# 4 PERSAMAAN DIFFERENSIAL

**Definisi :**

Suatu persamaan differensial persamaan yang mengandung variabel-variabel x, y serta turunan-turunan y terhadap x

$$\therefore F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},.....\right) = 0 \qquad .....(1)$$

Order dari suatu persamaan differensial adalah order tertinggi dari turunan.

**misal :**

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 8y = 0$
2. $dy = (2x + y)\,dx$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2y = 0$

Pada contoh 1 persamaan differensial disebut persamaan differensial order 2.
Pada contoh 2 persamaan differensial disebut persamaan differensial order 1
Pada contoh 3 persamaan differensial disebut persamaan differensial order 2 derajat 3.

Solusi (jawab) dari persamaan differensial ialah suatu hubungan antara variabel-variabel yang mana tak mengandung turunan dan memenuhi persamaan differensial.

Jadi solusi dr $F(x, y \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, .....) = 0$ .....(1)

adalah $y = F(x,c)$ atau $f(x, y) = c$

Solusi umum dari persamaan differensial order n adalah suatu solusi yang mana mengandung maksimal n buah konstanta sembarang ditentukan

$y = F(x, c_1, c_2 \ldots c_n)$ atau $F(x, y, c_1, c_2, ..... c_n) = 0$ .....(2)

## 4.1. PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDER SATU

Bentuk umumnya ialah

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.1)$$

Bentuk umum ini dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.2)$$

Bentuk sederhana dari persamaan differensial order 1 ialah

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.3)$$

dimana solusinya mudah dicari dari rumus-rumus integral sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = F(x)$$

$$dy = F(x)\, dx$$

$$y = \int F(x)\, dx = G(x) + c$$

**misal :**

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + e^{2x} + x^2$$

$$dy = (\sin x + e^{2x} + x^2)\, dx$$

$$y = \int (\sin x + e^{2x} + x^2)\, dx$$

$$y = -\cos x + {}^1/_2\, e^{2x} + {}^1/_3\, x^3 + c_1$$

Dari persamaan (1.1.2)

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$dy - F(x,y)\, dx = 0.$$

Jika $F(x, y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x, y)}$ maka persamaan (1.1.2) menjadi

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.4)$$

yang merupakan bentuk lain dari persamaan differensial order 1.

Dari bentuk (1.1.4), jika $M(x,y) = f_1(x)\, g_2(y)$ dan $N(x,y) = f_2(x)\, g_1(y)$ maka (1.1.4) menjadi

$$f_1(x)\, g_2(y)\, dx + f_2(x)\, g_1(y)\, dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.5)$$

atau

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.6)$$

Bentuk (1.1.5) menjadi (1.1.6) disebut persamaan differensial terpisah, karena variabel-variabelnya dapat dipisahkan.

Jawab dari persamaan (1.1.6) ialah

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\, dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} = C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.7)$$

**Contoh-contoh :**

1. $x\,dy - y\,dx = 0$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln y - \ln x = c$$

$$\ln \frac{y}{x} = \ln C_1$$

$y/x = C_1$ atau $y = C_1 x$

adalah solusinya.

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int \frac{dx}{1 + x^2} + C$$

$$\text{arc tan } y = \text{arc tan } x + C$$

Kalau diteruskan, maka

$$\text{arc tan } y = \text{arc tan } x + \text{arc tan } C_1$$

$$y = \tan (\text{arc tan } x + \text{arc tan } C_1)$$

$$y = \frac{x + C_1}{1 - C_1 x}$$

3. $$\frac{dy}{dx} + \frac{1 + y^3}{xy^2 (1 + x^2)} = 0$$

$$xy^2 (1 + x^2)\, dy + (1 + y^3)\, dx = 0$$

$$\frac{y^2 dy}{1 + y^3} + \frac{dx}{x(1 + x^2)} = 0$$

$$\int \frac{y^2\,dy}{1+y^3} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = 0$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{d(1+y^3)}{1+y^3} + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = 0$$

$$\ln x\,(1+y^3)^{1/3} - {}^1/_2 \ln(1+x^2) = C$$

$$\ln x\,(1+y^3)^{1/3} - \ln(1+x^2)^{1/2} = \ln C_1$$

$$\ln \frac{x\,(1+y^3)^{1/3}}{(1+x^2)^{1/2}} = \ln C_1$$

$$\frac{x\,(1+y^3)^{1/3}}{(x+x^2)^{1/2}} = C_1 \text{ atau}$$

$$\frac{x^6\,(1+y^3)^2}{(x+x^2)^3} = C_2 \quad (C_2 = C_1{}^6)$$

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{\sin^2 y} = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C$$

$$-\operatorname{ctg} y = \tan x + C$$

Dari bentuk persamaan : differensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

maka persamaan differensial ini disebut homogen, jika M(x,y) dan N(x,y) adalah homogen dengan derajat n jika berlaku

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.8)$$

Cara mencari jawab dari Persamaan differensial homogen ialah dengan memisalkan

$$y = vx, \text{ maka } dy = v\,dx + x\,dv \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.9)$$

**Contoh :**

5. $2xy\ dy = (x^2 - y^2)\ dx$

Persamaan differensial ini homogen order 2, karena

$M(x,y) = x^2 - y^2$

$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2$

$= \lambda^2 (x^2 - y^2)$

$= \lambda^2 M(x,y)$

Selidiki sendiri untuk $N(x,y) = 2xy$

misalkan $y = vx$ maka

$dy = v\ dx + x\ dv$, kemudian substitusikan ke soal.

$2x\ (vx)(v\ dx + x\ dv) = (x^2 - v^2x^2)\ dx$

bagi dengan $x^2$

$2v\ (v\ dx + x\ dv) = (1 - v^2)\ dx$

$(2v^2 - 1 + v^2)\ dx + 2xvdv = 0$

$(3v^2 - 1)\ dx + 2xvdv = 0$

$$2\ \frac{v\ dv}{3v^2 - 1} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$^1/_3 \int \frac{d(3v^2 - 1)}{3v^2 - 1} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$^1/_3 \ln |3v^2 - 1| + \ln |x| = \ln C_1$

$\ln x\ (3v^2 - 1)^{1/3} = \ln C_1$

$x^3\ (3v^2 - 1) = C_2$

$$x^3\ (3\ \frac{y^2}{x^2} - 1) = C_2$$

$3xy^2 - x^3 = C_2$

6. $$x \sin \frac{y}{x}\ (y\ dx + x\ dy) + y \cos \frac{y}{x}\ (x\ dy - y\ dx) = 0$$

Selidiki sendiri bahwa Persamaan differensial di atas adalah homogen

Misalkan $y = vx \rightarrow v = \frac{y}{x}$

substitusi : $x \sin v (vx\,dx + xv\,dx + x^2 dv) +$
$vx \cos v (xv\,dx + x^2\,dv - vx\,dx) = 0$

dibagi dengan $x^2$ menghasilkan

$\sin v (2v\,dx + x dv) + v \cos (x\,dv) = 0$

$2v \sin v\,dx + (x \sin v + xv \cos v)\,dv = 0$

$2v \sin v\,dx + x (\sin v + v \cos v)\,dv = 0$

$$2 \frac{dx}{x} + \frac{\sin v + v \cos v}{v \sin v} dv = 0$$

$$2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{\sin v + v \cos v}{v \sin v} dv = C$$

$$2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{v} + \int \frac{\cos v\,dv}{\sin v} = C$$

$$2 \ln | x | + \ln | v | + \int \frac{d (\sin v)}{\sin v} = \ln C_1$$

$\ln vx^2 + \ln | \sin v | = \ln C_1$

$vx^2 \sin v = C_1$ atau

$\| xy \sin \frac{y}{x} = C_1 \|$ merupakan solusi dari persamaan differensial

7. $(x^2 - 2y^2)\,dy - 2xy\,dx = 0$

dengan memisalkan $y = vx$ (karena merupakan persamaan differensial homogen didapat $(x^2 - 2x^2v^2)(xdv + vdx) - 2vx^2\,dx = 0$

$(1 - 2v^2)\,(xdv + v\,dx) - 2v\,dx = 0$

$(v - 2v^3 + 2v)\,dx + (1 - 2v^2)\,x\,dv = 0$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - 2v^2)\,dv}{3v - 2v^3} = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - 2v^2)\,dv}{v(3 - 2v^2)} = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(1 - 2v^2)\, dv}{v(3 - 2v^2)} = C$$

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dv}{3v} - 4 \int \frac{vdv}{3(3 - 2v^2)} = C$$

$$\ln | x | + \frac{1}{3} \ln | v | - \frac{4}{3} \cdot (-\frac{1}{4}) \int \frac{d(3 - 2v^2)}{3 - 2v^2} = C$$

$$\ln xv^{1/3} + \frac{1}{3} \ln | 3 - 2v^2 | = \ln C_1$$

$$\ln x\, v^{1/3} (3 - 2v^2)^{1/3} = \ln C_1$$

$$x\, v^{1/3} (3 - 2\, v^2)^{1/3} = C_1$$

$$x^3 v (3 - 2v^2) = C_2$$

$$y (3x^2 - 2y^2) = C_2$$

adalah solusi dari persamaan differensialnya.

Pandang bentuk Persamaan differensial biasa order 1.

$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$ ..... (1.1.4)

Persamaan differensial ini disebut EKSAK jika berlaku :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ ..... (1.1.10)

Persamaan (1.1.4) adalah differensial total dari $z = F(x, y)$ dengan $dz = 0$

Jadi solusi umumnya order $z = c$ atau $F(x,y) = C$ ..... (1.1.11)

Dari; $z = F(x, y) = C$ maka

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = dz = 0$$

Kita dapatkan dari persamaan $M\, dx + N\, dy = 0$ yakni

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \text{ dan } \frac{\partial F}{\partial y} = N$$ .....(1.1.12)

Dari $\frac{\partial F}{\partial x} = M \Longrightarrow F = \int M\, \partial x + Q(y)$

Jika f diturunkan ke y kita dapat

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \{ \int M \partial x + Q(y) \}$$

sedang $\frac{\partial F}{\partial y} = N$, maka

$$\frac{\partial}{\partial y} \{ \int M \, \partial x + Q(y) \} = N(x,y)$$

atau :

$$\frac{\partial}{\partial y} \{ \int M \, \partial x \} + Q'(y) = N(x,y)$$

Dari sini akan dapat tentukan Q(y)

**Contoh :**

8. Selesaikan persamaan differensial :

$(x^2 + y)\, dx\, (x^3 + d)\, dx = 0$

$M = x^2 + y \quad ; \quad N = y^3 + x$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \quad ; \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

$\therefore$ PD ini adalah eksak

$\frac{\partial F}{\partial X} = M = x^2 + y$

$F = \int (x^2 + y)\, dx + Q(y)$

$F = {}^1/_3\, x^3 + yx + Q(y)$ ..... (1.1.13)

Turunkan F terhadap y dengan menganggap x tetap, didapat

$\frac{\partial F}{\partial y} = x + Q'(y)$ , sedang $\frac{\partial F}{\partial y} = N = y^3 + x$

$\therefore$ didapat persamaan identik

$x + Q'(y) = x + y^3$

$\therefore\ Q'(y) = y^3$

$Q(y) = 1/4\ y^4$

Jadi solusi dari PD eksak di atas (1.1.14)

$$F \equiv \frac{1}{3} x^3 + xy + \frac{1}{4} y^4 = C$$

atau jika PD di atas adalah eksak, maka diselesaikan dengan cara lain sebagai berikut :

$(x^2 + y)\,dx + (y^3 + x)\,dy = 0$

$x^2\,dx + (y\,dx + x\,dy) + y^3\,dy = 0$

$x^2\,dx + d(xy) + y^3\,dy = 0$

$d(\frac{1}{3}x^3) + d(y) + d(\frac{1}{4}y^4) = 0$

$\int d(\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{4}y^4) = \int d\,C$

$\| \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{4}y^4 = C \|$

9. $(x + e^{-x}\sin y)\,dx - (y + e^{-x}\cos y)\,dy = 0$

Selesaikan

$M = x + e^{-x}\sin y \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = e^{-x}\cos y,\ N = -y - e^{-x}\cos y \Longrightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = e^{-x}\cos y$

$\therefore$ PD adalah eksak

$\frac{\partial F}{\partial x} = M = x + e^{-x}\sin y$

$F = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\sin y + Q(y)$

F turunkan parsial ke y

$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^{-x}\cos y + Q'(y)$, sedang

$\frac{\partial F}{\partial y} = N = -y - e^{-x}\cos y$

Kita dapat identitas

$-e^{-x}\cos y + Q'(y) = -e^{-x}\cos y - y$

$Q'(y) = -y$

$Q(y) = -\frac{1}{2}y^2$

$\therefore$ Solusi PD eksak

$F = \frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\sin y - \frac{1}{2}y^2 = C$

Atau dengan cara lain (karena PD eksak)

$(x + e^{-x}\sin y)\,dx - (y + e^{-x}\cos y)\,dy = 0$

$x\,dx + e^{-x}\sin y\,dx - e^{-x}\cos y\,dy - y\,dy = 0$

$x\,dx - d(e^{-x}\sin y) - y\,dy = 0$

$d(\frac{1}{2}x^2) - d(e^{-x}\sin y) - d(\frac{1}{2}y^2) = 0$

$d(\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\sin y - \frac{1}{2}y^2) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - e^{-x}\sin y - \frac{1}{2}y^2 = C$

**Catatan :**

Jika kita telah mengetahui PD adalah eksak, maka cara terakhir adalah lebih cepat asalkan mengetahui turunan-turunan seperti

1. $d(xy) = x\,dy + y\,dx$
2. $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$
3. $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$

$d\left(\text{arc tan}\,\frac{y}{x}\right) = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

$d(x^2 + y^2) = 2(x\,dx + y\,dy)$

$\frac{1}{2}\,d\{\ln(x^2 + y^2)\} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$

**Contoh :**

10. $x\,dy + y\,dx = 2x^2\,y\,dx$

Kombinasi $x\,dy + y\,dx$ memberi suggesti sama dengan $d(xy)$ atau dapat juga

$d(\ln xy) = \frac{x\,dy + y\,dx}{xy}$

Untuk soal di atas tak dapat ruas kiri menjadi $d(xy)$ karena ruas kanan ada variabel x,y. Oleh karena itu dilakukan pembagian dengan xy, sehingga ruas kanan hanya ada variabel x saja

$\frac{x\,dy + y\,dx}{xy} = 2x\,dx$

$d(\ln(xy)) = d(x^2 + C)$

$\ln |\,xy\,| = x^2 + C$

Suatu persamaan differensial order 1

$M\,dx + N\,dy = 0$ disebut non eksak, jika tak berlaku

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ atau

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

PD non eksak dapat dibuat menjadi PD eksak dengan cara mengalikan PD non eksak dengan suatu faktor yang disebut faktor integrasi $\mu$ (x,y)

$\therefore$ M dx + N dy = 0 non eksak kalikan dengan $\mu$

$\mu$ M dx + $\mu$ N dy = 0 PD eksak maka berlaku

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \qquad \text{..... (1.1.14)}$$

Dari sini akan kita dapatkan faktor integrasi $\mu$ sebagai berikut

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

$$\mu = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \Big/ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}$$

dengan $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \neq 0$

Jika $\mu$ hanya merupakan fungsi x saja, maka

$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ maka

$$\mu = \frac{N \frac{\partial \mu}{\partial x}}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}$$ , sebaliknya

Jika $\mu$ hanya merupakan fungsi y saja maka

$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$, maka

$$\mu = \frac{M \frac{\partial \mu}{\partial y}}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}$$

**Contoh :**

11. $x\,dy + (3y - e^x)\,dx = 0$

dengan faktor integrasi f(x). Cari solusinya

**Jawab :**

$$M = 3y - e^x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 3$$

$$N = x \quad \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$$\mu = \frac{N\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}} = \frac{x\frac{\partial \mu}{\partial x}}{3\text{-}1}$$

$$2\mu = x\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{2\mu} = \frac{\partial x}{x}$$

$$\int \frac{\partial \mu}{\mu} = 2\int \frac{\partial x}{x}$$

$$\ln \mu = 2 \ln x = \ln x^2$$

$$\mu = x^2$$

Jadi PD yang baru, menjadi

$x^3\,dy + (3y - e^x)\,x^2\,dx = 0$

$x^3\,dy + 3x^2y\,dx - x^2e^x\,dx = 0$

$d\,(x^3y) - x^2e^x\,dx = 0$

$\int d\,(x^3y) - \int x^2e^x\,dx = 0$

$x^3y - (x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) = C$

$x^3y - x^2e^x + 2xe^x - 2e^x = C$

adalah solusinya !

