}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4}\right\}$.

78. Tentukanlah (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-2s^3}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+1)^2}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s-2}{(s^2+1)^2}\right\}$,

(d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$

79. Tentukanlah $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s+6}{s+2}\right)\right\}$

80. Gunakanlah deret dari e^u untuk menunjukkan bahwa $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{\sqrt{s}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$

81. Selesaikanlah persamaan integral (a) $y(t) + \int_0^t y(t-u)e^u\,du = 2t - 3$,

(b) $\int_0^t y(u)\,y(t-u)\,du = t^2e^{-t}$

82. Gunakanlah transformasi Laplace untuk menghitung $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$.

[Petunjuk : Perhatikanlah bentuk $\int_0^\infty \sin tx^2\,dx$.]

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFFERENSIAL

83. Selesaikanlah setiap persamaan differensial berikut :
(a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
(b) $y''(t) + 16y(t) = 32t$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$
(c) $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 6e^{-2t}$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 8$
(d) $y'''(t) + y'(t) = t + 1$

84. Selesaikanlah $y'''(t) + 8y(t) = 32t^3 = 16t$ jika $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$.

85. Selesaikanlah persamaan simultan

$$\begin{cases} 2x(t) - y(t) - y''(t) = 4(1 - e^{-t}) \\ 2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3e^{-2t}) \end{cases}$$

terhadap syarat $x(0) = y(0) = 0$.

86. Selesaikanlah Soal berikut dengan transformasi Laplace

a. Selesaikanlah sistem $\frac{dx}{dt} + y = e^t$, $x - \frac{dy}{dt} = t$

b. Selesaikanlah sistem $\frac{dx}{dt} + 2x = \frac{dy}{dt} + 10 \cos t$, $\frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{-2t} - \frac{dx}{dt}$

Jika $x = 2$, $y = 0$ bilamana $t = 0$

c. Selesaikanlah sistem $(D^2 + 2)x + Dt = 2 \sin t + 3 \cos t + 5 e^{-t}$
$Dx + (D^2 - 1)y = 3 \cos t - 5 \sin t - e^{-t}$ jika $x = 2$, $y = -3$, $Dx = 0$, $Dy = 4$ bilamana $t = 0$

d. Selesaikanlah $\frac{dx}{dt} = 2x + y$, $\frac{dy}{dt} = y + 6e^{-t}$, $\frac{dz}{dt} = 2 \sin t + x$ jika

$x = y\ z = 0$ pada $t = 0$

PENERAPAN PADA MASALAH FISIS

87. Selesaikanlah Soal berikut dengan transformasi Laplace

a. Suatu partikel bergerak sepanjang sumbu x menuju titik O dengan gaya yang sebanding terhadap jaraknya dari O. Jika partikel tersebut bergerak mulai dari keadaan berhenti pada $x = 5$ cm dan sampai pada $x = 2{,}5$ cm setelah 2 detik, tentukanlah :
   a. posisi pada suatu saat t sesudah partikel itu bergerak
   b. arah kecepatannya pada $x = 0$
   c. amplitudo, periode dan frekuensi sebarannya
   d. percepatan sesaatnya.

b. Posisi suatu partikel yang bergerak sepanjang sumbu x ditentukan oleh persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 20 \cos 2t.$$

Jika partikel bergerak dari keadaan diam pada x = 0, tentukanlah :

a. x sebagai fungsi dari t
b. amplitudo, periode dan frekuensinya setelah suatu waktu yang panjang.

