5 BARISAN DAN DERET

5.1. BARISAN TAK HINGGA

Barisan $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, ..., s_n, ...$ adalah suatu fungsi n yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positip.

Barisan di atas adalah barisan tak hingga

Definisi : Suatu barisan $\{s_n\}$ dikatakan terbatas, jika ada bilangan P dan Q sedemikian sehingga

$$P \leq s_n \leq Q, \text{ untuk semua nilai n.}$$

Misal :

1. $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, ..., \frac{2n+1}{2n}, ...$ adalah barisan terbatas, karena, untuk semua n

   $1 \leq s_n \leq 2.$

2. 2, 4, 6, ... 2n adalah barisan tak terbatas

Definisi : Suatu barisan $\{s_n\}$ disebut tak turun, jika berlaku :

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \ldots\ldots \leq s_n \leq \ldots\ldots$$

dan barisan $\{s_n\}$ disebut tak naik, jika berlaku :

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \ldots\ldots \geq s_n \geq \ldots\ldots$$

misal :

3. $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots, \frac{n^2}{n+1}, \ldots\ldots$

4. 3, 3, 7, 7, ..., $2n - (-1)^n$, ... adalah barisan tak turun

5. $1, {}^1/_2, {}^1/_3, \ldots\ldots, {}^1/_n$ adalah barisan tak naik

6. –1, –2, –3, ..., –n, ... adalah barisan tak naik

Definisi : Suatu barisan $\{s_n\}$ dikatakan konvergen ke suatu bilangan hingga s, jika berlaku

$$\lim_{n\to\sim} s_n = s ,$$

Artinya : untuk sembarang bilangan positip ε kecil, ada bilangan bulat positip m, sedemikian sehingga untuk $n > m$, maka $| s - s_n | < \varepsilon$
$\{s_n\}$ mempunyai limit disebut barisan konvergen, tapi jika baris tak mempunyai limit, maka barisan disebut divergen.

Definisi : Suatu barisan $\{s_n\}$ dikatakan divergen ke ~ atau

$\lim_{n\to\sim} s_n = \sim$, jika untuk sembarang bilangan positif M bagaimana besarnya,

selalu ada bilangan positip m, sedemikian sehingga untuk $n > m$, maka $| s_n | > M$. atau

Jika $s_n > M$, $\lim_{n\to+\sim} s_n = +\sim$ dan

Jika $s_n < -M$, $\lim_{n\to+\sim} s_n = -\sim$

Dalil-dalil untuk barisan :

I. Setiap barisan tak turun (tak naik) tetapi terbatas konvergen.

II. Setiap barisan tak terbatas adalah divergen.

III. Suatu barisan konvergen (divergen) akan tetap konvergen (divergen) jika beberapa atau semua suku-suku ditukar.

IV. Limit dari barisan konvergen adalah UNIK.

Jika $\lim_{n\to\sim} s_n = s$ dan $\lim_{b\to\sim n} t_n = t$

V. $\lim_{n\to\sim} (s_n \pm t_n) = s + t$

VI. $\lim_{n\to\sim} (k \cdot s_n) = k.s$

VII. $\lim_{n\to\sim} (s_n \cdot t_n) = s.t$

VIII. $\lim_{n\to\sim} \left(\frac{s_n}{t_n}\right) = \frac{s}{t}$

IX. Jika $\{s_n\}$ adalah barisan yang suku-sukunya tak nol dan jika

$\lim_{n\to\sim} s_n = \sim$ maka $\lim \frac{1}{s_n} = 0$

X. Jika $a > 1$ maka $\lim_{n\to+\sim} a^n = +\sim$

XI. Jika $|r| < 1$ maka $\lim_{n\to\sim} r^n = 0$

5.2. DERET TAK HINGGA

Definisi : Jumlah suku dari barisan tak hingga disebut deret tak hingga, dinyatakan dengan

$$\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n + \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

dimana setiap deret dihubungkan dengan jumlah bagian dari barisan.

$S_1 = s_1$
$S_2 = s_1 + s_2$
$S_3 = s_1 + s_2 + s_3$
.
.
.
$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots + s_n$

Jika $\lim s_n = s$ (hingga), maka (1) disebut deret konvergen dan s adalah jumlahnya.

Jika $\lim_{n\to\sim} s_n$ tak ada, maka deret (1) disebut divergen

Juga jika $\lim_{n\to\sim} s_n = \sim$ maka deret (1) adalah divergen atau jika n maka besar, s_n

makin besar (kecil) tanpa mendekati suatu limit.