12. Selesaikan :

$(xy + y - 1)\, dx + x\, dy = 0$

**Jawab :**

$M = xy + y - 1 \; ; \; \frac{\partial M}{\partial y} = x + 1$

$N = x \; ; \; \frac{\partial N}{\partial x} = 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$; di sini faktor integrasi merupakan f(x).

$$\mu = \frac{x \frac{\partial \mu}{\partial x}}{x}$$

$$\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \partial x$$

$\ln \mu = x$

$\mu = e^x$

PD baru :

$e^x (xy + y - 1)\, dx - e^x x\, dy = 0$

$e^x y (x + 1)\, dx + e^x x\, dy - e^x\, dx = 0$

$d(e^x xy) - e^x dx = dC$

$e^x (xy - 1) = C$

**Soal-soal :**

1. $(x^2 - y)\, dx - x\, dy = 0$
2. $y (x - 2y)\, dx - x^2\, dy = 0$
3. $(x^2 + y^2)\, dx + xy\, dy = 0$
4. $(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy = u$
5. $(x + y \cos x)\, dx + \sin y\, dy = 0$
6. $(1 + e^{2\theta})\, d\rho + 2\rho\, e^{2\theta}\, d\theta = 0$

7. $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = 0$

8. $(2x + 3y + 4)\, dx + (3x + 4y + 5)\, dy = 0$

9. $y\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)}\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y\,(x+1)\right) dy = 0$

10. $\text{cosec } x \tan x\, dy - (y \text{ cosec } x - \tan^2 x)\, dx = 0$

11. $x\, dx + y\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$

12. $(2y - 3x)\, dx - x\, dy = 0$

13. $(x - y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

14. $y\, dx - x\, dy + \ln x\, dx = 0$

15. $(3x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$

## 4.2. PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER

Bentuk persamaan differensial linier adalah

$$\frac{dy}{dx} + y\,P(x) = Q(x) \qquad \text{..... (4.2-1)}$$

atau :

$$\frac{dx}{dy} + x\,P(y) = Q(y) \qquad \text{..... (4.2-2)}$$

Cara mencari solusi dari (1)

**misal :**

$y = uv$ ..... (4.2-3), dimana u dan v merupakan fungsi dari x

$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ ; substitusi

ke (1) didapat

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv\,P(x) = Q(x)$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + u\,P(x)\right) = Q(x) \qquad \text{..... (4.2-4)}$$

Agar supaya persamaan ini dapat diselesaikan, maka

$$\frac{du}{dx} + u\,P(x) = 0$$

$$\frac{du}{u} + P(x)\,dx = 0$$

$$\int \frac{du}{u} + \int P(x)\,dx = 0$$

$$\text{lin } u = -\int P(x)\,dx$$

$$u = e^{-\int P(x)\,dx} \qquad \text{..... (4.2-5)}$$

Untuk mencari v, substitusi (5) ke (4)

$$u\,\frac{dv}{dx} = Q(x)$$

$$e^{-\int P dx}\,\frac{dv}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} = Q(x)\,e^{\int P dx}$$

$$v = \int Q(x)\,e^{\int P dx}\,dx + C$$

$\therefore$ Solusi dari persamaan (1) adalah

$$y = e^{-\int P dx}\,\{\int Q e^{\int P dx}\,dx + C\} \qquad \text{..... (4.2-6)}$$

analog untuk persamaan (2), solusinya adalah

$$x = e^{-\int P dy}\,\{\int Q e^{\int P dy}\,dy + C\} \qquad \text{..... (4.2-7)}$$

## PERSAMAAN BERNOULLI

Bentuknya ialah

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = y^n\, Q(x) \qquad \text{..... (4.2-8)}$$

atau :

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)\, y^{1-n} = Q(x) \qquad \text{..... (4.2-9)}$$

Cara mencari solusinya :

**misal :**

$$v = y^{1-n} \qquad \text{..... (4.2-10)}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)\, y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx} \qquad \text{..... (4.2-11)}$$

Substitusikan : ke (9), menghasilkan

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = Q(x)$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)\, P(x)\, v = (1-n)\, Q(x) \qquad \text{..... (4.2-12)}$$

$$n \neq 1$$

Bentuk (12) sama seperti persamaan differensial linier dengan

P(x) digantikan dengan (1–n) P(x)

Q(x) digantikan dengan (1–n) Q(x)

**Contoh :**

1. Cari solusi dari

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x$$

$P(x) = 2x$

$Q(x) = 4x$

$Q(x) = 4x$

$u = e^{-\int P dx} = e^{-\int 2x\, dx} = e^{-x^2}$

$v = \int Q(x)\, e^{\int P dx}\, dx + C$

$= \int 4x\, e^{x^2} dx + C$

$= 2 \int e^{x^2} d(x^2) + C$

$= 2\, e^{x^2} + C$

Solusinya :

$y = uv = e^{-x^2}\{2e^{x^2} + C\}$

$y = 2 + C\, e^{-x^2}$

2. Selesaikan :

$$x \frac{dy}{dx} = y + x^3 + 3x^2 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = x^2 + 3x - 2$$

$$P(x) = -\frac{1}{x}$$

$Q(x) = x^2 + 3x - 2$

$u = e^{-\int P dx} = e^{\int dx/y} = e^{\ln x} = x$

$v = \int Q(x)\, e^{\int P dx}\, dx + C$

$= \int (x^2 + 3x - 2) \,.\, x^{-1}\, dx + C$

$= \int (x + 3 - {}^2/_x)\, dx + C$

$v = {}^1/_2 x^2 + 3x - 2 \ln x + C$

$\therefore$ Solusinya :

$y = x\, ({}^1/_2\, x^2 + 3x - 2 \ln x + C)$

$y = {}^1/_2\, x^3 + 3x^2 - 2x \ln x + Cx$

3. Selesaikan :

$$(x-2) \frac{dy}{dx} = y + 2\,(x-2)^3 \text{ atau}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x-2} y = 2\,(x-2)^2$$

$$P(x) = -\frac{1}{x-2}$$

$$Q(x) = 2\,(x-2)^2$$

$$u = e^{-\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x-2}\,dx} = e^{\ln (x-2)} = x - 2$$

$$v = \int Q(x)\, e^{\int P dx}\, dx + C$$

$$= \int 2(x-2)^2 \,.\, (x-2)^{-1}\, dx + C$$

$$= 2 \int (x-2)\, dx + C$$

$$= 2 \,.\, {}^1/_2\, (x-2)^2 + C = (x-2)^2 + C$$

$$y = (x-2)\,\{\,(x-2)^2 + C\}$$

$$y = (x-2)^3 + C\,(x-2)$$

4. $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{ctg} x = 5\, e^{\cos x}$

Selesaikan persamaan di atas !

**Jawab :**

$$P(x) = \operatorname{ctg} x$$

$$Q(x) = 5e^{\cos x}$$

$$u = e^{-\int P dx} = e^{-\int \operatorname{ctg} x\, dx} = e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx}$$

$$= e^{-\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}} = e^{-\ln \sin x} = (\sin x)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sin x}$$

$$v = \int 5e^{\cos x} \,.\, \sin x\, dx + C$$

$$= -5 \int e^{\cos x}\, d(\cos x) + C$$

$$= -5e^{\cos x} + C$$

**Solusinya :**

$$y = \frac{1}{\sin x}(-5e^{\cos x} + C)$$

5. Selesaikan :

$$\frac{dy}{dx} - y = xy^5$$

$P(x) = -1$
$Q(x) = x$ } Subtitusi ke dalam persamaan (12) didapat
$n = 5$

$$\frac{dv}{dx} + v(-4)(-1) = -4x$$

$$\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

$P^*(x) = 4$

$Q^*(x) = -4x$

$u^* = e^{-\int P^* dx} = e^{-\int 4dx} = e^{-4x}$

$v^* = \int(-4x)\, e^{4x} dx + C$

$= -4 \int xe^{4x}\, dx + C$

$= -4\,(^1/_4 xe^{4x} + {}^1/_{16}e^{4x} + C$

$v^* = -xe^{4x} + {}^1/_4 e^{4x} + C$

$v = u^*v^* = e^{-4x}(-x\, e^{4x} + {}^1/_4\, e^{4x} + C)$

$v = -x + {}^1/_4 + C\, e^{-4x}$

Karena $v = y^{1-n} = y^{-4}$

$$\frac{1}{y^4} = -x + \frac{1}{4} + C\, e^{-4x}$$

6. Selesaikan :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy + xy^4 = 0$$

**Jawab :**

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -xy^4$$

$P(x) = 2x$

$Q(x) = -x$

$n = 4$

Substitusikan ke persamaan (12) di dapat

$$\frac{dv}{dx} - 6xv = 3x \text{ dengan } v = y^{-3}$$

$P^*(x) = -6x$

$Q^*(x) = 3x$

$u^* = e^{\int 6x dx} = e^{3x^2}$

$v^* = \int -x\, e^{-3x^2} dx + c = {}^1/_6 \int e^{-3x^2} d(-3x^2) + C$

$= 1/6\, e^{-3x^2} + C$

$v = u^*\, v^* = e^{3x^2} ({}^1/_6\, e^{-3x^2} + C)$

$v = {}^1/_6 + C\, e^{3x^2}$

$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{6} + C\, e^{3x^2}$$

7. Selesaikan

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} y = \frac{1}{3} (1 - 2x)\, y^4$$

$P(x) = {}^1/_3$

$Q(x) = {}^1/_3 (1 - 2x)$

$n = 4$

Substitusi ke persamaan (12) didapat

$$\frac{dv}{dx} - v = -(1 - 2x) \text{ dengan } v = y^{-3}$$

$P^*(x) = -1$

$$Q^*(x) = 2x - 1$$

$$u^* = e^{\int dx} = e^x$$

$$v^* = \int (2x - 1)\, e^{-x}\, dx + C$$

$$= 2 \int x\, e^{-x}\, dx - \int e^{-x} + C$$

$$= 2 (-xe^{-x} - e^{-x}) + e^{-x} + C$$

$$= -2xe^{-x} - e^{-x} + C$$

$$v = u^*v^* = -2x - 1 + C\, e^x$$

$$\frac{1}{y^4} = -2x - 1 + Ce^x$$

**Soal-soal :**

Selesaikan persamaan differensial di bawah ini :

(a) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2 + 2x$

(b) $\dfrac{dy}{dx} - y = xy^2$

(c) $x\, dy - 2y\, dx = (x - 2)\, e^x\, dx$

(d) $\dfrac{dp}{d\phi} + 3\, p = 2$

(e) $\dfrac{di}{dt} - 6i = 10 \sin 2t$

(f) $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2 e^x$

(g) $y\, dx + (xy + x - 3y)\, dy = 0$

(h) $x\, dy + y\, dx = x^3y^6\, dx$

(i) $y\, y' - xy^2 + x = 0$

(j) $2 \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{x}{y} + x^3 \cos y = 0$

## 4.3. PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE DUA

Bentuk-bentuk dari persamaan differensial orde 2 adalah :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x,y)$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + By = C$, dengan A, B dan C

konstan atau merupakan fungsi x

Jika persamaan $m^2 + Am + B = 0$ mempunyai 2 akar berlainan $m_1$ dan $m_2$, maka $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ adalah jawab umum dari persamaan differensial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + B = 0$$

Jawab umum sering disebut juga dengan **jawab komplementer** dari persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + B = C$. Jika $y = f(x)$

memenuhi persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + A\frac{dy}{dx} + B = C(x)$

maka $y = f(x)$ disebut juga **jawab partikulasi.**

Jadi jawab umum dari persamaan adalah **jawab komplementer + jawab partikulasi.**

**Contoh-contoh:**

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = x\,e^x + \cos x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x + \cos x)\,dx$$

2. Selesaikan $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = a$

$a$ = tetap

**Jawab :**

misal $p = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

substitusi :

$$x^2 \frac{dp}{dx} + xp = a$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x} p = \frac{a}{x^2}$$

$$P = \frac{1}{x}$$

$$Q = \frac{a}{x^2}$$

$$u = e^{-\int {}^1/_x \, dx} = e^{-\ln x} = x^{-1} = {}^1/_x$$

$$v = \int \frac{a}{x^2} \cdot \cdot \; x \, dx + C = a \int \frac{dx}{x} + C$$

$$= a \ln | x | + C$$

$$p = uv = {}^1/_x \, (a \ln | x | + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = a \frac{\ln | x |}{x} + \frac{C_1}{x}$$

$$y = a \int \frac{\ln x}{x} \, dx + C_1 \ln | x | + C_2$$

$$y = a \int \ln x \, d (\ln x) + C_1 \ln | x | + c_2$$

$$y = {}^a/_2 \ln^2 | x | + C_1 \ln | x | + C_2$$

3. $x\,y'' + y^1 + x = 0$

Selesaikan

misal $y' = p$

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

substitusi

$$x\frac{dp}{dx} + p = -x$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = -1$$

$$p = \frac{1}{x}$$

$Q = -1$

$$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = x^{-1} = {}^1/_x$$

$$v = \int(-1)\,x\,dx + C_1 = -{}^1/_2\,x^2 + C_1$$

$$p = uv = {}^1/_x\,(-{}^1/_2 x^2 + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x + \frac{C_1}{x}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0$. Selesaikanlah !