c. Berat pada suatu pegas tegak memperoleh gaya ubrasi sesuai dengan persamaan

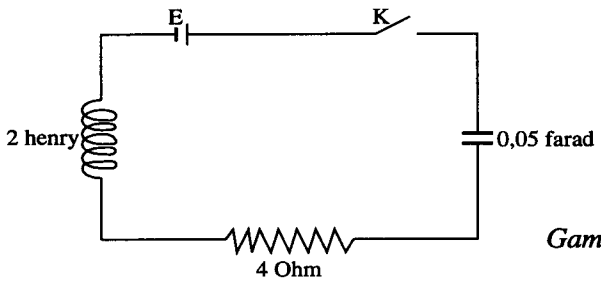
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin wt$$

dengan x perpindahan dari posisi seimbang dari w > 0 konstanta
Jika x = dx/dt = 0 bilamana t = 0, tentukanlah :

a. x sebagai fungsi dari t
b. periode dari gaya luar yang menyebabkan terjadinya resonansi.

d. Muatan pada suatu kapasitas dalam jaringan pada gambar di bawah ini adalah 2 coulomb. Jika sakelar K ditutup pada saat t = 0, tentukanlah muatan dan arus pada saat t > 0.

a. E = 100
b. E = 100 sin 4t

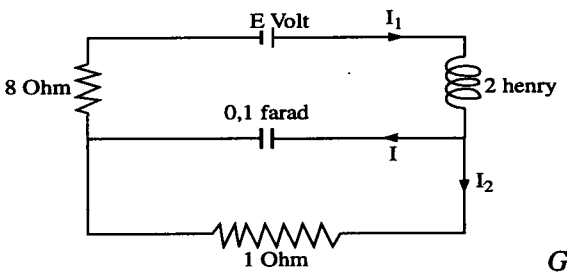


Gambar 8.4

89. Selesaikanlah dengan transformasi Laplace
Tentukanlah arus I, I_1 dan I_2 dalam jaringan pada gambar di bawah ini dan juga muatan Q dari kapasitornya jika :

a. E = 360
b. E = 600 e^{-5t} sin 3t

Andaikan muatan dan arusnya nol pada saat t = 0



Gambar 8.5

90. Gambarkanlah grafik fungsi $F(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon^2 & 0 < t < \varepsilon \\ -1/\varepsilon^2 & \varepsilon < t < 2\varepsilon \end{cases}$

Tentukanlah (a) $\mathcal{L}\{F(t)$ dan (b) $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\{F(t)\}$.

Jelaskanlah hubungan soal ini dengan $\mathcal{L}^{-1}\{s^2\}$.

JAWABAN SOAL-SOAL LATIHAN

48. (a) $\dfrac{12}{3s-2}$ (d) $\dfrac{5s+6}{s^2+9}$ (g) $\dfrac{144}{s(s^2+36)}$ (i) $\dfrac{4\Gamma(1/3)}{9s^{7/3}} - \dfrac{2\Gamma(1/3)}{3s^{4/3}} + \dfrac{\Gamma(2/3)}{s^{2/3}}$

(b) $\dfrac{6-3s}{s^2}$ (e) $\dfrac{72}{s(s^2-36)}$ (h) $\dfrac{2}{s^2+16}$ (j) $\dfrac{-5}{s+2}$

(c) $\dfrac{s^2+2s+2}{s^3}$ (f) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} - \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4s^{5/2}}$

49. (a) $\dfrac{2e^{-4s}-1}{s}$ (b) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{4e^{-3s}}{s} - \dfrac{e^{-3s}}{s^2}$ (c) $\dfrac{e^{-2s}-e^{-4s}}{s}$

52. (a) $\dfrac{40}{s^2+64} - \dfrac{10}{s^2+4}$ (b) $\dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

53. (a) $2e^{3t}$ (d) $1/6 \sin 3/2\, t$ (g) $\dfrac{4t^{1/2}-t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$ (i) $2t^2 + 2/3t^3 + \dfrac{t^4}{24}$

(b) $1/8e^{-5t/3}$ (e) $2\cos 6t - 4/3 \sin 6t$ (h) $3\cosh 8t - 2\sinh 8t$ (j) $5/2e^{-5t} - 3/2e^{-3t}$

