6 INTEGRAL LIPAT, INTEGRAL GARIS, INTEGRAL PERMUKAAN DAN TEOREMA INTEGRAL

6.1. INTEGRAL LIPAT DUA

Pandang suatu fungsi $z = f(x,y)$ yang kontinu pada daerah hingga R dibidang XOY. Misalkan daerah ini dibagi atas n buah sub (bagian) daerah R_1, R_2, ... R_n masing-masing luasnya $\Delta_1 A$, $\Delta_2 A$, ... $\Delta_n A$.

Dalam setiap sub daerah pilih suatu titik $P_k\ (x_k, y_k)$ dan bentuk jumlah

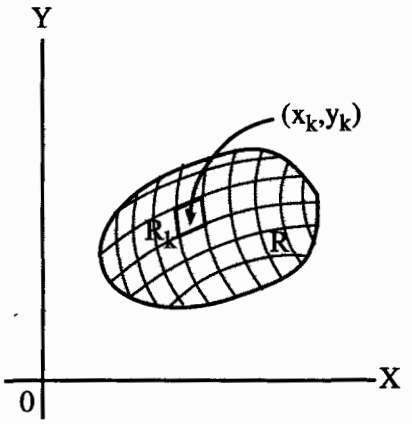
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta_k A = f(x_1, y_1)\ \Delta_1 A + f(x_2, y_2)\ \Delta_2 A + \ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots + f(x_n, y_n)\ \Delta_n A \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Sekarang tentukan diameter dari sub daerah yang merupakan jarak terbesar antara 2 titik sembarang di dalam atau pada batas sub daerah, dengan λ_n adalah diameter maksimum dari sub daerah.

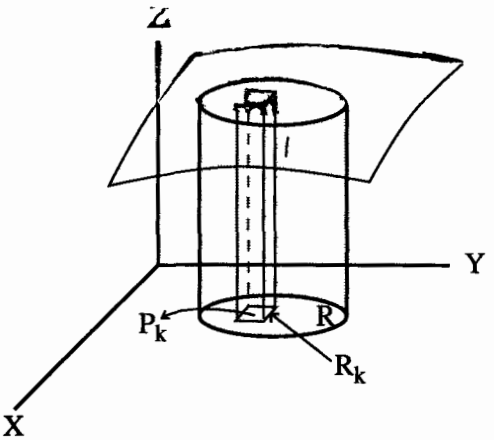
Misalkan banyaknya sub daerah makin besar diartikan $n \to \infty$ maka $\lambda_n \to 0$

Maka integral lipat dua dari fungsi f(x, y) atas daerah R didefinisikan sebagai

$$\int_R \int f(x, y)\ dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\ \Delta_k A \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$



Gambar 6.1.



Gambar 6.2

Bila z = f(x, y) non negatip atas daerah R, sebagai dalam gambar 6.2. di atas, integral lipat dua (2) bisa diartikan sebagai volume. Sembarang suku $f(x_k, y_k)\ \Delta_k A$ dari (1) memberikan volume dari kolom vertikal yang alasnya $\Delta_k A$ dan tingginya adalah z_k yang diukur sepanjang vertikal dari titik P_k yang dipilih sampai permulaan z = f(x, y).

Jadi persamaan (1) adalah volume-volume pendekatan kolom vertikal yang alasnya R_k di bawah dan atasnya adalah permukaan yang proyeksinya R_k. Persamaan (2) adalah ukuran dari volume dari sub-sub daerah.

6.2. INTEGRAL ITERASI

Pandang suatu volume yang didefinisikan seperti di atas dan misalkan batas dari daerah R adalah sedemikian, sehingga tak ada garis sejajar dengan sumbu X atau sumbu Y yang berpotongan lebih dari 2 titik. Gambarkan pada daerah R garis singgung x = a dan x = b yang menyinggung batas R di titik K dan L dan garis-garis singgung y = c dan y = d dititik M dan N.

Misalkan persamaan busur LMK adalah $y = g_1(x)$ dan busur LNK adalah $y = g_2(x)$.

Bagi interval $a \le x \le b$ dalam m sub intergal $h_1, h_2 \ldots h_m$, dengan panjang masing-masing $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$ dan letakkan titik-titik $x = \xi_1, x = \xi_2, x = \xi_3, \ldots, x = \xi_{m-1}$ dan bagi interval $c \le y \le d$ atas n sub interval $k_1, k_2, \ldots, k_n$ masing–masing dengan panjang $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$, dan letakkan titik-titik $y = \mu_1, y = \mu_2, \ldots y = \mu_{n-1}$.

Nyatakan λ_m diameter maksimum dari $\Delta_i x$ dan μ_n diameter maksimum dari $\Delta_j y$.

Gambarkan garis-garis sejajar $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ dan garis-garis sejajar $y = \mu_2, y=\mu_2, \ldots y = \mu_{n-1}$ maka daerah R terbagi atas persegi-persegi panjang R_{ij} dengan luas $\Delta_i x.\ \Delta_j y$ dan bukan persegi panjang yang akan kita abaikan.

Pada setiap sub interval h_i pilih suatu titik $x = x_i$ dan pada setiap sub interval k_j pilih suatu titik $y = y_j$, dengan demikian dalam setiap bagian daerah mengandung titik $P_{ij}(x_i, y_j)$. Dengan setiap bagian daerah hubungan dengan suatu bilangan $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ dari permukaan dan kemudian bentuk

$$\sum f(x_i, y_j)\, \Delta_i x.\, \Delta_j y \qquad \text{..... (3)}$$

$i = 1, 2, \ldots\ldots m$

$j = 1, 2, \ldots\ldots n$

Persamaan (3) merupakan hal yang khusus dari (1), sehingga jika banyaknya persegi panjang adalah tak hingga, dengan demikian $\lambda_m \to 0$ dan $\mu_n \to 0$, maka limit dari (3) akan sama dengan integral lipat dua (2).

Supaya lebih berlaku lagi limit ini, mula-mula kita pilih sub interval h_i dan bentuk

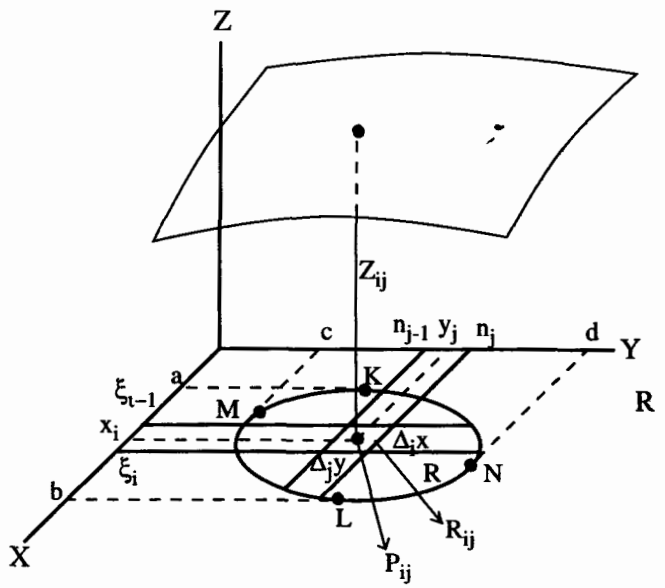
$$\left\{ \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta_j y \right\} \Delta_i x \qquad i = \text{tetap}$$

Kumpulkan semua persegi panjang dengan h_i sebagai satu dimensi berarti mengumpulkan semua persegi panjang yang terletak di kolom ke i. Bila $n \to \infty$, $\mu_n \to 0$ dan

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta_j y \right\} \Delta_i x =$$

$$\left\{ \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\, dy \right\} \Delta_i x =$$

$$= \phi(x_i)\, \Delta_i x$$



Gambar 6.3

Sekarang jumlahkan atas m kolom dan ambil $m \to \infty$, maka kita dapat

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \phi(x_i)\, \Delta_i x = \int_a^b \phi(x)\, dx$$

$$= \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

..... (4)

Meskipun kita tidak memakai tanda kurung itu jelas dimengerti bahwa persamaan (4) digunakan untuk mengevaluasi 2 integral tertentu sederhana yang ditulis secara berurutan, mula integral di f(x, y) terhadap y dengan menganggap x tetap dari $y = g_2(x)$ sebagai batas bawah dan $y = g_2(x)$ sebagai batas atas dari R, kemudian integral dari hasil ini terhadap x dengan batas bawah x = a dan x = b sebagai batas atas dan R.
Integral (4) ini disebut suatu integral iterasi atau Integral di ulang.