Misalnya deret bergoyang (oscillating series) : $1 - 1 + 1 - 1 + ...$

Di sini $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, ...

Dalil :

I. Deret yang konvergen (diverven) akan tetap konvergen (divergen) jika beberapa atau semua suku-sukunya ditukar-tukarkan.

II. Jumlah deret yang konvergen adalah UNIK

III. Jika $\sum s_n$ konvergen ke s

maka $\sum_{n=1}^{\sim} k.\ s_n$, k = konstan sembarang akan konvergen ke ks

IV. Jika $\sum s_n$ konvergen maka $\lim_{n\to\sim} s_n = 0$ sebaliknya belum tentu.

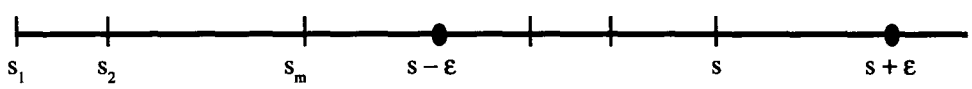
V. Jika $\lim_{n\to\sim} s_n \neq 0$, maka $\sum s_n$ divergen sebaliknya belum tentu.

Contoh-contoh :

1. Misal barisan $\{s_n\}$ konvergen ke s letakkan pada bilangan sekala titik s, $s - \varepsilon$, $s + \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan positip kecil.

   Sekarang tempatkan titik-titik $s_1, s_2, s_3, ...$

   Dari definisi konvergen s_1, memberikan kepada kita bahwa m titik pertama terletak di luar dari lingkungan ε dari s, titik s_{m+1} dan semua bagian barisan titik terletak di dalam lingkungan.



2. Tunjukkan barisan–barisan $\{1 - {}^1/_n\}$ dan

$\{ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \quad 2n} \}$ adalah konvergen

$$s_{n+1} = (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= s_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

$\therefore$ $s_{n+1} \geq s_n$ barisan yang tak turun dan $0 \leq s_n \leq 1$, s_n terbatas

Menurut dalil $\{1 - {}^1/_n\}$ adalah konvergen ke 1

$$s_{n+1} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots (2n+2)}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)\ (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n\ (2n+2)}$$

$$= s_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \rightarrow s_{n+1} \leq s_n$$

Barisan $\{s_n\}$ adalah tak naik dan

$0 \leq s_n \leq 1$ $\quad s_n$ terbatas

Menurut dalil barisan $\{s_n\}$ konvergen ke $s = 1$

3. Buktikan jika $a > 1$ maka $\lim\limits_{n \to \sim} a^n = + \sim$

Pilih $M > 0$, misal $a = 1 + b$

$$a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!} b^2 + \ldots > 1 + nb > M$$

jika $n > \dfrac{M}{b} = m$

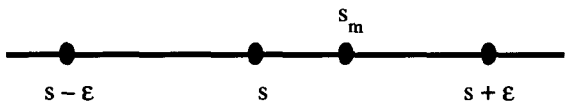
Maka secara ringkas terdapat bilangan bulat positif terbesar m dalam

$$\frac{M}{b}$$

Maka barisan ini divergen.

4. Buktikan bahwa setiap barisan tak terbatas $\{s_n\}$ selalu divergen.

Bukti : Misal barisan $\{s_n\}$ konvergen. Untuk sembarang bilangan positip ε bagaimanapun kecilnya akan terdapat bilangan positip m, sedemikian sehingga untuk $n > m$ selalu berlaku : $| s_n = s | < \varepsilon$



Ini berarti, semua suku s_n dan suku berikutnya terletak dalam interval. Maka barisan terbatas. Hal ini bertentangan dengan hipotesa.
Kesimpulannya : barisan adalah divergen.

5.3. DERET DENGAN SUKU-SUKU POSITIP

Tes untuk konvergensi dan divergensi deret positip.

Suatu deret $\sum s_n$ yang suku-sukunya adalah positip disebut deret positip.

Dalil-dalil :

I. Suatu deret positif $\sum s_n$ adalah konvergen, jika barisan dari jumlah bagian $\{S_n\}$ adalah terbatas.
Dalil ini jelas menyatakan bahwa barisan jumlah bagian adalah tidak turun.

II. **TEST INTEGRAL**
Misal f(n) menyatakan suku umum s_n dari deret positip $\sum s_n$.
Jika $f(x) > 0$ dan menurun pada interval $x > \varepsilon$, dimana ε adalah bilangan bulat positip maka deret $\sum s_n$ konvergen atau divergen sesuai dengan integral tak wajar.