Karena $\frac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$

persamaan dikalikan dengan $2y'$, sehingga $2y'\,y'' - 4yy' = 0$

$$\frac{d}{dx}(y'^2) - 4yy' = 0$$

$$\frac{d}{dx}(y'^2) = 4yy'$$

$$y'^2 = \int 4yy'\, dx$$

$$= 4\int y\, dy$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y^2 + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{2y^2 + C}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = \int dx$$

$$\ln \left| \sqrt{2}\, y + \sqrt{2y^2 + C_1} \right| = \sqrt{2x + C_2}$$

$$\sqrt{2}\, y + \sqrt{2y^2 + C_1} \Big| = C_2\, e^{\sqrt{2x}}$$

5. Selesaikan : $y'' = -\frac{1}{y^3}$

Misal persamaan dikalikan dengan $2y'$

$$2y'y'' = -\frac{2}{y^3}\, y'$$

$$\frac{d}{dx}(y'^2) = -\frac{2}{y^3}\, y'$$

$$d(y')^2 = -\frac{2}{y^3}\, y'\, dx + C_1$$

$$d(y')^2 = -\frac{2}{y^3}\, dy + C_1$$

$$(y')^2 = -\int \frac{2}{y^3}\, dy + C_1$$

$$= \frac{1}{y^2} + C_1$$

$$y' = +\sqrt{\frac{1}{y^2} + C_1}$$

$$\frac{dy}{dx} = + \frac{1}{y} \sqrt{1 + C_1 y^2}$$

$$\frac{dy}{\frac{1}{y}\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx$$

$$\frac{y\, dy}{\sqrt{1 + C_1 y^2}} = dx$$

$$\int \frac{y \quad dy}{\sqrt{C_1 y^2 + 1}} = \int dx$$

$$\sqrt{1 + C_1 y^2} = C_1 x + C_2$$

$$(C_1 x + C_2)^2 = 1 + C_1 y^2$$

6. Selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 10\, y = 0$

**Jawab :**

dengan memisalkan $y = e^{mx}$ didapat persamaan :

$m^2 + 3m - 10 = 0$

$(m + 5)\ (m-2) = 0$

$m_1 = -5\ ;\ m_2 = 2$

Jadi solusinya : $y = C_1\, e^{-5x} + C_2\, e^{2x}$

7. Selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} = 0$

dengan memisalkan $y = e^{mx}$ didapat

$m^2 + 5m = 0$

$m\ (m + 5) = 0$

$m_1 = 0$

$m_2 = -5$

Jadi solusinya :

$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-5x}$

atau $y = C_1 + C_2 e^{-5x}$

8. Selesaikan $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

dengan memisalkan $y = e^{mx}$ didapat

$m^2 - 6m + 9 = 0$

$(m - 3)^2 = 0$

$m_1 = m_2 = 3$

maka solusinya : $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x}$

9. Selesaikan persamaan

$\frac{d'y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$

dengan memisalkan $y = e^{mx}$ didapat

$m^2 - 2m + 5 = 0$

$(m - 1)^2 + 4 = 0$

$(m - 1 + 2i)(m - 1 - 2i) = 0$

$m_1 = 1 - 2i$

$m_2 = 1 + 2i$

Solusinya :

$y = C_1 e^{(1-2i)x} + C2\ e^{(1+2i)x}$

$= C_1 e^x - e^{-2xi} + C_2 c^x \cdot e^{2xi}$

$= C_1 e^x (\cos 2x - i \sin 2x) +$

$C_2 e^x (\cos 2x + i \sin 2x)$

$= e^x \{(C_1 + C_2) \cos 2x + (c_2 i - C_1 i) \sin 2x)\}$

$= e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$

Rumus : $C^{+ix} = \cos x + i \sin x$

10. Selesaikan persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 21y = x^2 + 1$$

Mencari jawab komplementer, persamaan differensialnya :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 21\,y = 0$$

Dengan memisalkan $y = e^{mx}$, didapat

$m^2 - 4m - 21 = 0$

$(m - 7)(m + 3) = 0$

$m_1 = 7$

$m_2 = -3$

Jawab komplementer : $y = C_1 \cdot e^{7x} + C_2\, e^{-3x}$

Mencari solusi partikulir, di *sini*

$C(x) = x^2 + 1$ maka dimisalkan

$y = Ax^2 + Bx + C$ ; sehingga

$y' = 2Ax + B$

$y'' = 2A$

Substitusi ke dalam persamaan (soal) di dapat

$2A - 4\,(2Ax + B) - 21\,(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 1$

$-21\,A\,x^2 + (-8A = -21B)\,x + (2A - 4B - 21C) = x^2 + 1$

$$-21A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{21}$$

$$-8A - 21B = 0 \rightarrow \frac{8}{21} - 21B \rightarrow = \frac{8}{441}$$

$$2A - 4B - 21C = 1 \rightarrow -\frac{2}{21} - \frac{32}{441} - 21C = 1$$

$$C = \frac{551}{9261}$$

Jadi jawab partikulir :

$$y = -\frac{1}{21}x^2 + \frac{8}{441}x + \frac{551}{9261}$$

Jawab umum dari persamaan :

$$y = C_1 e^{7x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{21}x^2 + \frac{8}{441}x + \frac{551}{9261}$$

11. Selesaikan persamaan

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin x$$

Jawab : mencari solusi komplementer

$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ , dengan memisalkan :

$y = e^{mx}$ didapat

$m^2 + 4 = 0$

$(m + 2i)(m - 21) = 0$

$m_1 = 2i$

$m_2 = -2i$

Jawab komplementer :

$y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-21x}$

$y = C_1 (\text{Cos } 2x + i \sin 2x) +$

$C_2 (\cos 2x - i \sin 2x)$

$y = (C_1 + C_2) \cos 2x + (iC_1 - iC_2) \sin 2x$

$y = A \cos 2x + B \sin 2x$

Mencari solusi partikulasi, misalkan

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, sehingga

$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x$

Substitusi ke persamaan, didapat

$+3C_1 \cos x + 3C_2 \sin x = \sin x$

$3C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$3C_2 = 1 \rightarrow C_2 = {}^1/_3$

Jawab partikulasi : $y = {}^1\!/_3 \sin x$

Jawab umum :

$$y = A \cos 2x + B \sin 2x + {}^1\!/_3 \sin x$$

12. Selesaikan :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 3e^{2x}$$

Jawab :

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ untuk mencari solusi komplementer.

mis : $y = e^{mx}$ ; substitusi ke persamaan menghasilkan :

$m^2 - 3m - 4 = 0$

$(m - 4)(m + 1) = 0$

$m_1 = 4, \qquad m_2 = -1$

Solusi komplementer :

$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$

Untuk mencari solusi partikulir misalkan :

$y = D e^{2x}$, karena $C(x) = 3e^{2x}$.

$y' = 2D e^{2x}$

$y'' = 4D e^{2x}$

Substitusi ke persamaan di atas (soal)

$4D e^{2x} - 6D e^{2x} - 4D e^{2x} = 3 e^{2x}$

$-6D = 3$

$D = -{}^1\!/_2$

Solusi partikulir adalah

$$y = -{}^1\!/_2 e^{2x}$$

$\therefore$ Solusi umum persamaan adalah

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} - {}^1\!/_2 e^{2x}$$

**Soal-soal**

Selesaikan persamaan differensial order 2 berikut ini :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$

2. $e^{2x} \frac{d^2y}{dx^2} = 4\,(e^{4x} + 1)$

3. $\frac{d^2y}{dx^2} = -\,9 \cos 3x$

4. $x \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 4x = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 2x - x^2$

6. $x \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 8x^3$

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$

8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} = 0$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$

10. $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 0$

11. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 6x + 3$

12. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3e^x$

13. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9\,y = x + e^{2x}$

14. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos 2x + 2 \sin 2x$

## 4.4. LEBIH LANJUT TENTANG PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER

### BENTUK UMUM PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER ORDE n

Bentuk umum persamaan differensial orde n adalah

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)\,y = R(x) \qquad \text{.....(4.4-1)}$$

Suatu persamaan differensial yang tidak dapat dituliskan dalam bentuk ini dinamakan taklinier.

**Contoh 1.** $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2xy = \sin x$ adalah suatu persamaan linier orde dua.

**Contoh 2.** $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x^2y = e^{-x}$ adalah bukan suatu persamaan linier orde dua.

Jika R(x) di, ruas kanan (1) diganti nol, maka persamaan differensial yang dihasilkan dinamakan persamaan komplementer, tereduksi atau homogen. Jika $R(x) \neq 0$, maka persamaan tersebut dinamakan persamaan lengkap atau tak homogen.

**Contoh 3.** Jika $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2xy = \sin x$ adakah persamaan lengkap, maka

$x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 0$ adalah persamaan komplementer, tereduksi atau homogen dari persamaan tersebut.

Jika $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ adalah konstanta, (1) dikatakan mempunyai koefisien konstanta; dalam hal lain dikatakan mempunyai koefisien peubah.

### TEOREMA KEUJUDAN DAN KETUNGGALAN

Jika $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ dan R(x) kontinu pada selang $|x - x_o| < \delta$ dan $a_o(x) = 0$, maka ada satu dan hanya satu penyelesaian dari (1) yang memenuhi syarat

$$y(x_o) = y_o, \quad y'(x_o) = y'_o, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_o) = y_o^{(n-1)} \qquad \text{..... (4.4-2)}$$

## LAMBANG OPERATOR

Kadang–kadang baik sekali untuk menggunakan lambang Dy, $D^2y$, ..., $D^ny$ untuk menyatakan $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$. Lambang D, $D^2$, . . .$D^n$ dinamakan operator differensial dan bersifat sama seperti besaran aljabar. Dengan menggunakan lambang ini, kita menuliskan (1) sebagai

$$[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)]y = R(x) \qquad \text{.....(4.4-3)}$$

atau disingkat $\phi(D)y = R(x)$

dimana $\phi(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ dinamakan operator suku banyak dalam D.

**Contoh 4.** $x\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2xy = \sin x$ dapat ditulis sebagai $(xD^2 + 3D - 2x)y = \sin x$

## OPERATOR LINIER

Suatu operator L dinamakan operator linier jika untuk suatu konstanta A, B dan fungsi u, v di mana L dapat digunakan, kita mempunyai hubungan

$$L(Au + Bv) = AL(u) + BL(v)$$

Operator D, $D^2$, . . . dan $\phi(D)$ adalah operator linier (Lihat Soal 3.3).

## TEOREMA DASAR PERSAMAAN DIFFERENSIAL LINIER

Untuk menentukan penyelesaian umum dari

$$\phi(D)y = R(x) \qquad \text{.....(4.4-4)}$$

di mana $R(x) \neq 0$, misalkan $Y_c(x)$ penyelesaian umum persamaan komplementer tereduksi atau homogen

$$\phi(D)y = 0 \qquad \text{.....(4.4-5)}$$

Kita seringkali menyebutkan $Y_c(x)$ sebagai penyelesaian komplementer atau penyelesaian homogen. Berikut ini kita mempunyai teorema penting yang kadang-kadang dinamakan prinsip atau teorema superposisi.

***Teorema 3–1.*** Penyelesaian umum (4) diperoleh dengan menjumlahkan penyelesaian komplementer $Y_c(x)$ ke suatu penyelesaian khusus $Y_p(x)$ dari (4) yaitu

$$y = Y_c(x) + Y_p(x)$$

**Contoh 5.** Penyelesaian umum persamaan $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ adalah $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ dan suatu penyelesaian khusus dari $(D^2 - 3D + 2)y = 4x^2$ adalah $2x^2 + 6x + 7$. Maka penyelesaian umum dari $(D^2 - 3D + 2)y = 4x^2$ adalah $y = c_1e^x - c_2e^{2x} - 2x^2 + 6x + 7$.

Berdasarkan teorema ini, jelaslah bahwa kita dapat memandang secara terpisah terhadap masalah menentukan penyelesaian umum persamaan homogen dan penyelesaian khusus persamaan takhomogen.

## *KETAKBEBASAN LINIER DAN DETERMINAN WRONSKIAN*

Suatu himpunan n fungsi $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ dikatakan takbebas linier pada suatu selang jika ada n konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$, yang tidak semua nol, sehingga kesamaan

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x) = 0$$

berlaku pada selang itu. Jika tidak demikian himpunan fungsi itu dikatakan bebas linier.

**Contoh 6.** $2e^{3x}$, $5e^{3x}$, $e^{-4x}$ tak bebas linier pada suatu selang karena kita dapat menentukan konstanta $c_1, c_2, c_3$ yang tidak semua nol sehingga $c_1(2e^{3x}) + c_2(5e^{3x}) + c_3(e^{-4x}) = 0$ identik untuk $c_1 = -5$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$.

**Contoh 7.** $e^x$ dan $xe^x$ bebas linier karena $c_1e^x + c_2xe^x = 0$ identik jika $c_1 = 0$ dan $c_2 = 0$

***Teorema 3–2.*** Himpunan fungsi $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ (diandaikan mempunyai turunan) adalah bebas linier pada suatu selang jika dan hanya jika determinan

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \ldots & y'_n(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

yang dinamakan Determinan Wronskian dari $y_1, \ldots, y_n$ tidak nol pada selang tersebut.

Teorema terakhir ini sangat penting dalam hubungannya dengan penyelesaian homogen atau persamaan tereduksikan.

*Teorema 3-3.* (Prinsip superposisi). Jika $y_1(x)$, $y_2(x)$, . . ., $y_n(x)$ adalah n penyelesaian bebas linier dari persamaan linier orde–n $\phi(D)y = 0$, maka

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

di mana $c_1, c_2, \ldots, c^n$ adalah konstanta sembarang, adalah penyelesaian umum $\phi(D)y = 0$.

## *PENYELESAIAN PERSAMAAN LINIER DENGAN KOEFISIEN KONSTANTA*

Catatan berikut dapat digunakan untuk menentukan persamaan umum (1). Penyederhanaan khusus terjadi bilamana persamaan tersebut mempunyai konstanta dan sekarang kita bahas kasus ini. Dua prosedur umum yang digunakan pada kasus ini adalah yang tidak menggunakan teknik operator dan yang menggunakannya. Untuk setiap kasus terdapat metode untuk menentukan penyelesaian komplementer dan penyelesaian khususnya, dan keduanya kita gabungkan dengan menggunakan Teorema Dasar 3-1.

## *TEKNIK TANPA OPERATOR*

### 1. PENYELESAIAN KOMPLEMENTER ATAU PENYELESAIAN HOMOGEN

Misalkan $y = e^{mx}$, m = konstanta pada $(a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)y = 0$ sehingga diperoleh

$$a_0m^n + a_1m^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad \text{.....(4.4-6)}$$

yang dinamakan persamaan pembantu atau persamaan karakteristik. Persamaan ini dapat difaktorkan ke dalam

$$a_0(m - m_1)\,(m - m_2). \ldots (m - m_n) = 0 \qquad \text{.....(4.4-7)}$$

yang mempunyai akar $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Kita akan memandang tiga kasus berikut ini.