Sebagai latihan, jumlahkan mula kumpulan persegi panjang yang terletak pada setiap baris dan kemudian jumlahkan atas semua baris untuk mendapatkan integral iterasi

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx\, dy$$

dimana $h_1(y)$ adalah persamaan busur MKN dan $h_2(y)$ adalah persamaan busur MLN

Contoh-contoh :

1. $$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx = \int_0^1 \left[y \right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2. $\int_1^2 \int_y^{3y} (x-y)\, dx\, dy = \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 + xy\right]_y^{3y} dy$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{2}(3y)^2 + 3y^2 - \frac{1}{2} y^2 - y^2\right] dy$$

$$= \int_1^2 6\, y^2\, dy = 2y^3 \Big]_1^2$$

$$= 14$$

3. $\int_{-1}^{2} \int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} x\, y \Big]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx$

$$= \int_{-1}^{2} \{ x^3 + x^2 - 2x^3 + 2x \}\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + x^2 \Big]_{-1}^{2}$$

$$= \frac{9}{4}$$

4. $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} \rho \sin\theta\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \rho^2 \sin\theta \Big|_0^{\cos\theta} d\theta$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos^2\theta \sin\theta)\, d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d(\cos\theta)$$

$$= -\frac{1}{6} \cos^3\theta \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3}$$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_2^{4\cos\theta} \rho^3 \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4} \rho^4 \Big]_2^{4\cos\theta} d\theta$

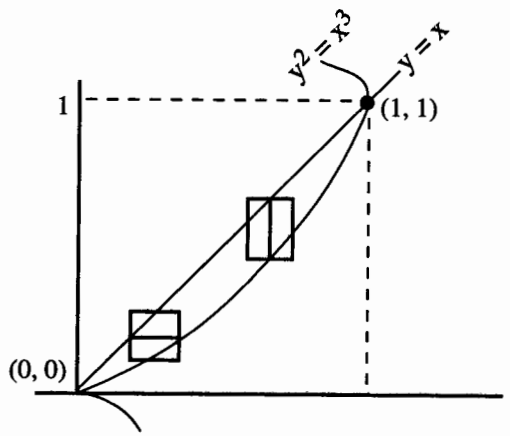
$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (256 \cos^4\theta - 16) \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} (64 \cos^4\theta - 4) \, d\theta$$

$$= \left[64 \left(\frac{3\theta}{8} + \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\sin 4\theta}{32} \right) - 4\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 10\pi$$

6. Hitung $\int_R \int dA$, dimana R adalah daerah dikwadrant I yang dibatasi oleh setengah parabola $y^2 = x^3$ dan garis $y = x$.
Garis dan parabola berpotongan dititik (0,0) dan (1,1) yang mana merupakan nilai terbesar dari x dan y di daerah R.



Gambar 6.4

$\int_R \int dA =$

$$= \int_0^1 \int_{x=y}^{y^{2/3}} dx \, dy$$

$$= \int_0^1 (y^{2/3} - y) \, dy$$

$$= \frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{10}$$

atau

$$\int_R \int dA =$$

$$= \int_0^1 \int_{y=x^{3/2}}^{y=x} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (x - x^{3/2})\, dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{10}$$

7. Hitung :

$\int_R \int dA$, dimana R adalah daerah yang dibatasi oleh :

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \quad \text{dan } x = 1 \end{cases}$$

titik potong (0,0) dan (2,4)

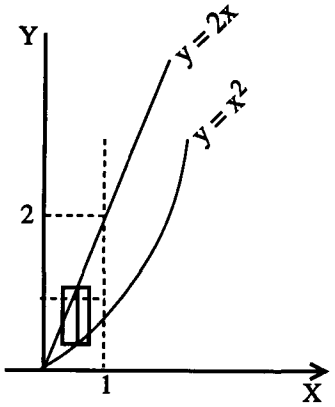
$$\int_R \int dA =$$

$$= \int_{x=0} \int_{y=x^2}^{2x} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 (2x - x^2)\, dx$$

$$= x^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{3}$$



Gambar 6.5

atau

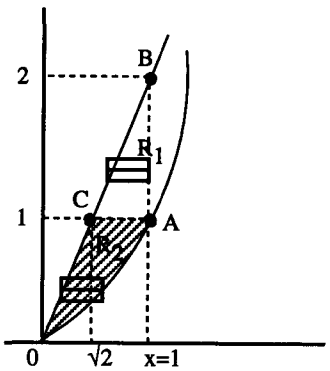
$$\int_R \int dA = \int_{R_1} \int dA + \int_{R_2} \int dA$$

$$= \int_0^1 \int_{1/2y}^{\sqrt{y}} dx\, dy + \int_1^2 \int_{1/2y}^{1} dx\, dy$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

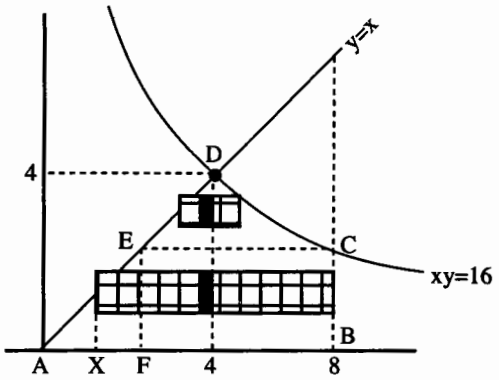
R_1 = daerah ABC

R_2 = daerah OAC



Gambar 6.6

8. Hitung $\int_R \int x^2\, dA$, dimana R adalah daerah di kwadran I dan dibatasi oleh $xy = 16$ dan garis-garis $y = x$, $y = 0$ dan $x = 8$.
(lihat gambar)



Gambar 6.7

Daerah R dibagi atas 3 bagian R_1 = ABCE dan R_2 = CDE

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_{R_1} x^2\,dA + \iint_{R_2} x^2\,dA$$

$$\iint_R x^2\,dA = \int_{y=0}^{2}\int_{x=y}^{8} x^2\,dx\,dy + \int_{2}^{4}\int_{x=y}^{16/y} x^2\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{512}{3} - \frac{1}{3}y^3\right) dy + \int_2^4 \frac{1}{3}\left(\frac{16^3}{y^3} - y^3\right) dy$$

$$= \frac{512}{3}y - \frac{1}{12}y^4\Big|_0^2 + \frac{3}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-2} - \frac{1}{12}y^4\Big|_2^4$$

$$= 340 + 128 - 20$$

$$= 448$$

Integral lipat dua dapat digunakan dalam banyak hal : misal,

I. Menghitung volume antara permukaan z = f(x,y) dan bidang xy

Rumus :

$$V = \int_R \int f(x,y)\,dx\,dy$$

II. Menghitung luas daerah dibidang xy dimana f (x,y) = 1

Rumus :

$$L = \int_R \int dx\,dy$$

III. Menghitung massa
f dipandang sebagai massa jenis (massa persatuan luas)

Rumus :

$$M = \int_R \int f(x,y)\, dx\, dy$$

IV. Menghitung pusat massa
f = massa jenis, M = massa dari pelat tipis dan (x, y) = pusat massa di R maka

$$M_x = \int_R \int x\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$M_y = \int_R \int y\, f(x,y)\, dx\, dy$$

V. Menghitung momen inersia.
Moment inersia dari plat tipis terhadap sb x dan sb y, diberikan dengan

$$I_x = \int_R \int y^2\, f(x,y)\, dx\, dy;\ I_y = \int_R \int x^2\, f(x,y)\, dx\, dy$$

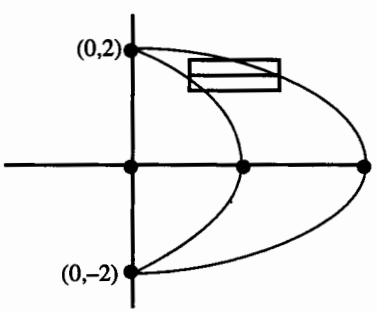
Contoh-contoh :

9. Hitung luas daerah yang dibatasi oleh parabola-parabola
$y^2 = 4 - x$
$y^2 = 4 - 4x$

Cari titik potong kedua parabola

$4 - x = 4 - 4x$
$3x = 0$
$x = 0$
$y = \pm 2$

Titik-titik potong : (0, 2) dan (0, –2)



Gambar 6.8

$$L = 2\int_0^2 \int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dx\ dy$$