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(x)\, dx \text{ ada atau tidak ada}$$

III.a. TEST BANDING UNTUK KONVERGENSI
Jika $s_n \leq t_n$ untuk $n = 1 . 2 . 3, \ldots$ dan $\sum t_n$ konvergen, maka $\sum s_n$ juga konvergen.

b. Test banding untuk divergen

Jika $s_n \geq t_n \geq 0$ untuk $n = 1, 2, \ldots\ldots$

dan $\sum t_n$ divergen maka $\sum s_n$ juga divergen.

IV. TEST RASIO (PERBANDINGAN)

Suatu deret positip $\sum s_n$ konvergen jika.

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1 \text{ dan } < \sum s_n \text{ divergen}$$

Jika :

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1 \qquad \text{atau}$$

Jika :

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$$ test yang dihubungkan dengan konvergensi atau divergensi gagal.

Contoh-contoh soal :

1. Bukti dari tes integral : misal f(n) menyatakan suku umum s_n dari deret positip $\sum s_n$. Jika $f(x) > 0$ dan tak naik dalam interval $x > \varepsilon$, dimana ξ bilangan bulat positip maka deret $\sum s_n$ konvergen atau divergen sesuai dengan

   $$\int_{\xi}^{\sim} f(x)\, dx$$ **ada** atau **tak ada**

   Dalam gambar di bawah ini, luas daerah antara kurva $y = f(x)$ dari $x = \varepsilon$ sampai $x = n$ didekati oleh 2 himpunan persegi panjang yang alasnya sama yakni satu satuan. Nyatakan luas persegi panjang di bawah kurva terletak antara jumlah luas persegi panjang terkecil dan jumlah luas persegi panjang terbesar.

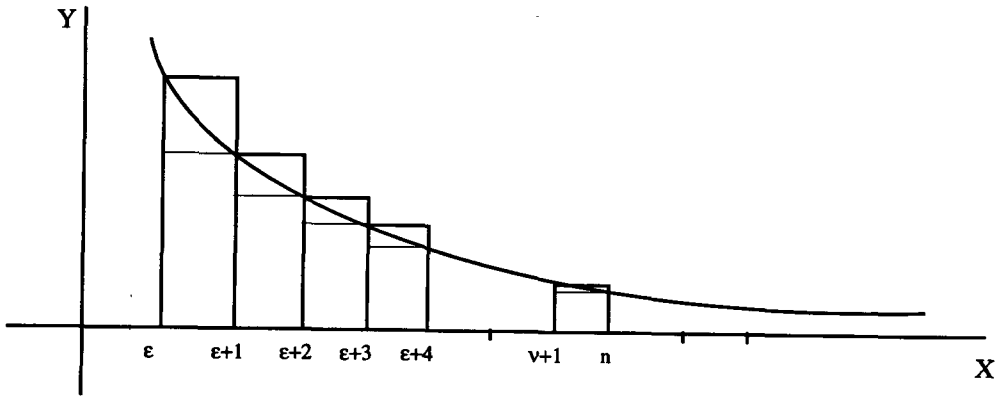
   Kita dapatkan

   $$s_{\varepsilon+1} + s_{\varepsilon+2} + \ldots\ldots + s_n < \int_{\varepsilon}^{n} f(x)\, dx < s_\varepsilon + s_{\varepsilon+1} + \ldots. + s_{n-1}$$

   (1) Misal $\lim_{n\to+\sim} \int_{\varepsilon}^{n} f(x)\, dx = \int_{\varepsilon}^{+\sim} f(x)\, dx$ A

   $$s_{\varepsilon+1} + s_{\varepsilon+2} + \ldots\ldots + s_n = A$$

   $s_n = s_\varepsilon + s_{\varepsilon+1} + \ldots. + s_n$ adalah terbatas dan tidak turun. Menurut dalil I. $\sum s_n$ konvergen



(2) Misal $\lim_{n\to+\sim} \int_{\varepsilon}^{n} f(x)\,dx = \int_{\varepsilon}^{+\sim} f(x)\,dx$ tidak ada

maka $S_n = s_\varepsilon + s_{\varepsilon+1} + \ldots\ldots + s_n$ tak terbatas, maka $\sum s_n$ divergen

2. Gunakan tes integral untuk menyelidiki deret 1 sampai dengan 5

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \ldots\ldots$$

$$f(n) = s_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \text{ ambil}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

f(x) menurun pada interval $x > 1$ dan $f(x) > 0$. Ambil $\varepsilon = 1$

$$\int_1^{+\sim} f(x)\,dx = \int_1^{+\sim} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{n\to+\sim} \int_1^{n} \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \lim_{n\to\sim} \sqrt{2x+1}\,\Big]_1^{\sim} = \lim_{n\to\sim} \sqrt{2n+1} - \sqrt{3}$$

$$= \sim$$

Integral tak ada, maka deret adalah divergen.