**Kasus 1. Semua akarnya riil dan berlainan.**

Pada kasus ini $e^{m_1x}$, $e^{m_2x}$, . . ., $e^{m_nx}$ adalah n penyelesaian bebas linier sehingga dengan menggunakan Teorema 3–3, penyelesaian yang diinginkan adalah

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} + \ldots + c_ne^{m_nx} \qquad \text{.....(4.4-8)}$$

**Kasus 2. Beberapa akarnya kompleks.**

Jika $a_0, a_1, \ldots, a_n$ riil, dan bilaman a + bi adalah akar dari (6), maka a – bi juga akarnya (di sini a, b riil). Maka penyelesaian yang berkaitan dengan akar a + bi dan a – bi adalah

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \qquad \text{.....(4.4-9)}$$

yang diperoleh dengan menggunakan rumus Euler $e^{iu} = \cos u + i \sin u$.

**Kasus 3. Beberapa akarnya berulang.**

Jika $m_1$ adalah suatu akar dengan multiplisitas (pengulangan) k, maka suatu penyelesaiannya diberikan oleh

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_kx^{k-1})e^{m_1 x} \qquad \text{.....(4.4-10)}$$

## 2. *PENYELESAIAN KHUSUS*

Dua metode penting untuk menentukan suatu penyelesaian khusus dari $\phi(D)y = R(x)$ berikut ini sering digunakan.

**1. Metode koefisien taktentu.**

Dalam metode ini kita mengandaikan bahwa suatu penyelesaian coba-coba (trial solution) yang memuat konstanta tidak diketahui (dinyatakan dengan a, b, c, . . .) dapat ditentukan dengan memasukkannya ke persamaan yang diberikan. Dalam setiap kasus, penyelesaian coba-coba tersebut diandaikan bergantung pada bentuk khusus R(x) yang ditunjukkan pada tabel berikut ini. Pada setiap kasus, f, g, p, q adalah konstanta yang diberikan dan k suatu bilangan bulat positif yang juga diberikan.

| R(x) | Penyelesaian coba-coba yang diandalkan |
|---|---|
| $fe^{px}$ | $ae^{px}$ |
| $f \cos px + g \sin px$ | $a \cos px + b \sin px$ |
| $f_0x^k + f_1x^{k-1} + \ldots + f_k$ | $a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$ |
| $e^{px}(f \cos px + g \sin qx)$ | $e^{px}(a \cos px + b \sin px)$ |
| $e^{px}(f_0x^k + f_1x^{k-1} + \ldots + f_k)$ | $e^{px}(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k)$ |
| $(f_0x^k + \ldots + f_k) \cos px + (g_0x^k + \ldots + g_k) \sin px$ | $(a_0x^k + \ldots + a_k) \cos px + (b_0x^k + \ldots + b_k) \sin px$ |
| $e^{px}(f_0x^k + \ldots + f_k) \cos px + e^{px}(g_0x^k + \ldots + g_k) \sin px$ | $e^{px}(a_0x^k + \ldots + a_k) \cos px + e^{px}(b_0x^k + \ldots + b_k) \sin px$ |
| Jumlah suatu atau beberapa entri di atas | Jumlah penyelesaian coba-coba yang berkaitan |

Metode di atas berlaku dalam kasus penyelesaian coba-coba yang diandaikan tidak mengandung suku dari penyelesaian komplementernya. Bilamana suatu suku dari penyelesaian coba-coba ini dengan pangkat positif terkecil dari x yang cukup besar sehingga setiap sukunya tidak muncul lagi pada penyelesaian komplementernya.

**2. Metode variasi parameter.**

Misalkan penyelesaian komplementer dari $\phi(D)y = R(x)$ adalah

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$$

Gantilah konstanta sembarang $c_1, c_2, \ldots, c_n$ dengan fungsi $K_1(x), K_2(x), \ldots, K_n(x)$ yang akan ditentukan sehingga $y = K_1y_1 + K_2y_2 + \ldots + K_ny_n$ adalah penyelesaian dari $\phi(D)y = R(x)$. Karena untuk menentukan n buah fungsi ini kita harus menentukan n pembatas padanya dan karena satu dari pembatas tersebut adalah persamaan differensialnya harus dipenuhi, maka sisa pembatas yang harus ditentukan adalah (n–1). Syarat yang harus dipenuhi untuk penyederhanaannya diberikan oleh persamaan

$$\left.\begin{aligned} &K'_1y_1 + K'_2y_2 + \ldots + K'_ny_n = 0 \\ &K'_1y'_1 + K'_2y'_2 + \ldots + K'_ny'_n = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K'_1y_1^{(n-2)} + K'_2y_2^{(n-2)} + \ldots + K'_ny_n^{(n-2)} = 0 \\ &K'_1y_1^{(n-1)} + K'_2y_2^{(n-1)} + \ldots + K'_ny_n^{(n-1)} = R(x)/a_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4\text{-}11)$$

di mana persamaan terakhir menyatakan syarat agar persamaan differensial yang diberikan dapat dipenuhi.

Karena determinan sistem persamaan di atas adalah determinan Wronskian dari $y_1, y_2, \ldots, y_n$ yang diandaikan tidak sama dengan nol, maka persamaan tersebut dapat diselesaikan untuk $K'_1, K'_2, \ldots, K'_n$. Dari sini $K_1, K_2, \ldots$ dapat ditentukan dengan mengintegralkan untuk memperoleh penyelesaian yang diinginkan. Metode ini digunakan bilamana penyelesaian komplementernya dapat ditentukan, termasuk kasus di mana $a_0, \ldots, a_n$ tidak konstan.

## *TEKNIK OPERATOR*

Bilamana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah konstanta, maka persamaan $\phi(D)y = R(x)$ dapat ditulis dalam faktor berbentuk

$$a_0(D - m_1)(D - m_2)\ldots(D - m_n)y = R(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.4\text{-}12)$$

di mana $m_1, \ldots, m_n$ adalah konstanta dan orde dari faktor-faktor $(D - m_1), \ldots, (D - m_n)$ tidak dipentingkan. Hal ini tidak benar untuk $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bukan konstanta (lihat Soal 3.2). Konstanta $m_1, \ldots, m_n$ sama seperti akar-akar persamaan pembantu (6) atau (7), dan juga penyelesaian komplementernya dapat dituliskan seperti sebelumnya. Untuk menentukan penyelesaian khususnya, metode operator berikut ini akan sangat berguna.

**1. Metode penurunan (reduksi) orde.**

Misalkan $a_0(D - m_2) \ldots (D - m_n)y = Y_1$. Maka (12) menjadi $(D - m_1)Y_1 = R(x)$ yang dapat diselesaikan untuk $Y_1$. Kemudian misalkan $a_0(D - m_3) \ldots (D - m_n)y = Y_2$ sehingga $(D - m_2)Y_2 = Y_1$ dapat diselesaikan untuk $Y_2$. Dengan melanjutkan cara ini, y dapat ditentukan. Metode ini menghasilkan penyelesaian umum jika semua konstanta sembarangnya dibiarkan, sedangkan bila konstanta sembarangnya dihilangkan akan menghasilkan suatu penyelesaian khusus.

**2. Metode Operator Invers.**

Misalkan $\dfrac{1}{\phi(D)} R(x)$ didefinisikan sebagai suatu penyelesaian khusus $y_p$ sehingga $\phi(D)y_p = R(x)$. Kita namakan $1/\phi(D)$ suatu operator invers. Dengan berpedoman pada jajaran dalam tabel berikut ini, tenaga yang dilibatkan untuk menentukan penyelesaian khusus $\phi(D)y = R(x)$ seringkali sangat berkurang. Dalam menggunakan ini kita seringkali menggunakan teorema

$$\frac{1}{\phi(D)} \{c_1R_1(x) + \ldots + c_kR_k(x)\} = c_1\frac{1}{\phi(D)} R_1(x) + \ldots + c_k \frac{1}{\phi(D)} R_k(x)$$

yang secara sederhana menyatakan bahwa pernyataan $1/\phi(D)$ adalah suatu operator linier.

## TABEL TEKNIK OPERATOR INVERS

| | |
|---|---|
| A. $\frac{1}{D-m} R(x)$ | $e^{mx} \int e^{-mx} R(x)\, dx$ |
| B. $\frac{1}{(D-m_1)(D-m_2)\ldots(D-m_n)} R(x)$ | $\int e^{m_1 x} \int e^{-m_1 x} e^{m_2 x} \int \ldots \int e^{-m_{n-1} x} e^{m_n x} \int e^{-m_n x} R(x)\, dx^n$<br>Ini dapat juga dihitung dengan menguraikan operator invers ke dalam pecahan bagian dan kemudian gunakan jajaran A. |
| C. $\frac{1}{\phi(D)} e^{px}$ | $\frac{e^{px}}{\phi(p)}$ jika $\phi(p) \neq 0$<br>$\frac{x^k e^{px}}{\phi^{(k)}(p)}$ jika $\phi(p) = \phi'(p) = \ldots \phi^{(k-1)}(p) = \phi$ tetapi $\phi^{(k)}(p) \neq \phi$ |
| D. $\frac{1}{\phi(D^2)} \cos(px+q)$<br>$\frac{1}{\phi(D^2)} \sin(px+q)$ | $\frac{\cos(px+q)}{\phi(-p^2)}$ jika $\phi(-p^2) \neq \phi$<br>$\frac{\sin(px+q)}{\phi(-p^2)}$ |
| E. $\frac{1}{\phi(D)} \cos(px+q) = \text{Re}\left\{\frac{1}{\phi(D)} e^{i(px+q)}\right\}$<br>$\frac{1}{\phi(D)} \sin(px+q) = \text{Im}\left\{\frac{1}{\phi(D)} e^{i(px+q)}\right\}$<br>"Re" berarti "bagian riil dari" dan "Im" berarti "bagian imajiner dari" | $\text{Re}\left\{\frac{e^{i(px+q)}}{\phi(ip)}\right\}$<br>$\text{Im}\left\{\frac{e^{i(px+q)}}{\phi(ip)}\right\}$<br>jika $\phi(ip) \neq 0$, dalam hal lain gunakan jajaran C. |
| F. $\frac{1}{\phi(D)} x^p = (c_0 + c_1 D + \ldots + c_k D^k + \ldots) x^p$<br>dengan menguraikan $1/\phi(D)$ dalam pangkat dari D. (p = bilangan bulat positif). | $(c_0 + c_1 D + \ldots + c_p D^p) x^p$<br>karena $D^p + {}^n x^p = 0$ untuk $x > 0$. |
| G. $\frac{1}{\phi(D)} e^{px} F(x)$ | $e^{px} \frac{1}{\phi(D+p)} F(x)$<br>dinamakan "teoremia pergeseran operator" ("operator shift theorem"). |
| H. $\frac{1}{\phi(D)} x F(x)$ | $x \frac{1}{\phi(D)} F(x) - \frac{\phi(D)}{[\phi(D)]^2} F(x)$ |

## PERSAMAAN LINIER DENGAN KOEFISIEN PEUBAH

Ada beberapa macam metode yang tersedia untuk menyelesaikan persamaan differensial berbentuk (1) di mana $a_0$, $a_1$, . . . , $a_n$ tak-konstan. Berikut ini kita daftarkan beberapa metode penting.

### I. MACAM-MACAM TRANSFORMASI PEUBAH

**1. Persamaan Cauchy atau Euler. Persamaan ini berbentuk**

$$(b_0x^nD^n + b_1x^{n-1}D^{n-1} + \ldots + b_{n-1}xD + b_n)y = R(x)$$

di mana $b_0$, $b_1$, . . ., $b_n$ adalah konstanta. Ini dapat diselesaikan dengan memisalkan $x = e^t$ dan menggunakan hasil

$$xD = D_t,\ x^2D^2 = D_t(D_t - 1),\ \ x^3D^3 = D_t(D_t - 1)(D_t - 2), \ldots$$

di mana $D_t = d/dt$, sehingga mereduksi persamaannya menjadi persamaan dengan koefisien konstanta. Kasus di mana $R(x) = 0$ dapat diselesaikan dengan memisahkan $y = x^p$ dan menentukan konstanta p.

**2. Kasus di mana satu penyelesaian diketahui.** Jika satu penyelesaian $y = Y(x)$ dari $\phi(D)y = R(x)$ diketahui, maka penggantian $y = vY(x)$ akan mentransformasikan persamaan differensial tersebut ke dalam persamaan berorde (n–1) dalam v'. Jika $n = 2$, persamaan berorde $(n - 1)$ dalam v'. Jika $n = 2$, persamaan tersebut dapat diselesaikan secara eksak. Lihat Soal 34.

**3. Reduksi ke bentuk kanonik.** Bentuk umum persamaan linier tingkat dua

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \qquad \text{.....(4.4-13)}$$

dapat ditransformasikan ke dalam bentuk kanonik

$$v'' + f(x)v = g(x) \qquad \text{.....(4.4-14)}$$

di mana

$$f(x) = q(x) = {}^1/_4[p(x)]^2 - {}^1/_2p'(x), \quad g(x) = r(x)e^{1/2 \int p(x)dx} \qquad \text{.....(4.4-15)}$$

dengan menggunakan penggantian

$$y = ve^{-1/2 \int p(x)dx} \qquad \text{.....(4.4-16)}$$

Jadi jika (14) dapat diselesaikan, demikian juga (13). Lihat Soal 35 dan 36.

## II. PERSAMAAN EKSAK

Persamaan $[a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x)]y = R(x)$ dinamakan eksak jika

$$a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x) = D(p_o(x)D^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)]$$

Sebagai contoh, $[a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x)]y = R(x)$ eksak jika dan hanya jika kesamaan $a''_0 - a'_1 + a_2 = 0$ berlaku. Lihat Soal 37 dan 38.

## III. VARIASI PARAMETER

Metode ini identik dengan metode di halaman 81, yang dapat digunakan bilamana penyelesaian komplementernya diketahui.

## IV. PEMFAKTORAN OPERATOR

Jika $\phi(D)$ dapat difaktorkan ke dalam faktor-faktor di mana setiap faktornya berbentuk $p(x)D + q(x)$, maka metode penurunan tingkat (di halaman 81) dapat digunakan. Lihat Soal 39.

## V. METODE DERET

Persamaan $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ di mana $a_0$, $a_1$, $a_2$ adalah suku banyak seringkali dapat diselesaikan dengan pengandaian bahwa

$$y = x^\beta (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^{k+\beta} \text{ di mana } c_k = 0,\ k < 0 \quad \ldots\ldots(4.4\text{-}17)$$

di mana $\beta$ dan $c_k$ konstanta. Masukkan (17) ke dalam persamaan differensial agar dicapai suatu persamaan untuk c, yang dinamakan persamaan berindeks (indicial equation), dan persamaan untuk konstanta $c_0$, $c_1$, . . . yang berbentuk suatu rumus rekursi (recursion formula). Dengan menyelesaikannya untuk $\beta$ dan konstanta lainnya, seringkali dapat diperoleh suatu penyelesaian berbentuk deret. Deret ini dinamakan suatu Deret Frobenius dan metodenya seringkali dinamakan metode Frobenius. Lihat Soal 40.