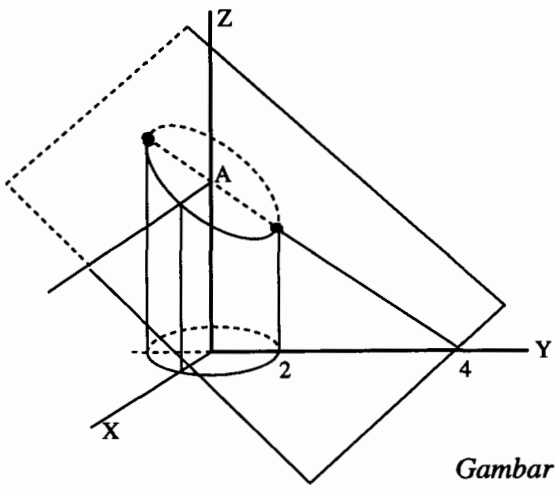
$$= \int_0^2 x \int_{1-\frac{y^2}{4}}^{4-y^2} dy$$

$$= 2\int_0^2 (4 - y^2 - 1 + \frac{y^2}{4})\ dy$$

$$= 2\ (3y - \frac{1}{4} y^3 \Big|_0^2$$

$$= 2\ (6 - 2) = 8$$

10. Hitung volume ruang yang dibatasi oleh silinder $x^2 + y^2 = 4$ dan bidang-bidang $y + z = 4$ dan $z = 0$



Gambar 6.9

$$V = \int_R \int z\ dA$$

$$V = \int_R \int (4 - y)\ dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\ dx\ dy$$

$$= 2\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\ dx\ dy$$

$$V = 2\int_{-2}^{2}(4x - y\,x)\Big|_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\,dy$$

$$= 2\left\{\int_{-2}^{2}(4\,(\sqrt{4-y^2}) - y\,(\sqrt{4-y^2})\,dy\right.$$

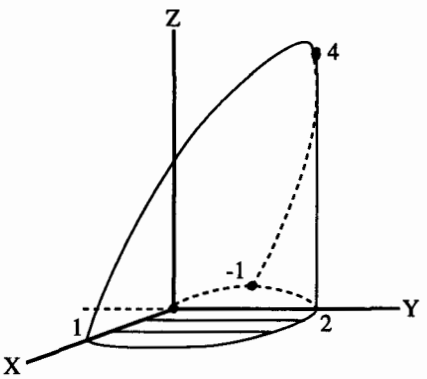
$$= 2.4\left(\frac{1}{2}\,y\,\sqrt{4-y^2} + \frac{1}{2}\,.\,4\,\arcsin\frac{y}{2}\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$+ {}^{1}/_{2}\int_{-2}^{2}(4-y^2)^{1/2}\,d\,(4-y^2)$$

$$= 4\,(0-0) + 4\,.\,4\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) + 2\,.\,\frac{2}{3}\,(4-y^2)^{3/2}\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 16\pi + \frac{4}{3}\,(0-0) = 16\pi$$

11. Hitung volume dari ruang yang dibatasi oleh silinder $4x^2 + y^2 = 4$, bidang-bidang $z = 0$ dan $z = 2y$



Gambar 6.10

$$V = \int_R \int z\,dA$$

$$= \int_{y=0}^{2}\int_{-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} 2y\,dx\,dy$$

$$= 2\int_0^2 \int_0^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} 2y \, dx \, dy$$

$$= 2\int_0^2 2yx \Big|_0^{\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}} dy$$

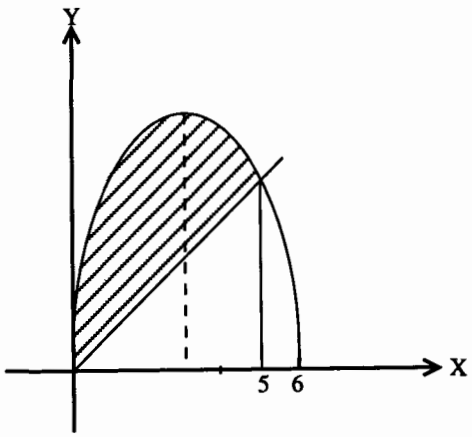
$$= 2\int_0^2 2y \cdot \frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^2 (\sqrt{4-y^2})\, d\,(4-y^2)$$

$$= -\left[\frac{2}{3}(4-y^2)^{3/2}\right]_0^2$$

$$= -\frac{2}{3}(0-8) = \frac{16}{3}$$

12. Tentukan pusat bidang yang luasnya dibatasi oleh parabola $y = 6x - x^2$ dan $y = x$



Gambar 6.11

Jawab :

$$A = \int_R \int dA = \int_{x=0}^{5} \int_x^{6x-x^2} dy \, dx$$

$$= \int_0^5 (6x - x^2 - x)\, dx$$

$$= \frac{5}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^5 = \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{125}{6}$$

$$M_x = \int_R \int y\, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\, dy\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 y^2 \Big|_x^{6x-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^5 (35x^2 - 12x^3 + x^4)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{35}{3} x^3 - 3\, x^4 + \frac{1}{5} x^5\right) \Big|_0^5$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4375}{3} - 1875 + 625 \right) = \frac{625}{6}$$

$$y = \frac{M_x}{A} = \frac{625/6}{125/6} = 5$$

$$M_y = \int_R \int x\, dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\, dy\, dx$$

$$= \int_0^5 (xy) \Big|_x^{6x-x^2} dx = \int_0^5 (6x^2 - x^3 - x^2)\, dx$$

$$= \left[\frac{5}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^5 = \frac{625}{3} - \frac{625}{4}$$

$$= \frac{625}{12}$$

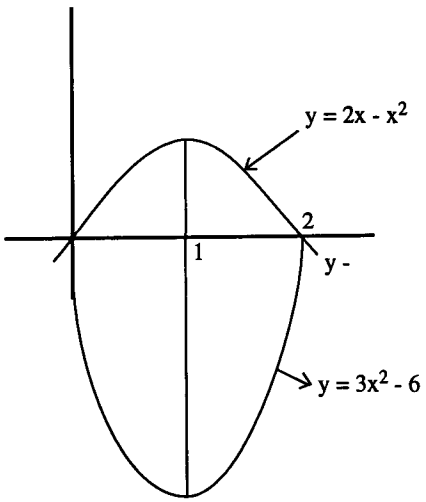
$$x = \frac{M_y}{A} = \frac{{}^{625}/_{12}}{{}^{125}/_{6}} = \frac{5}{2}$$

Pusat bidang (5/2, 5)

13. Tentukan pusat bidang yang luasnya dibatasi oleh parabola-parabola

$y = 2x - x^2$

$y = 3x^2 - 6x$



Gambar 6.12

Jawab :

Titik-titik potongnya (0, 0) dan (2, 0)

$$A = \int_R \int dA$$

$$= \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy \; dx$$

$$= \int_0^2 (2x - x^2 - 3x^2 + 6x)\, dx$$

$$= \int_0^2 (-4x^2 + 8x)\, dx$$

$$= -\frac{4}{3} x^3 + 4x^2 \Big|_0^2 = -\frac{32}{3} + 16 = +\frac{16}{3}$$

$$M_x = \int_R \int y \, dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y \, dy \, dx = \int_0^2 \{\frac{1}{2} y^2\} \Big|_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \{ (2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2 \} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} [- \frac{32}{3} x^3 + 8x^4 - \frac{8}{5} x^5]_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \{ - \frac{256}{3} + 128 - \frac{256}{5} \}$$

$$= - \frac{64}{15}$$

$$y = \frac{-64/15}{+16/3} = - \frac{4}{5}$$

$$M_y = \int_R \int x \, dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2z-x^2} x \, dy \, dx = \int_0^2 xy \Big|_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dx$$

$$= \int_0^2 (2x^2 - x^3 - 3x^3 + 6x^2) \, dx$$

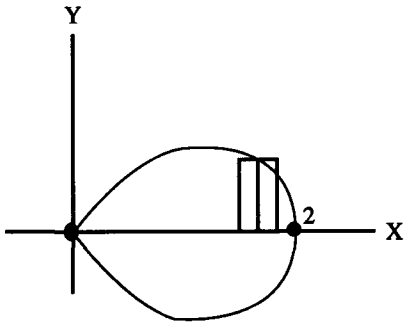
$$= [\frac{8}{3} x^3 - x^4]_0^2 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{M_y}{A} = \frac{16/3}{16/3} = 1$$