(c) $4\cos 4t$ (f) $t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^4}{24}$

54. $\dfrac{9}{10\sqrt{5}} \sin 2\sqrt{5}\, t - \dfrac{4}{5\sqrt{10}} \sin \sqrt{10}\, t$

60. (a) $\dfrac{2e^{-s}+3e^{-2s}}{s}$ (b) $\dfrac{e^{-3s}(3s+1)}{s^2}$

62. (a) $\upsilon(t-5)$ (b) $2\upsilon(t-1) - \upsilon(t-2)$

63. (a) $3 + (\cos t - 3)\upsilon(t - \pi/2)$ (b) $\dfrac{3(1-e^{-\pi s/2})}{s} - \dfrac{e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$

64. (a) $\dfrac{6}{(s+5)^4}$ (b) $\dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$ (c) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2(s-4)^{3/2}}$ (d) $\sqrt{\dfrac{\pi}{s+3}}$

65. (a) $\dfrac{6s}{(s^2+9)^2}$ (b) $\dfrac{2s^3-24s}{(s^2+4)^3}$

66. $\dfrac{2s-2}{(s^2-2s+2)^2}$

67. (b) $\dfrac{1-4se^{-4s}-e^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

68. $\dfrac{1-e^{-2(s+1)}}{(s+1)(1-e^{-2s})}$

71. (a) $\ln\left(\dfrac{s+5}{s+3}\right)$ (b) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+9}{s^2+4}\right)$ (c) $\tan^{-1}(1/s)$

72. $s \ln(s/\sqrt{s^2+1}) + \dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1}s$

74. (a) $e^t - 1 - t$ (b) $\dfrac{1}{s^2(s-1)}$

76. (a) $e^{-t}(3\cos 3t + 2\sin 3t)$ (c) $1/2t^2e^{5t}$ (d) $te^{5t} + 5/2\, t^2e^{5t}$

(b) $t^{-1/2}e^{t/4}/2\sqrt{\pi}$

(e) $\upsilon(t-3)\sin\pi(t-3)$ atau $-\upsilon(t-3)\sin\pi t = \begin{cases} 0 & t<3 \\ -\sin\pi t & t>3 \end{cases}$

77. (a) $^1/_2 \sinh 2t$ (b) $^1/_2 - e^{-t} + {}^1/_2e^{-2t}$ (c) $2e^{-t} - 2e^{2t} - 4te^{2t}$

(d) $\cos 2\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}\,t - e^t$

(e) $e^{-t}(4\cos 2t + 3\sin 2t) + e^{2t}(3\sin 2t - 4\cos 2t)$

(f) $^1/_4(\sin t\cosh t - \cos t\sinh t)$

78. (a) $^1/_8(e^{2t} - 2t^2 - 2t - 1)$ (c) $2t\sin t - \sin t + t\cos t$

(b) $^1/_2(\sin t + t\cos t)$ (d) $^1/_8(3\sin t - 3t\cos t - t^2\sin t)$

79. $\dfrac{e^{-2t} - e^{-6t}}{t}$

81. (a) $y(t) = 5t - 3 - t^2$ (b) $y(t) = 2\sqrt{2t/\pi}\, e^{-t}$

82. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$

83. (a) $y(t) = 2 - 2e^{t} + e^{2t}$ (c) $y(t) = (3t^2 + 4t - 2)e^{-2t}$

(b) $y(t) = 2 \sin 4t + 3 \cos 4t + 2t$ (d) $y(t) = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{2}t^2 + t$

84. $y(t) = 4t^3 - 2t - 3 + \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}(7 \cos \sqrt{3t} + \sqrt{3} \sin \sqrt{3t})$

85. $x(t) = 3 - 2e^{-t} - e^{-2t}$, $y(t) = 2 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

90. (a) $x = \dfrac{F_0 t^2}{2m\varepsilon} \{1 - \upsilon(t - \varepsilon)\}$