3. Juga ; $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + ...$

$f(n) = s_n = \frac{1}{4n^2}$ ambil $f(x) = \frac{1}{4x^2}$

Pada interval $x > 1$, $f(x) > 0$ dan $f(x)$ menurun, jika x makin besar
Ambil $\varepsilon = 1$, maka

$$\int_1^{\sim} f(x)\,dx = \lim_{n\to\sim} \int_1^n \frac{1}{4x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\sim} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big]_1^n$$

$$= \frac{1}{4}.$$ Integral ada, maka deret adalah konvergen.

4. Sin $\pi + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9} \sin \frac{\pi}{3} + ...$

$f(n) = s_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{n}$, ambil

$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

Pada interval $x > 2$, $f(x) > 0$ dan menurun ambil $\varepsilon = 2$

$$\int_2^{+\sim} f(x)\,dx = \lim_{n\to\sim} \int_2^n \frac{1}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\sim} \frac{1}{\pi} \cos \frac{x}{\pi} \Big|_2^n$$

$$= \frac{1}{\pi}$$ Integral ada

Jadi deret di atas adalah konvergen

5. $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots\ldots (p > 0)$

$S_n = f(n) = \frac{1}{n^p}$, ambil

$f(x) = \frac{1}{x^p}$

Pada interval $x > 1$, $f(x) > 0$ dan menurun.
ambil $\varepsilon = 1$, maka

$$\int_1^{\sim} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\sim} \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= \lim_{n\to\sim} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Big]_1^n$$

$$= \frac{1}{1-p}\left\{ \lim_{n\to+\sim} n^{1-p} - 1 \right\} ; p \neq 1$$

Jika $p > 1$, $\frac{1}{1-p}\left\{ \lim_{n\to\sim} n^{1-p} - 1 \right\} = \frac{1}{p-1}$ maka deret konvergen

Jika $p = 1$, $\int_1^{\sim} f(n)\,dx = \lim_{n\to\sim} \ln n = \sim$ maka deret divergen

Jika p , 1 , $\frac{1}{1-p}\left\{ \lim_{n\to\sim} n^{1-b} - 1 \right\} = +10$ maka deret divergen

5.4. TES BANDING

Tes banding ini digunakan untuk membuktikan apakah deret konvergen atau divergen. Oleh karena itu kita harus membandingkan dengan suatu deret lain yang telah kita ketahui konvergen atau divergennya.

Misalnya :

1. Deret kali (deret geometri)
   $a + ar + ar^2 + \ldots. + ar^n + \ldots.$, $a \neq 0$
   konvergen untuk $0 < r < 1$ dan divergen untuk $r \geq 1$.

2. Deret $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p}$ konvergen untuk $p > 1$ dan divergen untuk $p \leq 1$

Soal 6-11 untuk menyelidiki konvergen atau divergen dengan menggunakan test banding.

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \ldots + \frac{1}{n^2+1} + \ldots = \Sigma s_n$

Suku umum dari deret

$$s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = t_n \text{ . untuk semua n}$$

Deret $\Sigma\, t_n = \Sigma\, \frac{1}{n^2}$ adalah konvergen

Menurut konvergensi dengan banding, maka

$\Sigma\, \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \ldots$ adalah konvergen juga

7. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots = \Sigma s_n$

Suku umum deret $s_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Karena $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n} = t_n$

Deret $\Sigma\, \frac{1}{n}$ adalah divergen, menurut divergensi

dengan tes banding, maka deret

$\Sigma\, \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ adalah divergen juga

8. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \Sigma\, S_n$

Suku umum deret $S_n = \frac{1}{n!}$

Karena $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ $(n! \geq 2^{n-1})$

Dimana deret $\Sigma\, \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$

adalah deret geometri yang turun tak hingga dengan

$r = \frac{1}{2}$, maka deret $\sum \frac{1}{2^{n-1}}$ adalah konvergen

Menurut tes banding, tentang konvergensi maka deret

$\sum \frac{1}{n!}$ adalah konvergen juga

9. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \ldots\ldots + \frac{n+1}{n^3} + \ldots\ldots = \sum s_n$

dengan suku umum $s_n = \frac{n+1}{n^3}$

Karena

$\frac{n+1}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{2}{n^2} = 2. \sum \frac{1}{n^2}$, karena $\sum \frac{1}{n^2}$ adalah deret konvergen

$2 \sum \frac{1}{n^2}$ adalah deret konvergen.