$\therefore$ Pusat bidang $(1, - \frac{4}{5})$

14. Tentukan I_x, I_y dan I_0 untuk luas yang tertutup (loop) dengan persamaan

$$y^2 = x^2 (2 - x)$$



misal : 2 – x = z

Gambar 6.13

Jawab :

$$A = \int_R \int dA = 2 \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\ dx$$

$$= 2 \int_0^2 (x \sqrt{2-x})\ dx$$

$$= 2 \int_2^0 (2 - z)\ \sqrt{z}\ (-dz)$$

$$= 2 \int_0^2 (2\ z^{1/2} - z^{3/2})\ dz$$

$$= 2 \cdot \left\{ \frac{4}{3} z^{3/2} - \frac{2}{5} z^{5/2} \right\} \Big|_0^2$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{8}{3} \sqrt{2} - \frac{8}{5} \sqrt{2}\right) = \frac{32}{15} \sqrt{2}$$

$$I_x = \int_R \int y^2\ dA = \int_0^2 \int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2 dy\ \ dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^{x\sqrt{2-x}} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 x^3 \sqrt{(2-x)^3}\ dx \qquad \text{misal } 2-x = z^2$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{\sqrt{2}}^{0}(2 - z^{2)3}\, z^3\, 2z\, dz$$

$$= -\frac{2}{3}\int_{\sqrt{2}}^{0}(8z^4 - 12z^6 + 6z^8 - z^{10})\, dz$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{6}{9}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}\,A$$

$$I_y = \int_R\int x^2\, dA = \int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\, dy\, dx$$

$$= 2\int_0^2 x^2 y\,\Big|_0^{x\sqrt{2-x}}\, dx$$

$$= 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\, dx \qquad \text{misal } 2-x = z^2$$

$$= -4\int_0^{\sqrt{2}}(8z^2 - 12z^4 + 6z^6 - z^8)\, dz$$

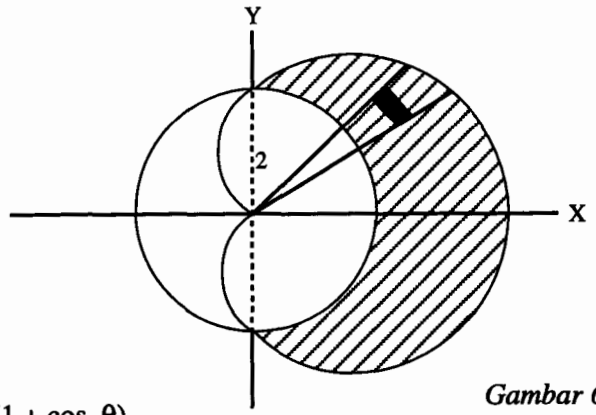
$$= \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}\,A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{416}{231}\,A$$

15. Tentukan luas daerah di luar lingkaran $\rho = 2$ dan di dalam cardioida $\rho = 2(1 + \cos\theta)$.

Jawab :
Luas daerah yang diminta simetri terhadap sb x

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta$$



Gambar 6.14

$$= \int_0^{\pi/2} \rho^2 \int_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \{4(1+\cos\theta)^2 - 4\}\, d\theta$$

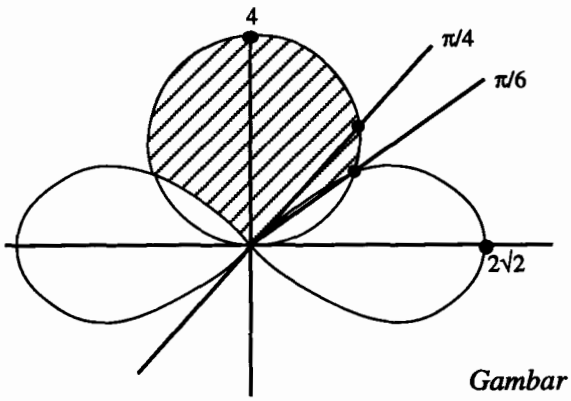
$$= 4 \int_0^{\pi/2} (\cos^2\theta + 2\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \cos\theta \sin\theta + \frac{1}{2}\theta + 2\sin\theta \right]_0^{\pi/2}$$

$$= 4 \left(0 + \frac{\pi}{4} + 2 - 0\right) = \pi + 8$$

16. Tentukan luas daerah di dalam lingkaran $\rho = 4 \sin\theta$ dan di luar lemnis cate

$$\rho^2 = 8 \cos 2\theta$$



Gambar 6.15

Jawab :

Perpotongan lemnis cate dengan lingkaran di
$\theta = \pi/6$ dan luas yang diminta simetri terhadap sumbu Y

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{\sqrt{8\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} \rho \, d\rho \, d\theta + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{0}^{4\sin\theta} \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \rho^2 \Big]_{\sqrt{8\cos 2\theta}}^{4\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \Big]_{0}^{4\sin\theta} d\theta$$

$$A = \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\sin^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\sin^2\theta \, d\theta$$

$$= -8\sin\theta\cos\theta + 8\theta - 4\sin 2\theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/4} + (-8\sin\theta\cos\theta + 8\theta) \Big]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -8 + \frac{2}{3}\pi + 4\sqrt{3} + 4 + 2\pi$$

$$= \left(\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4\right)$$

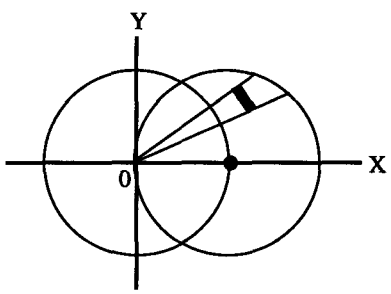
17. Tentukan I_x, I_y, dan I_o untuk luas dikwadran I di luar lingkaran $\rho = 2a$ dan di dalam lingkaran $\rho = 4a\cos\theta$.

Jawab :

$$A = \int_R \int dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\}\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3} a^2$$



Gambar 6.16

$$I_x = \int_R \int y^2 \, dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\sin\theta)^2 \, \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/3} \{(4a \cos \theta)^4 - (2a)^4\} \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$= 4a^4 \int_0^{\pi/3} (16 \cos^4 \theta - 1) \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6} a^4$$

$$I_y = \int_R \int x^2 \, dA = \int_0^{\pi/3} \int_{2a}^{4 a \cos \theta} (\rho \cos \theta)^2 \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2} a^4$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3} a^4$$

Soal-soal :

Hitung : Integral Iterasi

1. (a) $\int_0^1 \int_1^3 dx \; dy =$

(b) $\int_1^3 \int_0^2 (x + y) \, dx \, dy =$

(c) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2) \, dx \, dy$

(d) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 \, dy \, dx$

(e) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} \frac{x}{y^2} \, dx \, dy$

(f) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\, dy\, dx$

(g) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\, dy\, dx$

(h) $\int_2^4 \int_y^{8-y} dx\, dy$

(i) $\int_0^{\text{arc tg } 3/2} \int_0^{2 \sec \theta} \rho\, d\rho\, d\theta =$

(j) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos \theta\, d\rho\, d\theta$

(k) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\tan \theta \sec \theta} \rho^3 \cos^2 \theta\, d\rho\, d\theta$

(l) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\cos \theta} \rho^3 \cos^2\theta\, d\rho\, d\theta$

2. Gunakan Integral Iterasi untuk menghitung integral lipat dua atas dari
   a. x atau daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = x^3$
   b. y atas daerah (a)
   c. x^2 atas daerah yang dibatasi $y = x$, $y = 2x$ dan $x = 2$
   d. y atas daerah di atas $y = 0$ dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan $y^2 = 5-x$

3. Hitung integral lipat dua untuk menghitung luas daerah
   (a) dibatasi oleh $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$
   (b) dibatasi oleh $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$
   (c) dibatasi oleh $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$

4. Cari pusat bidang yang luasnya dibatasi oleh
   (a) $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 6$ dikwadrant I
   (b) $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$, $x = 0$
   (c) $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, $x = 0$ dikwadrant I
   (d) Kwadrant I dari soal 3(a)

5. Tentukan I_x, I_y dan I_0 dari luas berikut ini
   (a) Masalah (soal) 3(a)
   (b) Perpotongan dari $y^2 = 8x$ dengan latus rectum
   (c) dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x$
   (d) dibatasi oleh $y = 4x = x^2$ dan $y = x$

6. a. Gunakan integral lipat dua untuk menghadapi luas yang dibatasi oleh $\rho = \tan \theta \sec \theta$ dan $\theta = \pi/3$
   b. Di luar lingkaran $\rho = 4$ dan di dalam $\rho = 8 \cos \theta$

7. Tentukan I_x dan I_y untuk 1 loop dari $\rho^2 = \cos 2\theta$

6.3. INTEGRAL LIPAT TIGA

Bentuknya : $\int\int\int_V f(x,y)\, f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

f(x,y,z) di definisikan pada ruang tertutup V dibagi atas paralelepipedum tegak lurus oleh bidang-bidang sejajar bidang koordinat. Paralelepipedum dalam V kita beri nomor 1 sampai n. Paralelepipedum ke i mempunyai volume $\Delta_i V$.