# PERSAMAAN DIFFERENSIAL SIMULTAN

Suatu sistem persamaan differensial dengan dua atau lebih peubah takbebas dan satu peubah bebas dapat diselesaikan dengan mengeliminasi satu dari peubah takbebasnya, sehingga diperoleh suatu persamaan differensial yang tunggal. Penyelesaian yang diperoleh akan diperiksa kembali dengan memasukkannya ke persamaan differensial asalnya untuk mendapatkan bilangan yang sebenarnya dari konstanta sembarang yang disajikan.

## PENGGUNAAN

Masalah–masalah dalam mekanika, kelistrikan dan bidang lain dalam ilmu pengetahuan dan teknologi seringkali mencapai persamaan differensial dan dapat diselesaikan dengan metode di atas. Lihat Soal 42 – 47.

# 4.5. SOAL–SOAL DAN PEMECAHANNYA

## OPERATOR

1. Tunjukkan bahwa $(D^2 + 3D + 2)e^{4x} = (D + 2)(D + 1)e^{4x} = (D + 1)(D + 2)e^{4x}$.

   $(D^2 + 3D + 2)e^{4x} = D^2e^{4x} + 3De^{4x} + 2e^{4x} = 16e^{4x} + 12e^{4x} + 2e^{4x} = 30e^{4x}$

   $(D + 2)(D + 1))e^{4x} = (D + 2)(De^{4x} + e^{4x}) = (D + 2)(4e^{4x} + e^{4x}) = (D + 2)(5e^{4x}) = 30e^{4x}$

   $(D + 1)(D + 2)e^{4x} = (D + 1)(De^{4x} + 2e^{4x}) = (D + 1)(4e^{4x} + 2e^{4x}) = (D + 1)(6e^{4x}) = 30e^{4x}$

   Hasil ini menggambarkan bahwa hukum komulatif dari perkalian operator dengan koefisien konstanta berlaku. Secara umum, hukum komulatif untuk perkalian tidak berlaku bagi operator dengan koefisien pada konstanta seperti terlihat pada Soal 2.

2. Tunjukkan bahwa operator $xD + 1$ dan $D - 2$ tidak komulatif terhadap perkalian.

   $(xD + 1)(D - 2)y = (xD + 1)(y' - 2y) = xD(y' - 2y) + (y' - 2y) = xy'' - 2xy' + y' - 2y$

   $(D - 2)(xD + 1)y = (D - 2)(xy' + y) = D(xy' + y) - 2(xy' + y) = xy'' - 2xy' + 2y' - 2y$

   Maka $(xD + 1)(D - 2)y \neq (D - 2)(xD + 1)y$ dan hasil yang diinginkan terbukti.

3. (a) Buktikanlah bahwa $D, D^2, D^3, \ldots$ adalah operator linier. (b) Buktikanlah bahwa $\phi(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_n(x)$ adalah suatu operator linier.

   (a) $D(Au + Bv) = \dfrac{d}{dx}(Au + Bv) = A\dfrac{du}{dx} + B\dfrac{dv}{dx} = A\,Du + B\,Dv$

   sehingga D adalah suatu operator linier (lihat halaman 78).

   Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan bahwa $D^2, D^3, \ldots$ adalah operator linier.

   (b) $\begin{aligned}\phi(D)[Au + Bv) &= (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)[Au + Bv] \\ &= a_0D^n[Au + Bv] + \ldots + a_n[Au + Bv] \\ &= (Aa_0D^nu + Ba_0D^nv) + \ldots + (Aa_nu + Ba_nv) \\ &= A(a_0D^n + \ldots + a_n)u + B(a_0D^n + \ldots + a_n)v \\ &= A\phi(D)u + B\phi(D)v\end{aligned}$

   sehingga $\phi(D)$ adalah suatu operator linier.

4. Buktikan bahwa jika $y_1, y_2, \ldots, y_n$ adalah penyelesaian persamaan $\phi(D)y = 0$, maka $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ di mana $c_1, c_2, \ldots c_n$ konstanta sembarang juga merupakan penyelesaian persamaan itu.

Kita mempunyai $\phi(D)y_1 = 0$, $\phi(D)y_2 = 0, \ldots, \phi(D)y_n = 0$
Maka dengan menggunakan Soal 3,

$$\phi(D)[c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n] = c_1\phi(D)y_1 + c_2\phi(D)y_2 + \ldots + c_n\phi(D)y_n = 0$$

sehingga $c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$ adalah suatu penyelesaian.

5. Buktikanlah Teorema 3–1 di halaman 109.

Misalkan $y = Y_c(x)$ adalah penyelesaian umum $\phi(D)y = 0$, yang mempunyai n konstanta sembarang. Misalkan $y = Y_p(x)$ adalah suatu penyelesaian khusus $\phi(D)y = R(x)$. Maka $y = Y_c(x) + Y_p(x)$ adalah penyelesaian umum $\phi(D)y = R(x)$ karena menurut Soal 3.

$$\phi(D)[Y_c(x) + Y_p(x)] = \phi(D)[Y_c(x)] + \phi(D)[Y_p(x)] = 0 + R(x) = R(x)$$

## *KETAKBEBASAN LINIER DAN DETERMINAN WRONSKI*

6. Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi $\cos 2x$, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ takbebas linier.

Kita harus menunjukkan adanya konstanta $c_1, c_2, c_3$ yang tidak semua nol sehingga $c_1 \cos 2x + c_2 \sin^2 x + c_3 \cos^2 x = 0$ secara identik. Karena $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, kita dapat memilih $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$ dan hasil yang diinginkan terjadi.

7. Buktikanlah bahwa bila diterminan Wronski dari fungsi–fungsi $y_1, \ldots y_n$ tidak sama dengan nol pada suatu selang, maka fungsi-fungsi tersebut bebas linier pada selang itu.

Andaikan tidak demikian, yaitu fungsi-fungsi tersebut tak bebas linier pada selang itu. Maka ada n konstanta $c_1, \ldots, c_n$ yang tidak semua nol sehingga

$$c_1y_1 + \ldots + c_ny_n = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

secara identik. Dengan pendiferensialan berturut-turut kita sampai pada kesamaan

$$\begin{aligned} &c_1y_1' + \ldots + c_ny_n' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ &c_1y_1^{(n-1)} + \ldots + c_ny_n^{(n-1)} = 0 \end{aligned}$$

Sekarang selesaikan sistem n persamaan (1) dan (2) untuk memperoleh jawaban $c_1, \ldots, c_n$ yang tidak semua nol, kita harus mendapatkan

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y'_1 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Karena $W \neq 0$ menurut hipotesa, pertentangan ini menunjukkan bahwa fungsi-fungsi tersebut tidak dapat takbebas linier, sehingga haruslah bebas linier.

8. Buktikanlah bahwa jika fungsi-fungsi $y_1, \ldots, y_n$ bebas linier pada suatu selang, maka determinan Wronskinya tidak sama dengan nol.

Andaikan tidak demikian, yaitu determinan Wronskinya nol untuk suatu nilai khusus $x_0$ pada selang itu. Perhatikan sistem persamaan

$$\left.\begin{array}{l} c_1y_1(x_0) + \cdots + c_ny_n(x_0) = 0 \\ c_1y'_1(x_0) + \cdots + c_ny_n'(x_0) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Karena determinan Wronskinya nol, kita lihat bahwa sistem ini mempunyai penyelesaian $c_1, \ldots, c_n$ yang tidak semua nol. Sekarang misalkan

$$y = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Jika $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ adalah penyelesaian $\phi(D)y = 0$, maka menurut Soal 4; (2) juga penyelesaian dari $\phi(D)y = 0$ yang dapat dilihat dari persamaan (1) memenuhi syarat $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0$. Tetapi $y = 0$ memenuhi $\phi(D)y = 0$ dengan syarat yang sama. Jadi menurut teorema ketunggalan di halaman 44, ini mengakibatkan bahwa penyelesaiannya hanya $y = 0$, yaitu

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) = 0$$

dan dari sini kita lihat bahwa $y_1, \ldots, y_n$ takbebas linier. Karena $y_1, \ldots, y_n$ bebas linier menurut hipotesa; pertentangan ini menunjukkan bahwa determinan Wronskinya tidak dapat nol untuk $x_0$ dan hasil yang diinginkan terbukti.
Soal ini dan Soal 7, bersama-sama membuktikan Teorema 3–2.

9. Misalkan $y_1(x)$, $y_2(x)$ adalah penyelesaian $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
   (a) Buktikan bahwa determinan Wronskinya adalah $W = y_1y'_2 - y_2y'_1 = ce^{-\int p dx}$.
   (b) Syarat manakah untuk c yang membuat $y_1$ dan $y_2$ bebas linier.

(a) Karena $y_1$ dan $y_2$ adalah penyelesaian, maka

$$y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0, \quad y''_2 + py'_2 + qy_2 = 0$$

Kalikan persamaan ini berturut-turut dengan $y_2$ dan $y_1$ kemudian kurangkan, diperoleh

$$y_1y''_2 - y_2y''_1 + p(y_1y'_2 - y_2y'_1) = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

Kemudian gunakan $W = y_1y'_2 - y_2y'_1$ dan dengan mengingat $y_1y''_2 - y_2y''_1 = dW/dx$, menjadi

$$\frac{dW}{dx} + pW = 0$$

yang mempunyai penyelesaian

$$W = y_1y'_2 - y_2y'_1 = ce^{-\int pdx} \qquad \text{.....(2)}$$

Hasil ini kadang-kadang dinamakan Kesamaan Abel.

(b) Karena $e^{-\int pdx}$ tidak pernah nol, maka $W \neq 0$ jika dan hanya jika $c \neq 0$. Jadi jika $c \neq 0$, $y_1$ dan $y_2$ bebas linier.

10. Gunakanlah Soal 9. untuk membuktikan bahwa jika $y_1$ adalah penyelesaian yang diketahui dari $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, maka suatu penyelesaian bebas liniernya adalah

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int pdx}}{y_1^2}\, dx$$

sehingga penyelesaian umumnya adalah $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

Dari (2) soal 9, setelah membaginya dengan $y_1^2 \neq 0$, kita memperoleh

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \frac{ce^{-\int pdx}}{y_1^2}$$

Kemudian integralkan dan selesaikan untuk menentukan $y_2$ sehingga diperoleh penyelesaian bebas linier yang diinginkan.

## *PERSAMAAN TEREDUKSI ATAU HOMOGEN*

11. (a) Tentukan tiga penyelesaian bebas linier dari $(D^3 - 9D)y = 0$ dan (b) tuliskanlah penyelesaian umumnya.

(a) Andaikan $y = e^{mx}$ adalah suatu penyelesaian, m konstanta. Maka $(D^3 - 9D)e^{mx} = (m^3 - 9m)e^{mx}$ bernilai nol bilamana $m^3 - 9m = 0$, yaitu $m(m - 3)(m + 3) = 0$ atau $m = 0, 3, -3$.

Maka $e^{0x} = 1$, $e^{3x}$, $e^{-3x}$ adalah penyelesaiannya. Determinan Wronskinya adalah

$$\begin{vmatrix} 1 & e^{3x} & e^{-3x} \\ 0 & 3e^{3x} & -3e^{-3x} \\ 0 & 9e^{3x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3e^{3x} & -3e^{-3x} \\ 9e^{3x} & 93^{-3x} \end{vmatrix} = 54$$

sehingga fungsi-fungsi tersebut bebas linier berdasarkan Teorema 3–2.

(b) Penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^{0x} + c_2e^{3x} + c_3e^{-3x} = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-3x}$.

12. Selesaikanlah (a) $2y'' - 5y' + 2y = 0$. (b) $(2D^3 - D^2 - 5D - 2)y = 0$.

(a) Persamaan karakteristiknya adalah $2m^2 - 5m + 2 = 0$ atau $(2m - 1)(m - 2) = 0$ sehingga $m = 1/2,2$.
Maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^{x/2} + c_2e^{2x}$.

(b) Persamaan karakteristiknya adalah $2m^3 - m^2 - 5m - 2 = 0$ atau $(2m + 1)(m + 1)(m - 2) = 0$ sehingga $m = -1/2, -1,2$. Maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}$.

13. Selesaikanlah $y'' + 9y = 0$ atau $(D^2 + 9)y = 0$.

Persamaan karakteristiknya adalah $m^2 + 9 = 0$, dan $m = \pm 3i$. Maka penyelesaian umumnya adalah $y = Ae^{3ix} + Be^{-3ix} = A(\cos 3x + i \sin 3x) + B(\cos 3x - i \sin 3x)$ yang dapat ditulis sebagai $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$. Karena cos 3x, sin 3x bebas linier, penyelesaian ini merupakan penyelesaian umum.

14. Selesaikanlah $(D^2 + 6D + 25)y = 0$.

Persamaan karakteristiknya adalah $m^2 + 6m + 25 = 0$, sehingga $m' = \dfrac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = \dfrac{-6 \pm 8i}{2} = -3 \pm 4i$. Maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = Ae^{(-3+4i)x} + Be^{(-3-4i)x} = e^{-3x}(Ae^{4ix} + Be^{-4ix}) = e^{-3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$$

15. Selesaikanlah $(D^4 - 16)y = 0$.

Persamaan karakteristiknya adalah $m^4 + 16 = 0$, atau $(m^2 + 4)(m^2 - 4) = 0$ yang mempunyai akar 2i, 2. Maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + c_3e^{2x} + c_4e^{-2x}$.

16. Selesaikanlah $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Persamaannya dapat ditulis sebagai $(D^2 - 8D + 16)y = 0$ atau $(D - 4)^2y = 0$. Persamaan karakteristiknya $(m - 1)^2 = 0$ mempunyai akar $m = 4,4$ sehingga $e^{4x}$, $e^{4x}$ adalah penyelesaian yang berkaitan untuk akar yang terulang itu. Tetapi kedua penyelesaian itu tak bebas linier sehingga kita tidak dapat mengatakan bahwa $y = c_1e^{4x} + c_2e^{4x}$ adalah penyelesaian umumnya karena penyelesaian itu dapat ditulis $(c_1 + c_2)e^{4x} = ce^{4x}$ yang hanya melibatkan satu konstanta sembarang. Di sini ada dua metode yang dapat digunakan untuk memperoleh penyelesaian umumnya.

**Metode 1.**

Tulislah persamaan yang diberikan sebagai $(D - 4)(D - 4)y = 0$ dan misalkan $(D - 4)y = Y_1$ sehingga $(D - 4)Y_1 = 0$ dan $Y_1 = A_1e^{4x}$. Jadi $(D - 4)y = A_1e^{4x}$. Selesaikan, dan kita memperoleh $y = (c_1 + c_2x)e^{4x}$.

Metode ini dinamakan metode penurunan orde (reduction of order), yang menggambarkan suatu prosedur umum untuk akar-akar berulang. Dengan menggunakan metode ini, jika 4 adalah akar yang berulang tiga kali, penyelesaian umumnya menjadi $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{4x}$.