Menurut test banding untuk konvergen maka deret

$\sum \frac{n+1}{n^3} = 2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \ldots\ldots$

adalah konvergen juga.

10. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots. + \frac{1}{n^n} = \sum s_n$

Suku umum deret $s_n = \frac{1}{n^n}$

Karena $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} = t_n$ dan karena deret

$\sum \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots$ konvergen

menurut tes banding, maka deret

$$\sum \frac{1}{n^n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots\ldots \text{ adalah konvergen juga.}$$

11. $$1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \ldots. + \frac{n^2+1}{n^3+1} + \ldots\ldots$$

$$= \sum s_n$$

Karena $\frac{n^2+1}{n^3+1} \geq \frac{1}{n} = t_n$

untuk setiap n, dan karena deret $\sum \frac{1}{n}$ adalah divergen, maka menurut tes banding, deret

$$\sum \frac{n^2+1}{n^3+1}$$

adalah divergen juga.

5.5. TES RASIO

12. Suatu deret positip $\sum s_n$ konvergen, jika

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ dan divergen jika

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$

misalkan $\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$, maka

untuk sembarang r, dimana $L < r < 1$ ada suatu bilangan bulat positip m sedemikian sehingga untuk $n > m$ maka

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} < r \text{ , juga}$$

$$\frac{s_{m+2}}{s_{m+1}} < r \text{ atau } s_{m+2} < r.s_{m+1}$$

$\frac{s_{m+3}}{s_{n+2}} < r$ atau $s_{m+3} < r.\ s_{m+2}$

$< r^2\ s_{m+1}$

$\frac{s_{m+4}}{s_{m+3}} < r$ atau $s_{m+4} < r\ s_{m+3} < r^3\ .\ s_{m+1}$

.

.

.

Setiap suku dari deret

$s_{m+1} + s_{m+2}\ s_{m+3} + \ldots\ldots \leq s_{m+1} + r\ s_{m+1} + r^2\ s_{m+1} + \ldots\ldots$ = Deret kali yang mana konvergen karena $r < 1$

Oleh karena itu $\sum s_n$ konvergen.
(Test banding untuk konvergen).

Misal $\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$ atau $= +\sim$, maka

ada suatu bilangan bulat positip m sedemikian, sehingga untuk

$n > m, \frac{s_{n+1}}{s_n} > 1$

Sekarang $s_{n+1} > s_n$ dan $\{s_n\}$ tidak konvergen ke 0. Oleh karena itu $\sum s_n$ divergen.

misalkan $\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = L = 1$

diambil deret $\sum \frac{1}{n^p}$; $p > 0$ untuk mana

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\sim} \left(\frac{1}{1 + {}^1/_n}\right)^p = 1$

Karena unit $p > 1$ deret konvergen dan unit $p \leq 1$ deret divergen, maka test rasio gagal dikaitkan dengan konvergen dan divergen

13. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^4} + \ldots\ldots$

Selidiki apakah deret di atas konvergen atau divergen

$$s_n = \frac{n}{3^n} \; ; \; s_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Jadi deret di atas adalah konvergen

14. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \ldots\ldots$

$$s_n = \frac{n!}{3^n} \; ; \; s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{1}{3} =$$

$$= \lim_{n\to\sim} (n+1) \cdot \frac{1}{3} = \sim$$

Jadi deret di atas adalah divergen

15. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots\ldots$

$$s_n = \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)} \; ; \; s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n+1)}$$

$$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)(2n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\sim} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$$

Jadi deret di atas adalah konvergen.

16. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + ...$

$s_n = \frac{n!}{3^n}$; $s_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{n+1}{3} = \sim$

maka deret adalah divergen

17. $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + ...$

$s_n = \frac{1 \cdot 2 ..... n}{1 \cdot 3 ..... (2n-1)} = \frac{n\,!}{1 \cdot 3 ..... (2n-1)}$

$s_{n+1} = \frac{(n+1)\,!}{1 \cdot 3 ..... (2n-1)(2n+1)}$

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$

Jadi deret adalah konvergen

18. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + ...$

$s_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$; $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to\sim} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$

deret adalah konvergen

19. $2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^2} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4^3} + ...$

$s_n = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{4^{n-1}}$; $s_{n+1} = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{4^n}$

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim \frac{n(n+2)}{4(n+1)^2} = \frac{1}{4}$

maka deret adalah konvergen.