Integral tripel (integral lipat tiga) di dapat dari limit dari jumlah

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{M} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\, \Delta_i V$$

Jika $n\to\infty$, sedang diagonal maksimum dari $\Delta_i V \to 0$. Titik (x_i^*, y_i^*, z_i^*) dipilih sebarang dalam paralelepipedum ke i.
Adanya suatu limit yang unik dapat ditunjukkan, jika f(x,y,z) kontinu di V

Teori sederhana berlaku untuk ruang tertutup V yang dilukiskan sebagai
$x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) < y < y_2(x)$
$z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$

Untuk ruang tertutup ini, integral lipat tiga dapat disingkat menjadi integral berulang.

$$\int\int\int_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

Contoh :

1. Jika V digambarkan oleh $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$ dan $0 \le z \le x + y$ dan $f = 2x-y-z$

$$\iiint_V f \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{x+y} (2x - y - z) \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{x^2} (2xz - yz - {}^1/_2 z^2) \Big|_0^{x+y} \, dy \, dx$$

$$= {}^3/_2 \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 - y^2) \, dy \, dx$$

$$= {}^3/_2 \int_0^1 (x^2 y - {}^1/_3 y^3) \Big|_0^{x^2} \, dx$$

$$= {}^3/_2 \left[{}^1/_5 x^5 - {}^1/_{21} x^7 \right]_0^1$$

$$= {}^8/_{35}.$$

Integral lipat tiga dapat dianggap sebagai "Hypervolume" (volume dalam ruang berdimensi 4).

* Jika $f(x, y, z) = 1$ maka

  $\iiint_V dx \, dy \, dz$ adalah merupakan volume dari V

* M = massa benda $= \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$

  f = massa jenis benda

* Pusat massa benda = $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dapat dicari dengan

$$M.\bar{x} = \iiint_V x \, f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$M.\bar{y} = \iiint_V y \, f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$M.\bar{z} = \iiint_V z \, f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

* **Momen inersia terhadap** sumbu OX

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2)\ f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz.$$

* $\iiint_V f(x, y, z)\ dx\ dy\ dz = f(x, y, z)\ V$

dimana V = volume dari benda.

Contoh-contoh :

Hitung : $\int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16 - \rho^2)^{1/2}\ \rho\ z\ d\rho\ dz\ d\theta$

Jawab : $-\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{2}{3} (16 - \rho^2)^{1/2}\ d(16 - \rho^2)\ z\ dz\ d\theta$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \frac{2}{3} (16 - \rho^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{16-z^2}} z\ dz\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 (z^3 - 4^3)\ z\ dz\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \int_0^4 (z^4 - 64z)\ dz\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{5} z^5 - 32z^2\right) \Big|_0^4 d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^5}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{4^5}{3} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) d\theta$$

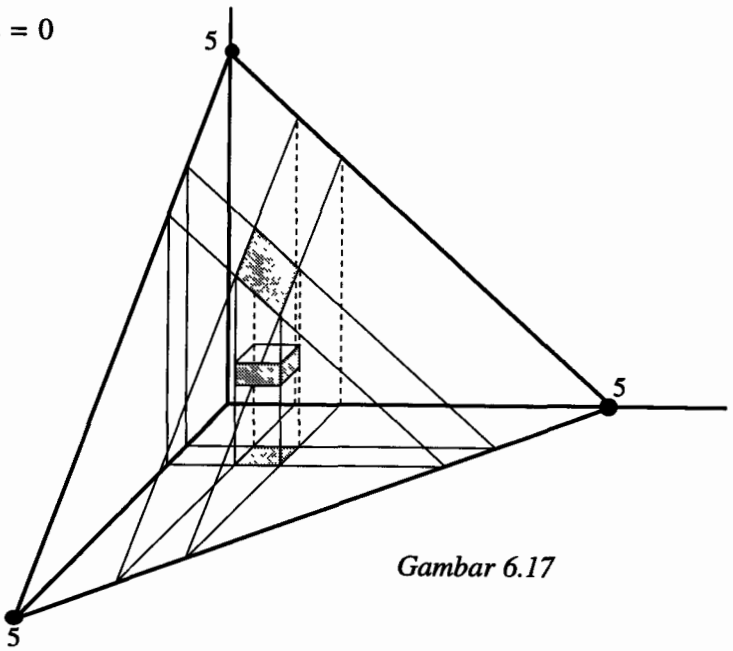
$$= \frac{4^5}{10} \theta \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4^5}{10} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{256}{5} \pi$$

2. Hitung $\int\int\int_V f(x)\, dV$ dimana

$f(x) = x^2 + y^2 + z^2$

V dibatasi oleh $x + y + z = 5$

$x = 0, y = 0, z = 0$



Gambar 6.17

$$\int_0^5 \int_0^{5-x} \int_0^{5-x-y} (x^2+y^2+z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$\int_0^5 \int_0^{5-x} (x^2z + y^2z + {}^1/_3z^3) \Big|_0^{5-x-y} dy\, dx$$

$$\int_0^5 \int_0^{5-x} \{(x^2 + y^2)\, z + {}^1/_3\, z^3\} \Big|_0^{5-x-y} dy\, dx$$

$$= \int_0^5 \int_0^{5-x} \{(x^2+y^2)\,(5-x-y) + \frac{(5-x-y)^3}{3}\}\, dy\, dx$$

$$= \int_0^5 [x^2(5-x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{(5-x)}{3} y^3 - \frac{y^4}{4} - \frac{(5-x-y)^4}{12}]_0^{5-x} dx$$

$$= \int_0^5 \left[x^2(5-x)^2 - \frac{x^2(5-x)^2}{2} + \frac{(5-x)^4}{3} - \frac{(5-x)^4}{4} + \frac{(5-x)^4}{12} \right] dx$$

$$= \int_0^5 \left\{ \frac{x^2(5-x)^2}{2} + \frac{(5-x)^4}{6} \right\} dx$$

$$= \frac{25x^3}{6} - \frac{5x^4}{4} + \frac{x^5}{10} - \frac{(5-x)^5}{30} \Big|_0^5$$

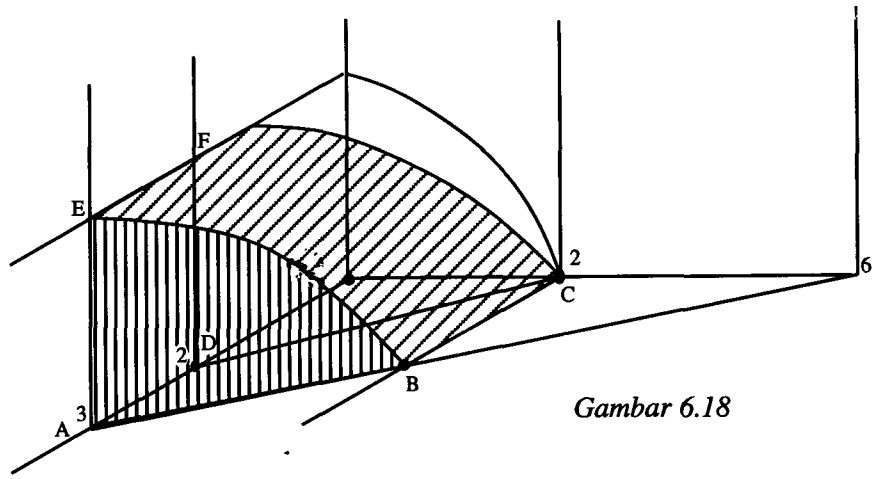
$$= \frac{5^5}{6} - \frac{5^5}{4} + \frac{5^5}{10} + 0 - (0 - 0 + 0\,\frac{5^5}{30})$$

$$= 5^5 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} \right)$$

$$= \frac{1}{20}\, 5^5 = \frac{625}{4}$$

3. Hitung tripel dari F(x,y,z) = z atas daerah R dalam oktano pertama yang dibatasi oleh bidang y=0, z=0, x+y=2, 2y+x=6 dan silinder $y^2+z^2=4$

Jawab :



Gambar 6.18

Daerah ruang yang dimaksud ABEDCF.