**Metode 2.**

Karena satu penyelesaiannya, $y_1 = e^{4x}$ diketahui, kita dapat menggunakan Soal 10 untuk menentukan penyelesaian linier.

$$y_2 = e^{4x} \int \frac{e^{\int 8dx}}{(e^{4x})^2}\, dx = xe^{4x}$$

Maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} = (c_1 + c_2x)e^{4x}$.

17. Selesaikan $(D + 2)^3(D - 3)^4(D^2 + 2D + 5)y = 0$.

Persamaan karakteristiknya adalah $(m + 2)^3(m - 3)^4(m^2 + 2m + 5) = 0$ yang mempunyai akar $-2, -2, -2, 3, 3, 3, 3, -1 \pm 2i$. Maka penyelesaian umumnya adalah

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-2x} + c_4 + c_5x + c_6x^2 + c_7x^3)e^{3x} + e^{-x}(c_8 \cos 2x + c_9 \sin 2x).$$

## *PERSAMAAN TAK-HOMOGEN ATAU LENGKAP*
## *METODE KOEFISIEN TAK-TENTU*

18. Selesaikanlah $(D^2 + 2D + 4)y = 8x^2 + 12e^{-x}$.

Penyelesaian komplementernya adalah $e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3x} + c_2 \sin\sqrt{3x})$.

Untuk memperoleh suatu penyelesaian khususnya andaikan berkaitan dengan $8x^2$ dan $12e^{-x}$ penyelesaian coba-cobanya berturut-turut adalah $ax^2 + bx + c$ dan $de^{-x}$, karena tidak ada dari suku ini yang muncul pada penyelesaian komplementernya. Kemudian substitusikan $y = ax^2 + bx + c + de^{-x}$ dalam persamaan yang diberikan, kita memperoleh

$$4ax^2 + (4a + 4b)x + (2a + 2b + 4c) + 3de^{-x} + 8x^2 + 12e^{-x}$$

Samakan koefisien yang berkaitan pada kedua ruas persamaan,

$$4a + 8,\ 4a + 4b = 0, \qquad 2a + 2b + 4c + 0, \qquad 3d = 12$$

Maka $a = 2$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 4$ dan penyelesaian khususnya adalah $2x^2 - 2x + 4e^{-x}$
Jadi penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x) + 2x^2 - 2x + 4e^{-x}$$

19. Selesaikanlah Soal 3.18 jika suku 10 sin 3x ditambahkan pada ruas kanannya.

Berkaitan dengan suku yang ditambahkan, 10 sin 3x; kita mengandaikan penyelesaian coba-coba yang ditambahkan h cos 3x + k sin 3x, yang tidak muncul dalam penyelesaian komplementernya.
Dengan mensubstitusikan ini ke dalam persamaan $(D^2 + 2D + 4)y = 10 \sin 3x$,

$$(6k - 5h) \cos 3x - (5k + 6h) \sin 3x = 10 \sin 3x$$

Samakan koefisiennya,

$$6k - 5h = 0,\ 5k + 6h = -10$$

atau $h = -\frac{12}{61}$, $k = -\frac{10}{61}$. Maka penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{3x} + c_2 \sin\sqrt{3x}) + 2x^2 - 2x + 4e^{-x} - \frac{12}{61} \cos 3x - \frac{10}{61} \sin 3x$$

20. Selesaikanlah $(D^2 + 4)y = 8 \sin 2x$

Penyelesaian komplementernya adalah $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.
Untuk suatu penyelesaian khususnya, biasanya kita mengandaikan penyelesaian coba-coba $a \cos 2x + b \sin 2x$. Tetapi karena suku ini muncul dalam penyelesaian komplementernya, kita kalikan dengan x untuk memperoleh penyelesaian coba-coba $x(a \cos 2x + b \sin 2x)$. Kemudian substitusikan penyelesaian ini ke persamaan yang diberikan,

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x = 8 \sin 2x$$

sehingga $4a = 0$, $-4b = 8$ dan $a = 0$, $b = -2$. Maka penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - 2x \sin 2x$$

21. Selesaikanlah $(D^5 - 3D^4 + 3D^3 - D^2)y = x^2 + 2x + 3e^x$

Persamaan karakteristiknya adalah $m^5 - 3m^4 + 3m^3 - m^2 = 0$ atau $m^2(m - 1)^3 = 0$. Jadi $m = 0, 0, 1, 1, 1$ dan penyelesaian komplementernya adalah

$$c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^x$$

Berkaitan dengan suku banyak $x^2 + 2x$, normalnya kita mengandaikan penyelesaian coba-coba $ax^2 + bx + c$. Tetapi beberapa di antara suku ini muncul dalam penyelesaian komplementernya. Kalikan penyelesaian coba-coba ini dengan x sehingga menjadi $x(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx$, tetapi satu dari suku ini muncul juga dalam penyelesaian komplementernya. Akhirnya kalikan lagi dengan x dan diperoleh $ax^4 + bx^3 + cx^2$, kita lihat bahwa tidak ada lagi bentuk ini yang muncul dalam penyelesaian komplementernya, sehingga ini adalah penyelesaian coba-coba yang diperlukan.

Dengan cara yang sama, berkaitan dengan $3e^x$ biasanya kita mengandaikan penyelesaian coba-coba $de^x$. Tetapi karena suku ini dan juga $dxe^x$ dan $dx^2e^x$ muncul dalam penyelesaian komplementernya, maka kita harus menggunakan penyelesaian coba-coba $dx^3e^x$.

Jadi penyelesaian coba-coba yang diandaikan adalah $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx^3e^x$. substitusikan ini dalam persamaan yang diberikan, kita memperoleh

$$-12ax^2 + (72a - 6b)x + (18b - 72a - 2c) + 6de^x = x^2 + 2x + 3e^x$$

sehingga $a = -1/12$, $b = -4/3$, $c = -9$, $d = 1/2$ dan penyelesaian umumnya adalah

$$y = c_1 + c_2x + (c_3 + c_4x + c_5x^2)e^x + \frac{1}{2}x^3e^x - \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 9x^2$$

## PERSAMAAN TAKHOMOGEN ATAU LENGKAP METODE VARIASI PARAMETER

22. Selesaikanlah $y'' + y = \sec x$ atau $(D^2 + 1)y = \sec x$.

Penyelesaian komplementernya adalah $c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Maka kita mengandaikan penyelesaian umumnya berbentuk $y = K_1 \cos x + K_2 \sin x$ dimana $K_1$, $K_2$ adalah fungsi yang sesuai dengan perubahan x dan akan ditentukan. Pendiferensialannya memberikan

$$y' = -K_1 \sin x + K_2 \cos x + K'_1 \cos x + K'_2 \sin x \quad \text{.....(1)}$$

Karena ada dua fungsi, $K_1$ dan $K_2$, maka kita harus sampai pada dua syarat untuk menentukan keduanya. Tetapi salah satu syarat ini adalah persamaan differensialnya harus dipenuhi. Karena itu kita bebas untuk menentukan syarat kedua. Kita memilih syarat ini untuk menyederhanakan (1), namakanlah

$$K'_1 \cos x + K'_2 \sin x = 0 \quad \text{.....(2)}$$

Maka (1) menjadi $y' = -K_1 \sin x + K_2 \cos x$

Differensialkan lagi,

$$y'' = -K_1 \cos x - K_2 \sin x - K'_1 \sin x + K'_2 \cos x$$

Jadi $y'' + y = -K'_1 \sin x + K'_2 \cos x = \sec x$ .....(3)

Dari dua persamaan

$$K'_1 \cos x + K'_2 \sin x = 0$$
$$-K'_1 \sin x + K'_2 \cos x = \sec x$$

kita memperoleh $K'_1 = 1$ dan $K'_2 = -\tan x$. Jadi dengan mengintegralkannya, $K_1 = x + c_1$, $K_2 = -\ln \sec x + c_2$ dan penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \sin x - \cos x \ln \sec x$$

23. Selesaikanlah $(D^3 + 4D)y = 4 \cot 2x$.

Penyelesaian komplementernya adalah $c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$. Maka kita mengatur persamaan berikut untuk menentukan fungsi $K_1$, $K_2$, $K_3$ dalam penyelesaian umum.

$$y = K_1 + K_2 \cos 2x + K_3 \sin 2x$$

$$K'_1 + K'_2 \cos 2x + K'_3 \sin 2x = 0$$
$$0 - 2K'_2 \sin 2x + 2K'_3 \cos 2x = 0$$
$$0 - 4K'_2 \cos 2x - 4K'_3 \sin 2x = 4 \cot 2x$$

Selesaikan sistem ini, kita memperoleh $K'_1 = \cos 2x$, $K'_2 = -\cos^2 2x / \sin 2x$, $K'_3 = -\cos 2x$ sehingga $K_1 = {}^1/_2 \ln \sin 2x + c_1$, $K_2 = -{}^1/_2 \ln (\csc 2x - \cot 2x) - {}^1/_2 \cos 2x + c_2$, $K_3 = -{}^1/_2 \sin 2x + c_3$

Dari sini kita memperoleh penyelesaian umumnya

$$y = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x + {}^1/_2 \ln \sin 2x - {}^1/_2 \cos 2x \ln (\csc 2x - \cot 2x)$$

## *TEKNIK OPERATOR*

24. Selesaikanlah $\frac{1}{D-2}(e^{4x})$

**Metode 1.**

Misalkan $\frac{1}{D-2} e^{4x} = y$. Maka menurut definisinya, $(D-2)y = e^{4x}$ atau $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{4x}$. Selesaikanlah ini seperti suatu persamaan linier tingkat pertama dengan faktor pengintegralan $e^{-2x}$, kita memperoleh $y = {}^1/_2 e^{4x} + ce^{2x}$. Karena yang kita perhatikan hanya penyelesaian khususnya,

$$\frac{1}{D-2} e^{4x} = \frac{1}{2} e^{4x}$$

Metode 2 [gunakan rumus A, di halaman 81, kerjakan seperti dalam metode I].

$$\frac{1}{D-2} e^{4x} = e^{2x} \int e^{-2x} e^{4x}\, dx = e^{2x} \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{4x}$$

25. Tentukanlah $\frac{1}{(D+1)(D-2)}(3e^{-2x})$.

**Metode 1.**

$$\frac{1}{(D+1)(D-2)}(3e^{-2x}) = \frac{1}{D+1}\left[\frac{1}{D-2}(3e^{-2x})\right]$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[e^{2x} \int e^{-2x}(3e^{-2x})\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{D+1}\left[-{}^3/_4 e^{-2x}\right] = e^{-x} \int e^{x}(-{}^3/_4 e^{-2x}) dx = {}^3/_4 e^{-2x}$$

**Metode 2.** Gunakan pecahan bagian.

$$\frac{1}{(D+1)(D-2)}(3e^{-2x}) = \left[\frac{-{}^1/_3}{D+1} + \frac{{}^1/_3}{D-2}\right](3e^{-2x})$$

$$= \frac{1}{D+1}(e^{-2x}) + \frac{1}{D-2}(e^{-2x})$$
$$= -e^{-x}\int e^{x}(e^{-2x})\,dx + e^{2x}\int e^{-2x}(e^{-2x})dx = {}^{3}/_{4}e^{-2x}$$

26. (a) Buktikanlah bahwa $\frac{1}{\phi(D)}\,e^{px} + \frac{e^{px}}{\phi(p)}$ jika $\phi(p) \neq 0$.

(b) Tentukanlah penyelesaian umum $(D^2 - 3D + 2)y = e^{5x}$ dengan menggunakan hasil (a).

(a) Menurut definisinya, $\phi(D) = a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n$ dimana $a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstanta.

Maka

$$\phi(D)e^{px} = (a_0D^n + a_1D^{n-1} + \ldots + a_n)e^{px} = (a_0p^n + a_1p^{n-1} + \ldots + a_n)e^{px}$$
$$= \phi(p)e^{px}$$

Jadi jika $\phi(p) \neq 0$, maka $\frac{1}{\phi(D)}\,e^{px} = \frac{e^{p-}}{\phi(p)}$

(b) $\frac{1}{D^2 - 3D + 2}\,e^{5x} = \frac{1}{(5)^2 - 3(5) + 2}\,e^{5x} = \frac{e^{5x}}{12}$ menurut (a).

Karena penyelesaian komplementernya adalah $c_1e^x + c_2e^{2x}$, maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{e^{5x}}{12}$

27. (a) Buktikanlah bahwa $\frac{1}{\phi(D^2)}\cos(px + q) = \frac{\cos(px + q)}{\phi(-p^2)}$ Jika $\phi(-p^2) \neq 0$

(b) Tentukanlah penyelesaian umum dari $(D^2 + 1)^2y = \cos 2x$ dengan menggunakan hasil (a).

(a) $\phi(D^2) = a_0(D^2)^n + a_1(D^2)^{n-1} + \ldots + a_n$ sehingga

$$\phi(D^2)\cos(px + q) = [a_0(D^2)^n + a_1(D^2)^{n-1} + \ldots + a_n]\cos(px + q)$$
$$= [a_0(-p^2)^n + a_1(-p^2)^{n-1} + \ldots + a_n]\cos(px + q)$$
$$= \phi(-p^2)\cos(px + q)$$

Gunakan $D^2[\cos(px + q)] = -p^2\cos(px + q)$, $(D^2)^2\cos(px + q) = (-p^2)^2\cos(px + q)$, dan seterusnya.

Jadi jika $\phi(-p^2) \neq 0$, diperoleh hasil yang diinginkan.

(b) $\dfrac{1}{(D^2+1)^2}\cos 2x = \dfrac{1}{(-4+1)^2}\cos 2x = \dfrac{1}{9}\cos 2x$ menurut (a).

Karena penyelesaian komplementernya adalah $c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$, penyelesaian umum yang diinginkan adalah

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x(c_3 \cos x + c_4 \sin x) + \frac{1}{9}\cos 2x$$

28. Hitunglah $\dfrac{1}{D^3 + D^2 + 2D - 1}\cos 2x$

Kita dapat menunjukkan dengan metode yang sama seperti dalam Soal 27, yaitu $D^2$ secara formal dapat diganti oleh $-2^2 = -4$. Jadi

$$\frac{1}{D^3 + D^2 + 2D - 1}\cos 2x = \frac{1}{D(-4) - 4 + 2D - 1}\cos 2x = \frac{1}{2D+5}\cos 2x$$

$$= \frac{(2D-5)}{4D^2 - 25}\cos 2x = -\frac{(2D-5)}{4(-4) - 25}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{41}(2D - 5)\cos 2x = \frac{1}{41}(-4 \sin 2x - 5 \cos 2x)$$

29. Buktikanlah bahwa (a) $D^n[e^{px}R(x)] = e^{px}(D + p)^n R(x)$, (b) $\phi(D)\,[e^{px}R(x)] = e^{px}\phi(D + p)R(x)$, (c) $\dfrac{1}{\phi(D)}\,[e^{px}R(x)] = e^{px}\dfrac{1}{\phi(D+p)}R(x)$

(a) Gunakan induksi matematika. Hasil tersebut benar untuk $n = 1$, karena $D[e^{px}R(x) = e^{px}DR(x)] + pe^{px}R(x) = e^{px}(D + p)R(x)$. Andaikan hasil tersebut benar untuk $n = k$. Maka $D^k[e^{px}R(x) = e^{px}(D + p)^k R(x)$. Differensial kedua ruas,

$$D^{k+1}[e^{px}R(x)] = D[e^{px}(D + p)^k R(x)]$$

$$= e^{px}D(D + p)^k R(x) + pe^{px}(D + p)^k R(x)$$

$$= e^{px}[(D + p)^{k+1} R(x)]$$

Jadi jika hasil tersebut benar untuk $n = k$, ia benar pula untuk $n = k + 1$; tetapi karena ia juga benar untuk $n = 1$, maka hasil tersebut harus benar untuk $n = 1$, . . . dan untuk semua n.