20. $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \ldots\ldots$

$s_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} \qquad s_{n+1} = \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}$

$\lim_{n\to\sim} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$

berarti test ini gagal (tak dapat dipakai)
Cari test lainnya.

Soal-soal :

1. Tunjukkan konvergen atau divergen deret-deret di bawah ini dengan test integral.

   a. $\Sigma \frac{50}{n(n+1)}$ b. $\Sigma \frac{1}{n \ln n}$ c. $\Sigma \frac{n}{n^2+1}$

   d. $\Sigma \frac{n}{(n+1)(n+2)}$ e. $\Sigma \frac{n}{e^n}$ f. $\Sigma \frac{1}{(2n+1)^2}$

2. Tunjukkan konvergensi atau divergen deret-deret di bawah ini dengan tes banding.

   a. $\Sigma \frac{1}{n^3-1}$ b. $\Sigma \frac{n+2}{n(n+1)}$ c. $\Sigma \frac{1}{3^n+1}$

   d. $\Sigma \frac{n}{3n^2-4}$ e. $\Sigma \frac{n-2}{n^n}$ f. $\Sigma \frac{1}{n^{n-1}}$

   g. $\Sigma \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ h. $\Sigma \frac{1}{3^n-1}$ i. $\Sigma \frac{1}{1+\ln n}$

   j. $\Sigma \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ k. $\Sigma \frac{1}{3n+1}$ l. $\Sigma \frac{\ln n}{n}$

3. Tunjukkan konvergen dari devergen dari deret-deret di bawah dengan test rasio.

   a. $\Sigma \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ b. $\Sigma \frac{5^n}{n!}$

   c. $\Sigma \frac{n}{2^{2n}}$ d. $\Sigma \frac{3^{2n-1}}{n^2+n}$

   e. $\Sigma\, n\,(\frac{3}{4})^n$ f. $\Sigma \frac{n^3}{3^n}$

h. $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$ i. $\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$

j. $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ k. $\sum \frac{n^n}{n!}$

5.6. DERET DENGAN SUKU-SUKU NEGATIF

Suatu deret yang suku-sukunya adalah negatip dapat dinyatakan sebagai negatip dari deret dengan suku-suku positip.

Jadi :

$$-s_1 - s_2 - s_3 - \ldots\ldots = -(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots)$$

Deret alternating adalah suatu deret yang suku-sukunya bergantian tanda dari positip ke negatip dan seterusnya.

Ditulis sebagai

$$\sum(-1)^{n-1} \cdot s_n = s_1 - s_2 - s_3 - s_4 + \ldots\ldots + (-1)^{n-1} s_n + \ldots.$$

yang mana setiap S_i adalah positip

Dalil :

Suatu deret alternating $\sum (-1)^{n-1}s_n$ akan konvergen jika

1. $s_n > s_{n+1}$ untuk setiap n
2. $\lim_{n\to\sim} s_n = 0$

Konvergen absolut :

Suatu deret $\sum s_n = s_1 + s_2 + \ldots. + s_n + \ldots.$ dengan suku-suku bergantian tanda disebut konvergen absolut jika

$\sum | s_n | = | s_1 | + | s_2 | + \ldots. + | s_n | + \ldots.$ konvergen

Dalil : Setiap deret positip konvergen adalah konvergen absolut.

Dalil : Setiap deret yang konvergen absolut adalah konvergen.

Konvergen bersyarat

Jika $\sum s_n$ konvergen, sedang $\sum |s_n|$ adalah divergen maka $\sum s_n$ disebut konvergen bersyarat.

Contoh

Deret $1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + ...$

adalah konvergen bersyarat

karena $1 - {}^1/_2 + {}^1/_3 - {}^1/_4 + ...$ konvergen

sedang $1 + {}^1/_2 + {}^1/_3 + {}^1/_4 + ...$ divergen

5.7. TEST RASIO UNTUK KONVERGENSI ABSOLUT

Suatu deret $\sum s_n$ dengan suku-suku yang berganti tanda adalah konvergen absolut jika

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| < 1$$ dan divergen jika

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n-1}}{s_n} \right| > 1$$

Jika limitnya adalah 1, maka tidak ada keterangan tentang konvergensi dan divergensinya.