$$\iiint_V z \, dz \, dx \, dy = \int_{y=0}^{2} \int_{x=2-y}^{6-2y} \int_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} z \, dz \, dx \, dy$$

$$= \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} {}^1/_2 z^2 \Big|_{z=0}^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy$$

$$= {}^1/_2 \int_0^2 \int_{2-y}^{6-2y} (4 - y^2)\, dx\, dy$$

$$= {}^1/_2 \int_0^2 (4x - xy^2) \Big|_{2-y}^{6-2y} dy$$

$$= {}^1/_2 \int_0^2 (-{}^1/_2 \cdot y^3 - y^2 + 2y + 4)\, dy$$

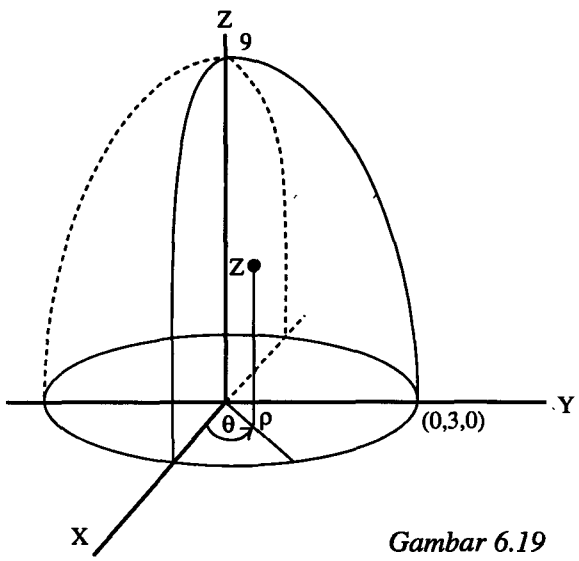
$$= {}^1/_2 \left[-{}^1/_8 y^4 - {}^1/_3 y^3 + y^2 + 4y \right]_0^2$$

$$= {}^1/_2 \{-2 - {}^8/_3 + 4 + 8\}$$

$$= {}^{11}/_3$$

4. Hitung integral lipat 3 dari $F(\rho, \theta, z) = \rho^2$ atas daerah yang dibatasi oleh parabola $\rho^2 = 9 - z$ dan bidang $z = 0$.

Jawab:



Gambar 6.19

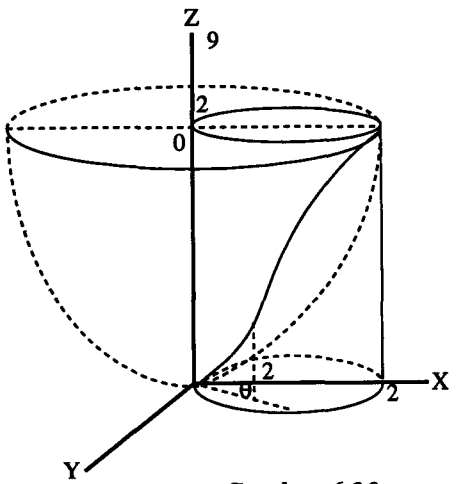
$$\iiint_V \rho^2 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_0^{9-\rho^2} \rho^2 \, \rho dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \rho^3(9-\rho^2) \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left({}^9/_4 \, \rho^4 - {}^1/_6 \, \rho^6 \right) \Big]_0^3 \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} {}^{243}/_4 \, d\theta = {}^{243}/_2 \, \pi$$

5. Hitung volume dari daerah yang terletak dalam silinder $\rho = 2 \cos \theta$ di atas bidang $z = 0$ dan di atas dibatasi oleh $z = \rho^2$.



Gambar 6.20

Jawab:

$$V = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\rho^2} \rho dz \, dp \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^3 \, dp \, d\theta$$

$$= {}^1/_2 \int_0^{\pi/2} \rho^4 \Big|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta \, d\theta$$

$$= {}^3/_2 \, \pi.$$

6. Tentukan koordinat dari Centroid soal nomor 5

Jawab:

$$V = {}^3/_2 \, \pi$$

$$M_{yz} = \iiint_v x dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\rho^2} \rho \cos\theta \, \rho dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cos\phi \, d\theta \, d\theta$$

$$= {}^{64}/_5 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \, d\theta = 2\pi$$

$$\bar{X} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{4}{3}$$

Dengan simetri; y = 0

$$M_{xy} = \iiint_v z dV = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^{\rho^2} z. \, \rho dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\rho} \rho^5 \, d\rho \, d\theta$$

$$= {}^{32}/_{5} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \rho \, d\theta = {}^{5}/_{3} \, \pi$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{10}{9}$$

Jadi Centroid koordinatnya : $({}^{4}/_{3}, 0, {}^{10}/_{9})$

6.4. SOAL-SOAL DAN LATIHAN

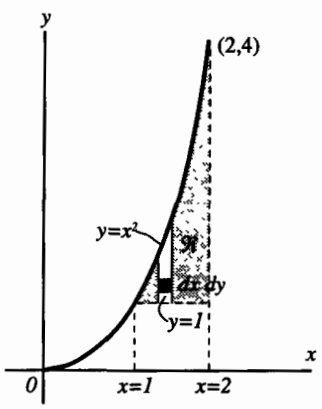
INTEGRAL LIPAT DUA

1. (a) Gambarkanlah daerah R di bidang xy yang dibatasi oleh $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.
   (b) Berikanlah suatu tafsiran fisis untuk $\int\int_R (x^2 + y^2)\, dx\, dy$.
   (c) Hitunglah integral lipat dua dalam (b).

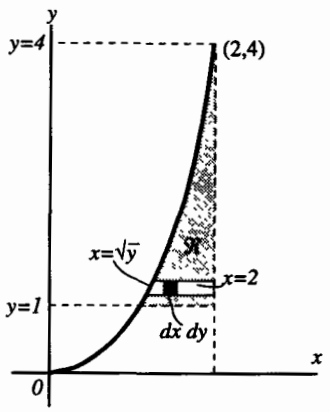
   (a) Daerah yang diinginkan R digambarkan sebagai daerah yang digelapkan pada Gambar 6-21 di bawah.

   (b) Karena $x^2 + y^2$ adalah kwadrat jarak dari suatu titik (x, y) ke titik (0, 0), kitadapat memandang integral lipat dua ini sebagai momen inersia kutub (yaitu momen inersia terhadap titik awal) dari daerah R (andaikan rapat massanya 1 satuan).

   Dapat juga dipandang integral lipat dua sebagai massa daerah R yang rapat massanya bervariasi dengan persamaan $x^2 + y^2$.



Gambar 6-21



Gambar 6-22

(c) **Metode 1.** Integral lipat dua dapat dinyatakan sebagai integral berulang

$$\int_{x=1}^{2}\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_{x=1}^{2}\left\{\int_{y=1}^{x^2}(x^2+y^2)\,dy\right\}dx = \int_{x=1}^{2}\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{x^2}dx$$

$$= \int_{x=1}^{2}\left(x^4+\frac{x^6}{3}-x^2-\frac{1}{3}\right)dx = \frac{1006}{105}$$

Integralkan terhadap y (dengan menganggap x tetap) dari y = 1 sampai $y = x^2$ bersesuaian dengan penjumlahan pada kolom tegak (lihat Gambar 6-21). Kemudian integralkan terhadap x dari x = 1 sampai x = 2 bersesuaian dengan penjumlahan semua kolom tegak di antara x = 1 dan x = 2.

Metode 2. Integral lipat dua ini dapat juga dinyatakan sebagai integral berulang

$$\int_{y=1}^{4}\int_{x=\sqrt{4}}^{2}(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{y=1}^{4}\left\{\int_{x=\sqrt{y}}^{2}(x^2+y^2)dx\right\}dy = \int_{y=1}^{4}\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{x=\sqrt{y}}^{2}$$

$$= \int_{y=1}^{4}\left(\frac{8}{3}+2y^2-\frac{y^{3/2}}{3}-y^{5/2}\right)dy = \frac{1006}{105}$$

Dalam kasus ini kolom tegak daerah R pada Gambar 6-21 di atas digantikan oleh kolom mendatar seperti terlihat pada Gambar 6-22 di atas. Kemudian integralkan terhadap x (dengan menganggap y tetap) dari $x = \sqrt{y}$ ke x = 2 bersesuaian dengan penjumlahan pada kolom mendatar ini. Kemudian integralkan terhadap y dari y = 1 sampai y = 4 dikaitkan dengan penjumlahan semua kolom mendatar di antara y = 1 dan y = 4.

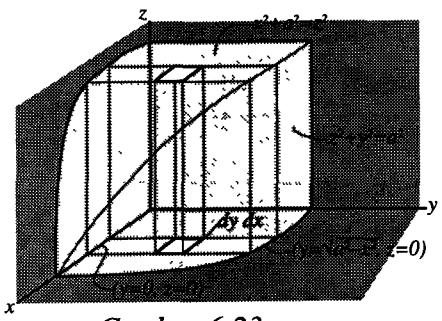
2. Tentukanlah volume benda yang merupakan daerah persekutuan yang diperoleh dengan mengiriskan silinder $x^2 + y^2 = a^2$ dan $x^2 + z^2 = a^2$.