(b) $\phi(D)\ [e^{px}R(x)] = a_0D^n[e^{px}R(x) + a_1D^{n-1}\ \{e^{px}R(x)] + \ldots + a_n$

$= e^{px}[a_0(D+p)^n + {}^{a1}(D+p)^{n-1} + \ldots + a_n]R(x)$

$= e^{px}\phi(D+p)R(x)$

(c) Misalkan $\dfrac{1}{\phi(D)}\ [\ e^{px}R(x)] = y$ sehingga $\phi(D)y = e^{px}R(x)$. Maka

$$\phi(D)[e^{px}(ye^{-px})] = e^{px}\phi(D+p)\ [ye^{-px}] = e^{px}R(x)$$

atau $\phi(D+p)[ye^{-px}] = R(x)$

sehingga $y\ e^{px}\ \dfrac{1}{\phi(D+p)}\ R(x)$

30. Selesaikanlah $(D^3 + D)y = e^{-2x}\cos 2x$.

Gunakan Soal 29,

$$\frac{1}{D^3+D}(e^{-2x}\cos 2x) = e^{-2x}\frac{1}{(D-2)^3+D-2}\cos 2x$$

$$= e^{-2x}\frac{1}{D^3-6D^2+13D-10}\cos 2x = e^{-2x}\frac{1}{-4D+24+13D-10}\cos 2x$$

$$= e^{-2x}\frac{1}{9D+14}\cos 2x = e^{-2x}\frac{9D-14}{81D^2-196}\cos 2x$$

$$= \frac{e^{-2x}}{81(-4)-196}(9D-14)\cos 2x = \frac{e^{-2x}}{260}(9\sin 2x + 7\cos 2x)$$

Karena penyelesaian komplementernya adalah $c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x$, penyelesaian yang diinginkan adalah

$$y = c_1 + c_2\cos x + c_3\sin x + \frac{e^{-2x}}{260}(9\sin 2x + 7\cos 2x)$$

31. Hitunglah $\dfrac{1}{2D^3 - D + 2}(x^3 - x)$

Dengan pembagian panjang dalam pangkat dari D yang semakin membesar,

$$\frac{1}{2D^3-D+2}(x^3-x) = \frac{1}{2-D+2D^3}(x^3-x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{D}{4} + \frac{D^2}{8} - \frac{7}{16}D^3 + \ldots\right)(x^3-x)$$

$$= {}^1/_2(x^3 - x) + {}^1/_4(3x^2 - 1) + {}^1/_8(6x) - {}^7/_{16}(6)$$

$$= {}^1/_2x^3 + {}^3/_4x^2 + {}^1/_4x - {}^{23}/_8$$

## PERSAMAAN CAUCHY ATAU EULER

32. Misalkan $D = d/dx$ dan $D_t = d/dt$. Buktikanlah bahwa jika $x = e^t$, maka

$$\text{(a) } xD = D_t, \quad \text{(b) } x^2D^2 = D_t(D_t - 1)$$

(a) $$Dy = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \Big/ e^t = e^{-t} \frac{dy}{dt} = e^{-t} D_t y$$

Maka $xDy = e^t Dy = D_t y$ or $xD = D_t$.

(b) $$D^2y = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{dt}\left(e^{-t} \frac{dy}{dt}\right) \Big/ \frac{dx}{dt} = e^{-2t}(D - Dt)y$$

Maka $x^2D^2y = e^{2t} D^2y = (D^2_t - D_t)y$ atau $x^2D^2 = D^2_t - D_t = D_t(D_t - 1)$.

33. Selesaikanlah $(x^2D^2 + xD - 4)y = x^3$.

Dengan transformasi $x = e^t$, persamaan tersebut menjadi

$$[D_t(D_t - 1) + D_t - 4]y = (e^t)^3 \text{ atau } (D^2_t - 4)y = e^{3t}$$

Maka penyelesaian umumnya adalah $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + {}^1/_5e^{3t} = c_1x^2 + c_2x^{-2} + {}^1/_5x^3$.

**Metode lain.**

Misalkan $y = x^p$ dalam persamaan komplementer $(x^2D^2 + xD - 4)y = 0$, kita memperoleh

$$p(p - 1)x^p + px^p - 4x^p = 0 \text{ atau } (p^2 - 4)x^p = 0, \text{ yaitu } = p = \pm 2.$$

Jadi $x^2$ dan $x^{-2}$ merupakan penyelesaian dan penyelesaian komplementernya adalah $y = K_1x^2 + K_2x^{-2}$.

Sekarang kita dapat menggunakan metode variasi parameter untuk menentukan penyelesaian yang diinginkan.

## KASUS DENGAN SATU PENYELESAIAN YANG DIKETAHUI

34. Selesaikanlah $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ diketahui bahwa $y = x$ adalah suatu penyelesaian.

Misalkan $y = xv$. Maka $y' = xv' + v$, $y'' = xv'' + 2v'$ dan persamaan yang diberikan menjadi

$$(1 - x^2)v'' + (2 - 4x^2)v' = 0 \text{ atau } \frac{dv'}{v'} + \frac{2 - 4x^2}{x(1 - x^2)}\,dx = 0$$

Integralnya memberikan $\int \frac{dv'}{v'} + \int \left( \frac{2}{x} - \frac{2x}{1 - x^2} \right) dx = c_1$

yaitu $$\ln v' + 2 \ln x + \ln (1 - x^2) = c_1$$

atau $$v' = \frac{c_2}{x^2(1 - x^2)} = c_2 \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1 - x^2} \right)$$

Maka $$v = c_2 \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1}{x} \right) + c_3$$

sehingga penyelesaian umumnya adalah

$$y = vx = c_2 \left( \frac{x}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} - 1 \right) + c_3 x$$

Kita dapat juga menggunakan hasil soal 10 untuk menyelesaikan persamaan tersebut.

## *REDUKSI KE BENTUK KANONIK*

35. Dengan memisalkan $y = uv$ dan memilih u yang sesuai, tentukanlah persamaan differensial yang berkaitan dengan $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ tanpa melibatkan suku turunan pertama tersebut.

Substitusikan $y = uv$ pada persamaan yang diberikan, kita memperoleh

$$uv'' + (2u' + pu)v' + (u'' + pu'' + qu)v = r \quad \text{.....(1)}$$

Misalkan $2u' + pu = 0$ sehingga $u = e^{-\int (p/2)dx}$. Maka (1) menjadi

$$v'' + (q - {}^1/_4p^2 - {}^1/_2p')v = re^{\int (p/2)dx} \quad \text{.....(2)}$$

seperti yang diinginkan. Persamaan (2) dinamakan bentuk kanonik dari persamaan yang diberikan.

36. Selesaikanlah $4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = 0$.

Bandingkan dengan Soal 35, $p = 1/x$, $q = (x^2 - 1)/4x^2$, $r = 0$. Maka bentuk kanoniknya adalah

$$v'' + {}^1/_4 v = 0 \text{ atau } v = c_1 \cos {}^1/_2 x + c_2 \sin {}^1/_2 x$$

Jadi $$y = ve^{-\int (p/2)dx} = \frac{c_1 \cos {}^1/_2 x + c_2 \sin {}^1/_2 x}{\sqrt{x}}$$

## *PERSAMAAN EKSAK*

37. Tunjukkan bahwa $[a_0(x)D^2 + a_1(x)D + a_2(x)y = R(x)$ eksak jika dan hanya jika kesamaan $a_0'' - a_1' + a_2 = 0$ berlaku.

Menurut definisi suatu persamaan eksak, maka ada fungsi $p_0(x)$, $p_1(x)$ sehingga

$$[a_0D^2 + a_1D + a_2]y = D(p_0D + p_1)y = [p_0D^2 + (p_0' + p_1)D + p_1']y$$

Maka kita memperoleh $\qquad a_0 = p_0, \quad a_1 = p_0' + p_1, \quad a_2 = p_1'$

Eliminasi $p_0$, $p_1$ dari 3 persamaan ini, kita memperoleh $a_0'' - a_1' + a_2 = 0$.

Sebaliknya jika $a_0'' - a_1' + a_2 = 0$, maka

$$[a_0D^2 + a_1D + a_2]y = [a_0D^2 + a_1D + a_1' - a_0'']y = D[a_0D + a_1 - a_0']y$$

dan persamaan ini eksak.

38. Selesaikanlah $(1 - x^2)y'' - 3xy' - y = 1$.

Bandingkan dengan Soal 37, $a_0 = 1 - x^2$, $a_1 = -3x$, $a_2 = -1$ dan $a''_0 - a'_1 + a_2 = 0$ sehingga persamaan tersebut eksak dan dapat ditulis sebagai

$$D[(1 - x_2)D - x]y = 1$$

Integralkan persamaan ini dan selesaikan persamaan differensial linier tingkat satu yang dihasilkan,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 - x^2} y = \frac{x + c_1}{1 - x^2}$$

kita memperoleh

$$y = c_1 \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{c_2}{\sqrt{1 - x^2}} - 1$$

## PEMFAKTORAN OPERATOR

39. (a) Tunjukkanlah bahwa operator $xD^2 + (2x + 3)D + 4 = (D + 2)(xD + 2)$.
(b) Gunakan (a) untuk menyelesaikan $xy'' + (2x + 3)y' + 4y = e^{2x}$.

(a) $(D + 2)(xD + 2y) = D(xDy + 2y) + 2(xDy + 2y)$
$= xD^2y + Dy + 2Dy + 2xDy + 4y = [xD^2 + (2x + 3)D + 4]y$

(b) Persamaan yang diberikan dapat ditulis $(D + 2)(xD + 2)y = e^{2x}$.
Misalkan $(xD + 2)y = Y$.
Maka $(D + 2)Y = e^{2x}$ dan $Y = {}^1/_4e^{2x} + c_1e^{-2x}$. Sekarang dengan menyelesaikan $(xD + 2)y = {}^1/_4e^{2x} + c_1e^{-2x}$, kita memperoleh

$$x^2y = {}^1/_4 \int xe^{2x}\,dx + c_1 \int xe^{-2x}\,dx + c^2 = {}^1/_8e^{2x}(x - {}^1/_2) - {}^1/_2c_1e^{-2x}(x + {}^1/_2) + c_2$$

## METODE DERET

40. Selesaikanlah Soal 36 dengan menggunakan metode Frobenius.

Misalkan $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\beta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^{k+\beta}$ di mana kita mendefinisikan $c_k = 0$ untuk $k < 0$.

Maka

$$y' = \sum (k + \beta)c_k x^{k+\beta-1}, \quad y'' = \sum (k + \beta)(k + \beta - 1)c_k x^{k+\beta-2}$$

tanpa menuliskan batas-batas jumlahnya. Jadi

$$4x^2y'' + 4xy' + (x^2 - 1)y = \sum 4(k + \beta)(k + \beta - 1)c_k x^{k+\beta} + \sum 4(k + \beta)c_k x^{k+\beta} + \sum c_k x^{k+\beta+2} - \sum c_k x^{k+\beta}$$

Untuk menyelesaikan penulisan deret di ruas kanan dalam suku-suku dari koefisien $x^{k+b}$, kita harus mengganti indeks jumlah k pada deret ketiga dengan $k - 2$ (perhatikan bahwa hal ini tidak mempengaruhi batas jumlah $-\infty$ dan $\infty$ dari indeks penjumlahannya). Maka deret pada ruas kanan dapat dituliskan

$$\sum[4(k + \beta)(k + \beta - 1)c_k + 4(k + \beta)c_k + c_{k-2} - c_k]x^{k+\beta} = \sum [\{4(k + \beta)^2 - 1\}c_k + c_{k-2}]x^{k+\beta}$$

Karena ini harus nol, maka setiap koefisiennya harus nol, sehingga

$$\{4(k + \beta)^2 - 1\}c_k + c_{k-2} = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

Misalkan k = 0, Kemudian karena $c_{-2} = 0$, (1) menjadi $(4\beta^2 - 1)c_0 = 0$ yang dinamakan persamaan indeks. Andaikan $c_0 \neq 0$, akibatnya $4\beta^2 - 1 = 0$, $\beta = \pm 1/2$. Kita mempunyai dua kasus, $\beta = 1/2, -1/2$ dan pertama kita memandang nila kecil $-1/2$.

Kasus 1, $\beta = -1/2$. Dalam kasus ini, (1) menjadi

$$\{4(k - 1/2)^2 - 1\}c_k + c_{k-2} = 0 \text{ atau } 4k(k - 1)c_k + c_{k-2} = 0 \quad \text{.....(2)}$$

Ambil k = 1, 2, 3, 4, . . . dalam (2), kita memperoleh

$$c_{-1} = 0,\ c_2 = \frac{-c_0}{4 \cdot 2 \cdot 1},\ c_3 = \frac{-c_1}{4 \cdot 3 \cdot 2},\ c_4 = \frac{-c_2}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{c_0}{4^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$c_5 = \frac{-c_3}{4 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{c_1}{4^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2},\ c_6 = \frac{-c_4}{4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{-c_0}{4^3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

dan dari sini jelaslah bahwa $c_0$ dan $c_1$ taktentu sedangkan $c_2, c_3, c_4, \ldots$ ditentukan sebagai suku-suku dari $c_0$ dan $c_1$ sebagai berikut :

$$c_2 = \frac{-c_0}{4 \cdot 2!},\ c_3 = \frac{-c_1}{4 \cdot 3!},\ c_4 = \frac{c_0}{4^2 \cdot 4!},\ c_5 = \frac{c_1}{4^2 \cdot 5!},\ c_6 = \frac{-c_0}{4^3 \cdot 6!}, \ldots$$

Maka penyelesaian yang berkaitan tersebut adalah

$$y = \sum c_k x^{k+\beta} = \sum c_k x^{k-1/2}$$

$$= c_0 \left( x^{-1/2} - \frac{x^{3/2}}{4 \cdot 2!} + \frac{x^{7/2}}{4^2 \cdot 4!} - \frac{x^{11/2}}{4^3 \cdot 6!} + \ldots \right)$$

$$+ c_1 \left( x^{1/2} - \frac{x^{5/2}}{4 \cdot 3!} + \frac{x^{9/2}}{4^2 \cdot 5!} - \ldots \right)$$

$$= \frac{c_0}{\sqrt{x}} \left( 1 - \frac{(x/2)^2}{2!} + \frac{(x/2)^4}{4!} - \frac{(x/2)^6}{6!} + \ldots \right)$$

$$+ \frac{2c_1}{\sqrt{x}} \left( (x/2) - \frac{(x/2)^3}{3!} + \frac{(x/2)^5}{5!} - \ldots \right)$$

$$= \frac{c_0 \cos (x/2) + 2c_1 \sin (x/2)}{\sqrt{x}}$$

yang ekivalen dengan penyelesaian Soal 36.