Contoh-contoh :

(1). Buktikan suatu deret alternating

$s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + ...$ konvergen

Jika (1) $s_n > s_{n+1}$ untuk setiap nilai n

(2). $\lim_{n\to\sim} s_n = 0$

Bukti :

Pandang jumlah bagian

$s_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + ... + s_{2m-1} - s_{2m}$

Yang akan kumpulkan sebagai

(a) $s_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_{4)} + ... + (s_{2m-1} + s_{2m})$

(b) $s_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - ... - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m}$

dengan hypotesa $s_n > s_{n+1}$ dan $s_n - s_{n+1} > 0$

Karena dengan (a) $s_{2m} > 0$ dan karena (b) $s_{2m} < s_1$, maka barisan $\{s_{2m}\}$ adalah berbatas dan konvergen ke suatu limit $L < s_1$.

Selanjutnya pandang jumlah bagian $s_{2m+1} = s_{2m} + s_{2m+1}$, maka

$$\lim_{n\to\sim} s_{2m+1} = \lim_{n\to\sim} s_{2m} + \lim_{n\to\sim} s_{2m+1}$$

$$= L + 0$$

$$= L$$

maka $\lim_{n\to\sim} s_n = L$ dan deret

adalah konvergen

2. Tunjukkan deret alternating di bawah ini konvergen

(a) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots.$

$s_n = \frac{1}{n^2}$; $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$

maka $s_n > s_{n+1}$ dan

$\lim_{n\to\sim} s_n = 0$, maka

deret di atas konvergen

(b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{17} + \ldots.$

$s_n = \frac{1}{n^2+1}$; $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$, maka

$s_n > s_{n+1}$ dan $\lim_{n\to\sim} s_n = \lim_{n\to} \frac{1}{n^2+1}$

$= 0$

maka deret adalah konvergen.

(c) $\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \ldots\ldots$

$s_n = \frac{1}{e^n}$; $s_n = \frac{1}{e^{n+1}}$

Deret adalah konvergen, karena

$$s_n \geq s_{n+1} \text{ dan } \lim_{n\to\sim} s^n = \lim_{n\to\sim} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to\sim} \frac{1}{e^n} = 0$$

$$= 0$$

3. Selidiki apakah deret-deret di bawah ini konvergen absolut atau konvergen bersyarat.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\ldots$$

Deret mutlak $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$ adalah konvergen

(deret geometri dengan $r = {}^1/_2 < 1$) maka deret di atas adalah konvergen absolut.

4. $$1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \ldots\ldots$$

Deret dimutlakkan menjadi

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots\ldots$$

adalah konvergen dengan tes rasio, maka deret di atas adalah konvergen absolut

5. $$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots.$$

Deret dimutlakkan menjadi

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\ldots$$

adalah divergen dengan $p = {}^1/_2$ dari deret

$$\Sigma \frac{1}{n^p}$$

maka deret di atas adalah konvergen bersyarat.

7. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \frac{1}{3^3} - \ldots\ldots$

Deret dimutlakkan :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots$$

adalah konvergen dengan tes banding dibandingkan dengan deret yang suku-sukunya lebih besar atau sama dengan

$$\frac{1}{n^3}$$

Maka deret adalah konvergen absolut.

8. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \ldots\ldots$

Deret dimutlakkan :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

adalah divergen karena tiap suku-sukunya selalu lebih besar dari suku-suku dari deret harmonis.

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{15} > \frac{1}{4}$$

Jadi deret di atas adalah deret konvergen bersyarat.

9. $2 - \frac{2^3}{3\,!} + \frac{2^5}{5\,!} - \frac{2^7}{7\,!} + \ldots\ldots$

Dimutlakkan :

$$2 + \frac{2^3}{3\,!} + \frac{2^5}{5\,!} + \ldots\ldots$$

konvergen dengan tes rasio, maka deret adalah konvergen absolut.

10. $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + ...$

Dimutlakkan :

$\frac{1}{2} + \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} + ...$

konvergen dengan tes integral, maka deret di atas adalah konvergen bersyarat.