Volume benda yang diinginkan = 8 kali volume benda yang ditunjukkan pada Gambar 6-23.

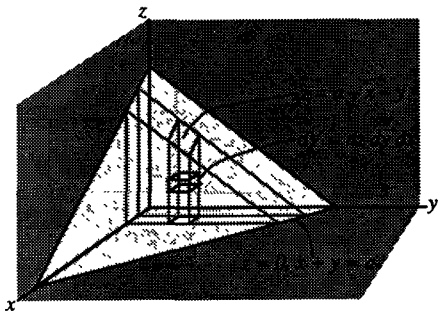
$$= 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} = dy\,dx = 8\int_{x=0}^{a}\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-x^2}\,dy\,dx$$

$$= 8\int_{x=0}^{a}(a^2-x^2)\,dx = \frac{16a^3}{3}$$

Sebagai bantuan untuk menyatakan integral ini perhatikanlah bahwa z dy dx bersesuaian dengan volume sebuah kolom yang digambarkan sebagai daerah gelap pada gambar. Anggaplah x tetap dan integralkan terhadap y dari y = 0 sampai y = $\sqrt{a^2 - x^2}$ bersesuaian dengan penjumlahan volume dari semua kolom adalah jalur sejajar bidang yz, yang memberikan volume dari jalur ini. Akhirnya, integralkan terhadap x dari x = 0 sampai x = a bersesuaian dengan penjumlahan volume semua jalur dalam daerah tersebut, yang memberikan volume benda yang diinginkan.



Gambar 6-23



Gambar 6-24

INTEGRAL LIPAT TIGA

3. (a) Gambarkanlah daerah tiga dimensi R yang dibatasi oleh x + y + z = a (a > 0), x = 0, y = 0, z = 0.
   (b) Berikanlah tafsiran fisis untuk

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

   (c) Hitunglah integral lipat tiga dalam (b)

(a) Daerah yang diinginkan R ditunjukkan dalam Gambar 6-24.

(b) Karena $x^2 + y^2 + z^2$ adalah kwadrat jarak dari suatu titik (x, y, z) ke titik (0, 0, 0), kita dapat memandang integral lipat tiga tersebut sebagai momen inersia kutub (yaitu momen inersia terhadap titik asal) dari daerah R (dengan mengandaikan rapat massanya 1 satuan).
Kita dapat juga memandang integral lipat tiga tersebut sebagai massa daerah R jika rapat massanya bervariasi dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Integral lipat tiga ini dapat dinyatakan sebagai integral berulang

$$\int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a-x} \int_{z=0}^{a-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a-x} x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3} \Big|_{z=0}^{a-x-y} dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{a} \int_{y=0}^{a-x} \{x^2(a-x) - x^2y + (a-x)y^2 - y^3 + \frac{(a-x-y)^3}{3}\} dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{a} x^2(a-x)y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{(a-x)y^3}{3} - \frac{y^4}{4} - \frac{(a-x-y)^4}{12} \Big|_{y=0}^{a-x} dx$$

$$= \int_{0}^{a} \{x^2(a-x)^2 - \frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{3} - \frac{(a-x)^4}{4} + \frac{(a-x)^4}{12}\} dx$$

$$= \int_{0}^{a} \{ \frac{x^2(a-x)^2}{2} + \frac{(a-x)^4}{6}\} dx = \frac{a^5}{20}$$

Pengintegralan terhadap z (anggap x dan y tetap) dari z = 0 sampai z = a – z – y bersesuaian dengan jumlah momen inersia kutub (atau massa) yang berhubungan dengan setiap kubus pada kolom tegak. Kemudian integralkan terhadap y dari y = 0 sampai y = a – x (anggap x tetap) bersesuaian dengan penjumlahan dari semua kolom tegak yang terletak pada jalur sejajar bidang yz. Akhirnya, integralkan terhadap x dari x = 0 sampai x = a dan jumlah semua jalur sejajar bidang yz.

4. Tentukanlah (a) volume dan (b) pusat daerah R yang dibatasi oleh silinder parabolik $z = 4 - x^2$ dan bidang-bidang $x = 0$, $y = 6$, $z = 0$ dengan mengandaikan bahwa rapat massanya tetap sebesar σ.

Daerah R ditunjukkan dalam Gambar 6-25.

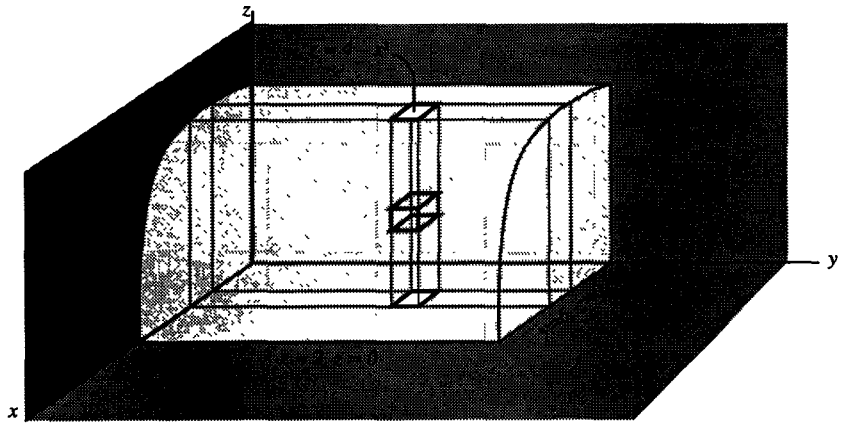
(a) Volume yang diinginkan $= \iiint_R dx\, dy\, dz$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=0}^{4-x^2} dz\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} (4 - x^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (4 - x^2)y \Big|_{y=0}^{6} dx$$

$$= \int_{x=0}^{2} (24 - 6x^2)\, dx = 32$$



Gambar 6-25

(b) Massa total = Jumlah massa $\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=0}^{4-x^2} \sigma x \, dz \, dy \, dx = 32\sigma$

menurut bagian (a), karena σ tetap. Maka

$$\bar{x} = \frac{\text{Jumlah momen terhadap bidang yz}}{\text{Jumlah massa}} = \frac{\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=0}^{4-x^2} \sigma x \, dz \, dy \, dx}{\text{Jumlah massa}} =$$

$$\frac{24\sigma}{32\sigma} = \frac{3}{4}$$

$$\bar{y} = \frac{\text{Jumlah momen terhadap bidang xz}}{\text{Jumlah massa}} = \frac{\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=0}^{4-x^2} \sigma y \, dz \, dy \, dx}{\text{Jumlah massa}} =$$

$$\frac{96\sigma}{32\sigma} = 3$$

$$z = \frac{\text{Jumlah momen terhadap bidang xy}}{\text{Jumlah massa}} = \frac{\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=0}^{4-x^2} \sigma z \, dz \, dy \, dx}{\text{Jumlah massa}} =$$

$$\frac{256\sigma/5}{32\sigma} = \frac{8}{5}$$

Jadi pusat daerah R mempunyai koordinat(3/4, 3, 8/5).

Perhatikanlah bahwa nilai untuk y dapat diramalkan sebelumnya karena simetri.

TRANSFORMASI UNTUK INTEGRAL LIPAT DUA

5. Berikanlah alasan dari persamaan (21) di halaman 163 untuk pergantian peubah pada integral lipat dua.

Dalam koordinat tegak lurus, integral lipat dua dari F(x, y) pada daerah R (daerah gelap pada Gambar 6-9) adalah $\int_R \int F(x, y)\, dx\, dy$. Kita dapat juga menghitung integral lipat dua ini dengan memandang suatu jaring yang dibentuk keluarga kurva u dan v pada koordinat kurvilinier untuk daerah R seperti terlihat pada gambar.

Misalkan P suatu titik dengan koordinat (x, y) atau (u, v) di mana $x = f(u, v)$ dan $y = g(u, v)$. Maka vektor r dari O ke P diberikan oleh $r = xi + yj = f(u, v)i + g(u, v)j$. Vektor singgung pada kurva koordinat $u = c_1$ dan $v = c_2$, dimana c_1 dan c_2 konstanta berturut-turut adalah $\partial r/\partial v$ dan $\partial r/\partial u$. Maka luas

daerah ΔR pada Gambar 6-9 dapat dihampiri oleh $\left| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right| \Delta u\, \Delta v$

Tetapi
$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} k = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} k$$

sehingga
$$\left| \frac{\partial r}{\Delta u} \times \frac{\partial r}{\Delta v} \right| \Delta u\, \Delta v = \left| \frac{\partial(x, y)}{\Delta(u, v)} \right| \Delta u\, \Delta v$$

Integral lipat duanya adalah limit jumlah

$$\sum F\{f(u, v), g(u, v)\} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \, \Delta v$$

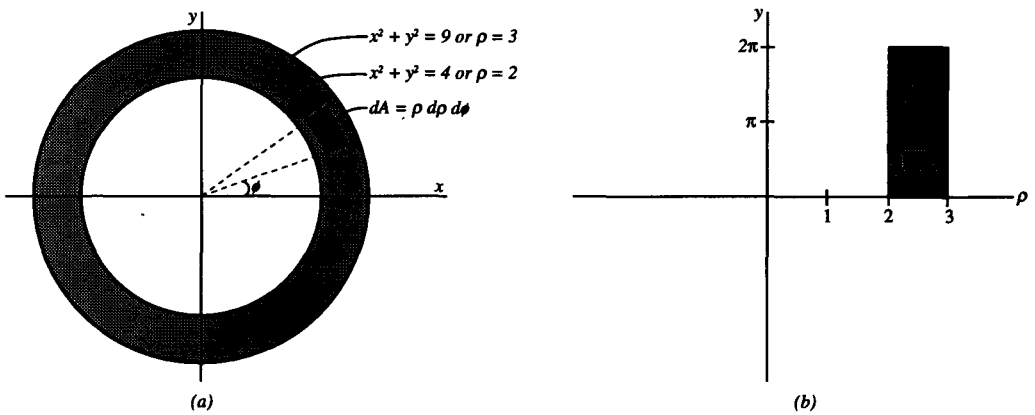
yang diambil di seluruh daerah R. Penjelasan sebelumnya menyatakan bahwa limit ini sama dengan

$$\int_{R'} \int F\{f(u, v), g(u, v)\} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$$

di mana R' adalah daerah pada bidang uv yang merupakan hasil pemetaan daerah R terhadap transformasi $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$.

6. Hitunglah $\int_R \int \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, dimana R adalah daerah di bidang xy yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$ dan $x^2 + y^2 = 9$.

Di sini kita menyatakan $x^2 + y^2$ dalam koordinat kutub (ρ, θ), di mana $z = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$.
Dengan menggunakan transformasi ini, daerah R [Gambar 6-26 (a)] dipetakan menjadi daerah R' [Gambar 6-26 (b)]



Gambar 6-26

Karena $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho$, maka

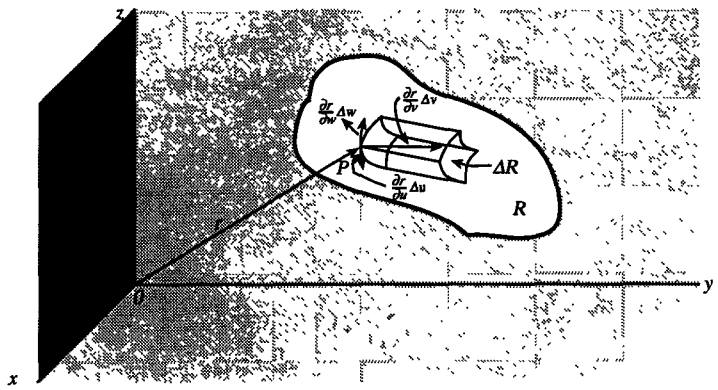
$$\int_{R'} \int \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{R'} \int \sqrt{x^2 + y^2} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| d\rho\, d\theta = \int_{R'} \int \rho \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=2}^{3} \rho^2 \, d\rho \, d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\rho^3}{3} \Big|_2^3 d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{19}{3} d\theta = \frac{38\pi}{3}$$

Kita dapat juga menulis limit pengintegralan untuk R' langsung setelah memeriksa daerah R, karena untuk θ tetap dan ρ berubah dari $\rho = 3$ dalam sektor lingkaran telah ditunjukkan pada gambar 6-26(a). Suatu pengintegralan terhadap θ dari $\theta = 0$ sampai $\theta = 2\pi$ memberikan bentuk semua sektor lingkaran. Secara ilmu ukur, $\rho \, d\rho \, d\theta$ menyatakan luas dA yang ditunjukkan pada Gambar 6-26(a).

TRANSFORMASI UNTUK INTEGRAL LIPAT TIGA

7. Berikanlah alasan dari persamaan (11) di halaman 161 untuk pergantian peubah pada integral lipat tiga.



Gambar 6-27

Dengan cara yang sama seperti Soal 5 kita membangun jaring untuk permukaan koordinat kurvilinier yang membagi daerah R menjadi daerah bagian, salah satu bagiannya adalah ΔR (lihat Gambar 6-27).

Vektor r dari titik awal O ke titik P adalah

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = f(u, v, w)\bar{i} + g(u, v, w)\bar{j} + h(u, v, w)\bar{k}$$

dengan mengandaikan bahwa persamaan transformasinya adalah $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ dan $z = h(u, v, w)$.

Vektor singgung pada n kurva koordinat yang bersesuaian dengan pasangan koordinat permukaan diberikan oleh $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$, $\partial r/\partial w$. Kemudian, volume benda ΔR pada Gambar 6-27 dihampiri oleh

$$\left| \frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} \times \frac{\partial r}{\partial w} \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$$

Integral lipat tiga dari F(x, y, z) pada daerah tersebut adalah limit jumlah

$$\sum F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w$$

Suatu bentuk pengintegralan yang menyatakan limit ini adalah

$$\int \int_{R'} \int F\{f(u, v, w), g(u, v, w), h(u, v, w)\} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw$$

di mana R' adalah daerah di ruan uvw yang merupakan hasil pemetaan daerah R oleh transformasi tersebut.

8. Nyatakanlah $\int \int_{R} \int F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ dalam koordinat silinder

Persamaan transformasi dalam koordinat silinder adalah $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z$. Jacobian transformasi ini adalah

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Kemudian, dengan menggunakan Soal 6.7, integral lipat tiganya menjadi

$$\int \int_{R'} \int G(\rho, \theta, z)\, \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

di mana R' adalah daerah di ruang ρ, θ, z yang berkaitan dengan R di mana

$$G(\rho, \theta, z) = F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

9. Tentukanlah volume daerah di atas bidang xy yang dibatasi oleh parabola $z = x^2 + y^2$ dan silinder $x^2 + y^2 = a^2$.

Volume benda ini lebih mudah dihitung dengan menggunakan koordinat ini, persamaan paraboloida dan silinder berturut-turut adalah $z\ \rho^2$ dan $\rho = a$, Maka

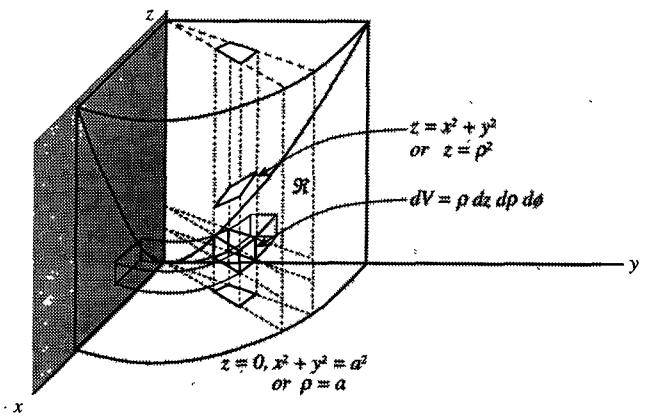
Volume benda yang diinginkan

= 4 kali volume pada Gambar 6-28

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{a} \int_{z=0}^{\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\rho=0}^{a} \rho^3 \, d\rho \, d\theta$$

$$= 4 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\rho 4}{4} \Big|_{\rho=0}^{a} d\theta = \frac{\pi}{2} a4$$



Gambar 6-28

Pengintegralan terhadap z (anggap ρ dan θ tetap) dari z = 0 sampai z = ρ^2 bersesuaian dengan jumlah volume kubus (yang dinyatakan dengan dV) pada kolom tegak perluasan dari bidang xy pada paraboloida. Kemudian pengintegralan terhadap ρ (anggap θ tetap) dari ρ = 0 sampai ρ = a bersesuaian dengan penjumlahan volume semua kolom pada daerah sisi yang terbentuk. Akhirnya pengintegralan terhadap θ bersesuaian dengan penjumlahan volume semua daerah sisi yang terbentuk.

Pengintegralan tersebut dapat juga dibentuk dengan urutan lain dan memberikan hasil yang sama.

Kita dapat juga menyatakan integral tersebut dengan cara menentukan daerah R' dalam ruang ρ, θ, z yang merupakan hasil pemetaan daerah R oleh transformasi koordinat silinder.