Soal-soal :

1. Selidiki deret alternating di bawah ini konvergen atau divergen

   a. $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{n\ !}$

   b. $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{\ln n}$

   c. $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{n+1}{n}$

   d. $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{2n-1}$

   r. $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{\ln n}{3n+2}$

   f. $\Sigma\ (-1)\ \frac{1}{n\sqrt{3}}$

2. Selidiki apakah deret alternating di bawah ini konvergen absolut atau konvergen bersyarat.

   (a) $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{(2n-1)^3}$

   (b) $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{(n+1)^2}$

   (c) $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{1}{3n-1}$

   (d) $\Sigma\ (-1)^{n-1}\ \frac{n}{n^2+1}$

(e) $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(f) $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(n\,!)^3}$

(g) $\sum (-1)^{n-1} \dfrac{n^2}{n^4+2}$

5.8. DERET KUASA (PANGKAT)

Suatu deret tak hingga : dengan bentuk

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad .....(1)$$

dengan a_i merupakan konstanta disebut deret kuasa dalam x dan deret.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-c)^i = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + ...$$
$$..... + a_n(x-c)^n + ... \qquad ..... (2)$$

dengan a_i adalah konstanta, disebut deret kuasa dalam (x – c)

Untuk setiap harga x untuk kedua deret di atas, maka kedua deret di atas dapat konvergen atau divergen.

5.9. INTERVAL KONVERGENSI

Nilai total dari harga-harga x yang mengakibatkan deret kuasa adalah konvergen disebut interval konvergensi.

Interval konvergensi dapat dicari dengan menggunakan test rasio untuk konvergen mutlak.

Untuk deret kuasa (1) dan (2) masing-masing konvergen untuk x = 0 dan x = c. Setelah kita menemukan interval konvergensi kita harus menyelidiki konvergensi di titik-titik ujung interval.

Contoh Soal :

1. Tentukan interval konvergensi dari deret :

$$x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n + ...$$

$$s_n = \frac{1}{n} x^n$$

$$s_{n+1} = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\sim} \left| \frac{n}{n+1} x \right|$$

$$= \lim_{n\to} \frac{n}{n+1} |x| < 1$$

$$|x| < 1$$

$\therefore$ Interval konvergensi $-1 < x < 1$

Untuk x = 1 (titik ujung interval) deret kuasa menjadi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

deret ini adalah konvergen, sedang dalam dimutlakkan

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

adalah divergen, maka deret

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$$

adalah konvergen bersyarat yang berarti konvergen

Untuk x = –1 deret kuasa

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - .....$$

$$= -(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...)$$

adalah divergensi; maka oleh karena itu interval konvergensi menjadi

$$-1 < x \leq 1.$$

2. Tentukan interval konvergensi di

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to.\sim} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n\,!}{x^n} \right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\sim} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\therefore$ Deret konvergen untuk setiap x

3. Tentukan interval konvergensi dari

$$\frac{(x-2)}{1} + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{(x-2)^n}{n} + \ldots\ldots .$$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to\sim} \left| \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(n-2)^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\sim} \frac{n}{n+1} |x-2| = |x-2| < 1$$

$$-1 < x-2 < 1$$

$$1 < x < 3$$

Untuk $x = 1 \longrightarrow -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots. + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \ldots.$

$$= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots.. + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right)$$

adalah konvergen bersyarat jadi konvergen.

Untuk $x = 3$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}$ adalah deret divergen.

Jadi interval konvergensi adalah

$$1 \le x \le 3$$

4. Tentukan interval konvergensi dari

$$\frac{x+1}{\sqrt{1}} + \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \ldots.. + \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to\sim} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n} \right|$$

$$= | x + 1 | \lim_{n\to\sim} \sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

$$= | x + 1 | < 1$$

$$-1 < x + 1 < 1$$

$$-2 < x < 0$$

$$x = -2 \rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$= -1 \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots\ldots\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots\ldots$$

adalah konvergen bersyarat jadi konvergen.

$$x = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots$$

adalah deret divergen

Jadi interval konvergensi

$-2 \leq x < 0$ dan divergen unit x yang lain

5. Tentukan interval konvergensi dari

$(x-1) + 2\,!\,(x-1)^2 + 3\,!\,(x-1)^3 + \ldots\ldots$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to\sim} \left| \frac{(n+1)\,!\,(x-1)^{n+1}}{n\,!\,(x-1)^n} \right|$$

$$= | x - 1 | \lim_{n\to\sim} \frac{(n+1)\,!}{n\,!}$$

$$= | x - 1 | \lim_{n\to\sim} (n + 1)$$

$$= \sim$$

Jadi untuk setiap x deret adalah divergen kecuali untuk x = 1 deret konvergen.

6. Tentukan interval konvergensi dari

$$\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \ldots\ldots + \frac{n}{2^n x^n} + \ldots\ldots$$

$$\lim_{n\to\sim} \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| = \lim_{n\to\sim} \left| \frac{n+1}{2^{n+1}\, x^{n+1}} \cdot \frac{2^n\, x^n}{n} \right|$$