Perhatikan bahwa bentuk pesamaan ini kita tidak perlu memperhatikan Kasus 2. $\beta = 1/2$ karena kita telah siap memperoleh penyelesaian yang diinginkan. Perhatikan juga bahwa jika pertama kita memandang $\beta = 1/2$, kita tidak akan memperoleh penyelesaian umumnya. Ciri khas ini secara umum terjadi bilamana akar persamaan indeksnya berbeda dengan suatu bilangan bulat kecuali nol. dalam persamaan lain, kedua kasusnya harus diperhatikan, yang menghasilkan penyelesaian berbentuk deret. Penyelesaian umumnya kemudian diperoleh dari deret ini setelah mengalikan setiap deretnya dengan suatu konstanta sebarang dan menjumlahkannya.

## PERSAMAAN SIMULTAN

41. Selesaikanlah sistem persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + 3x = e^{-t}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3y = \sin 2t$$

Tulislah sistem ini sebagai

$$(D^2 + 3)x + Dy = e^{-t}, \quad -4Dx + (D^2 + 3)y = \sin 2t \quad \text{.....(1)}$$

**Model 1,** menggunakan determinan.

Aturan Cramer yang biasa untuk menyelesaikan persamaan linier dapat digunakan, dan kita memperoleh

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^{-t} & D \\ \sin 2t & D^2 + 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2 + 3 & D \\ -4D & D^2 + 3 \end{vmatrix}} = \frac{(D^2 + 3)(e^{-t}) - D(\sin 2t)}{D^4 + 10D^2 + 9} = \frac{4e^{-t} - 2\cos 2t}{(D^2 + 1)(D^2 + 9)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D^2 + 3 & e^{-t} \\ -4D & \sin 2t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D^2 + 3 & D \\ -4D & D^2 + 3 \end{vmatrix}} = \frac{(D^2 + 3)(\sin 2t) - (-4D)(e^{-t})}{D^4 + 10D^2 + 9} = \frac{-\sin 2t - 4e^{-t}}{(D^2 + 1)(D^2 + 9)}$$

di mana kita menghitung determinannya sehingga operator-operator dituliskan di depan fungsi.

Perhatikan bahwa hasil tersebut ekivalen dengan

$$(D^2 + 1)(D^2 + 9)x = 4e^{-t} - 2\cos 2t, \quad (D^2 + 1)(D^2 + 9)y = -\sin 2t - 4e^{-t}$$

Selesaikan persamaan ini, kita memperoleh

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t + {}^1/_5 e^{-t} + {}^2/_{15} \cos 2t$$

$$y = c_5 \cos t + c_6 \sin t + c_7 \cos 3t + c_8 \sin 3t - {}^1/_5 e^{-t} + {}^1/_{15} \sin 2t$$

Kita dapat menunjukkan bahwa semua konstanta sembarang pada penyelesaian tersebut sama dengan derajat suku banyak dalam d yang diperoleh dari determinan.

$$\begin{vmatrix} D^2 + 3 & D \\ -4D & D^2 + 3 \end{vmatrix} = D^4 + 10D^2 + 9$$

yaitu 4. Jadi ada hubungan di antara konstanta $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ dan $c_5$, $c_6$ $c_7$, $c_8$. Untuk menentukan hubungan ini kita harus memasukkan nilai x dan y yang diperoleh di atas ke dalam persamaan asalnya.
Bilamana kita kita melakukan ini, diperoleh

$$c_5 = 2c_2, \quad c_6 = -2c_1, \quad c_7 = -2c_4, \quad c_8 = 2c_3$$

Jadi penyelesaian yang diinginkan adalah

$$x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 3t + c_4 \sin 3t + {}^1/_5 e^{-t} + {}^2/_{15} \cos 2t$$
$$y = 2c_2 \cos t - 2c_1 \sin t - 2c_4 \cos 3t + 2c_3 \sin 3t - {}^1/_5 e^{-t} + {}^1/_{15} \sin 2t$$

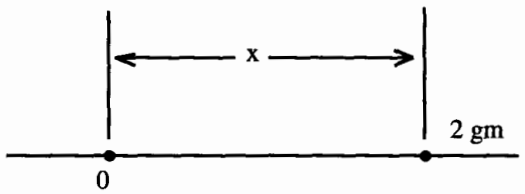
**Metode 2.**

Kita dapat juga mengeliminasikan salah satu peubahnya, seperti x; dan mengoperasikannya pada persamaan pertama dari (1) dengan 4D, persamaan kedua dengan $D^2 + 3$ dan menjumlahkannya. Untuk menyelesaikan persamaan yang dihasilkan, kita dapat menggunakan metode koefisien taktentu.

## *PENERAPAN*

42. Suatu partikel P bermassa 2 (gram) bergerak pada sumbu x ke arah titik (0) dengan suatu gaya yang secara numerik besarnya 8x. Bilamana pada saat awal x = 10 (cm), tentukanlah posisinya pada setiap saat dengan pengandaian (a) tidak ada gaya lain yang bekerja padanya, (b) ada gaya redaman yang secara numerik sama dengan 8 kali kecepatan sesaatnya.

(a) Pilihan arah positif ke kanan. [Lihat Gambar 4-1]. Bilamana $x > 0$, gaya totalnya berarah ke kiri (negatif), sehingga besarnya $-8x$. Bilamana $x < 0$, gaya totalnya berarah ke kanan [positif] dan besarnya juga $-8x$. Jadi berdasarkan Hukum Newton,

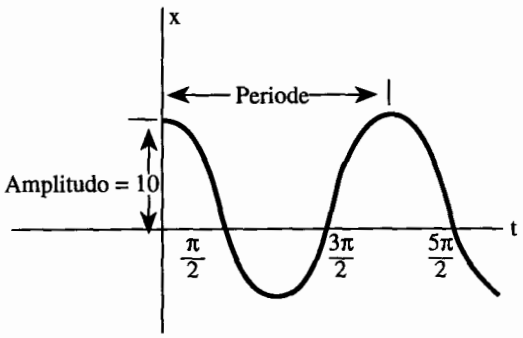



*Gambar 4-1*

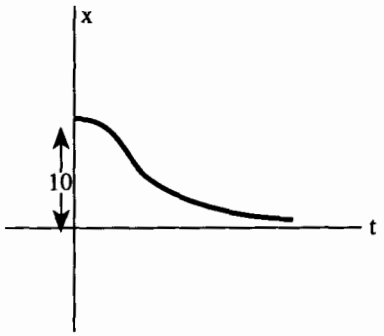
$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -8x \text{ atau } \frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0 \quad \text{dan } x = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$$

Karena $x = 10$, $dx/dt = 0$ pada $t = 0$, kita memperoleh $x = 10 \cos 2t$.

Grafik gerakan ini dapat dilihat pada Gambar 4-2. Amplitudonya [perpindahan terbesarnya dari titik O] adalah 10 (cm). Periodenya (waktu untuk satu siklus lengkap) adalah $\pi$ (detik). Frekuensinya [banyaknya siklus per detik] adalah $1/\pi$ (siklus per detik). Gerakan ini seringkali dinamakan gerakan harmonis sederhana.




*Gambar 3-2*




*Gambar 3-3*

(b) Gaya redaman yang diberikan adalah $-8\,dx/dt$, bergantung pada letak partikel. Jadi, sebagai contoh misalnya $x < 0$ dan $dx/dt > 0$, maka partikel tersebut berada di sebelah kiri 0 dan bergerak ke kanan sehingga gaya redamannya harus ke kiri, yaitu negatif. Menurut Hukum Newton,

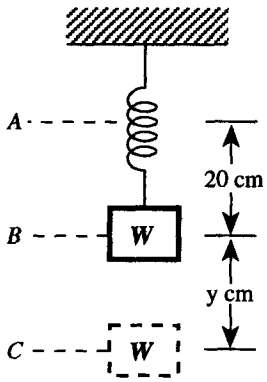
$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -8x - 8\frac{dx}{dt} \quad \text{atau} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

yang mempunyai penyelesaian umum $x = 2^{-2t}(c_1 + c_2 t)$. Karena $x = 10$, $dx/dt = 0$ bilamana $t = 0$, maka $c_1 = 10$, $c_2 = 20$ sehingga $x = 10e^{-2t}(1 + 2t)$. Gerakan ini tidak berosilasi. Partikel tersebut mendekati O tetapi tidak pernah mencapainya [lihat Gambar 4-3].

43. Suatu benda 20 kg digantung pada ujung pegas vertikal sehingga pegasnya meregang 20 cm. Andaikan tidak ada gaya luar, tentukanlah posisi benda itu pada setiap saat bilamana pada awalnya benda tersebut (a) ditarik ke bawah 10 cm dan dilepaskan, (b) ditarik ke bawah 15 cm dan diberikan kecepatan awal 106 cm/detik ke bawah. Pada setiap kasus, tentukan juga periode dan amplitudonya.

Misalkan A dan B [Gambar 4-4] menyatakan posisi akhir pegas sebelum dan sesudah benda W ditarik. B dinamakan posisi seimbang (equilibrium position). Namakan y perpindahan W pada suatu posisi c dari posisi seimbangan. andaikan

bahwa y positif dalam arah ke bawah.




*Gambar 4-4*

Menurut Hukum Hooke, 20 kg meregangkan pegas sepanjang 20 cm, 1 kg meregangkannya 1 cm sehingga (20 + y) kg meregangkannya (20 + y) cm. Jadi bilamana w terletak di c, tegangan pada pegas adalah (20 + y) kg.

Menurut Hukum Newton,

Massa Percepatan = Gaya total pada W
= Berat ke bawah − Tegangan pegas ke atas

atau $\frac{20}{980}\frac{d^2y}{dt^2}$ = 20 − (20 + y)

yang menjadi $\frac{d^2y}{dt^2} + 49y = 0$ atau $y = c_1 \cos 7t + c_2 \sin 7t$

(a) Karena y = 10 cm, dy/dt = 0 pada t = 0; kita memperoleh $c_1 = 10$ dan $c_2 = 0$ sehingga y = 10 cos 7t. Amplitudonya 10 cm dan periodenya $2\pi/7$ detik.

(b) Karena y = 15 cm, dy/dt = 105 cm/detik, $c_1 = 15$, $c_2 = 15$ dan

$$y = 15 \cos 7t + 15 \sin 7t = \sqrt{15^2 + 15^2} \sin\left(7t + \frac{\pi}{4}\right) = 15\sqrt{2}\sin\left(7t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Maka amplitudonya $15\sqrt{2}$ = 21,2 cm (pendekatan) dan periodenya $2\pi/7$ detik.

44. Selesaikanlah Soal 43 bila ke dalam perhitungannya dimasukkan gaya redaman luar $\beta v$ (dalam kilogram) di mana v kecepatan sesaat dalam cm/detik dan (a) $\beta = 1/7$, (b) $\beta = 2/7$, (c) $\beta = 4/7$.

Persamaan gerak dengan gaya redaman $\beta v = \beta\, dy/dt$ adalah

$$\frac{1}{49}\frac{d^2y}{dt^2} = -y - \beta\frac{dy}{dt} \quad \text{atau} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 49\beta\frac{dy}{dt} + 49y = 0$$

(a) Jika $\beta = 1/7$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 7\dfrac{dy}{dt} + 49y = 0$.

Selesaikan terhadap syarat $y = 10$, $dy/dt = 0$ pada $t = 0$, kita memperoleh

$$y = \frac{10}{\sqrt{3}}e^{-3,5t}\left(\sqrt{3}\cos\frac{7\sqrt{3}}{2} + \sin\frac{7\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{20}{\sqrt{3}}e^{-3,5t}\sin\left(\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{3}\right)$$

Gerakan ini berosilasi teredam (dampet oscillatory) dengan periode

$$2\pi/\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\right) = 4\pi'(7\sqrt{3})$$

atau 1,04 detik

(b) Jika $\beta = 2/7$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 14\dfrac{dy}{dt} + 49y = 0$.

Selesaikan terhadap syarat seperti pada (a), $y = 10e^{-7t}(1 + 7t)$. Gerakan ini dinamakan teredam kritis (critically dampet) karena untuk nilai lebih kecil dari $\beta$ akan menghasilkan gerakan berosilasi.

(c) Jika $\beta = 4/7$, $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 28\dfrac{dy}{dt} + 49y = 0$

dan kita memperoleh $10{,}77e^{-0,88t} - 0{,}77e^{-27,12t}$. Gerakan ini dinamakan terlalu teredam (overdamped).

45. (a) Kerjakan Soal 43 (a) jika suatu gaya luar diberikan oleh $F(t) = 20 \cos 7t$ digunakan untuk $t > 0$ dan (b) berikan suatu tafsiran fisis apakah yang akan terjadi bilamana t membesar.

(a) Persamaan gerak dalam kasus ini menjadi

$$\frac{20}{980}\frac{d^2y}{dt^2} = 20 - (20 + y) + 20\cos 7t$$

atau

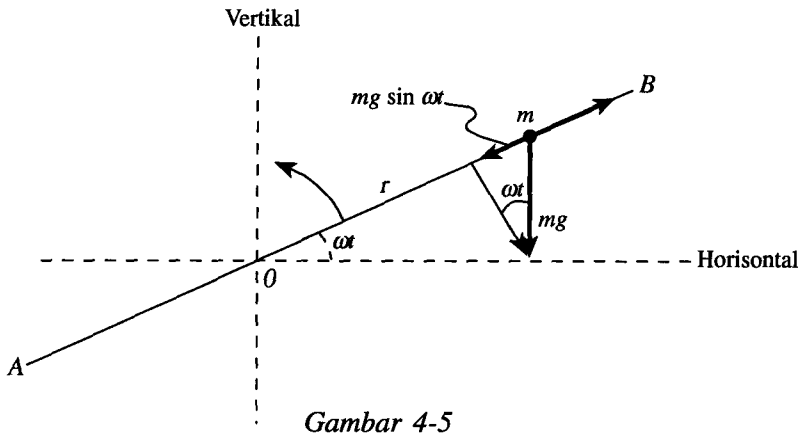
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 49y = 980\cos 7t$$

Penyelesaian persamaan ini terhadap syarat $y = 10$, $dy/dt = 0$ pada $t = 0$ adalah

$$y = 10\cos 7t + 70t\sin 7t$$

(b) Bilamana t membesar, suku 70t sin 7t membesar tanpa batas secara numerik dan secara fisis berarti pegas akan patah. Ini menggambarkan fenomena resonansi dan menunjukkan apa yang terjadi bilamana frekuensi dari gaya yang digunakan sama dengan frekuensi alami sistem tersebut.

46. Suatu batang AOB [lihat Gambar 4-5 di bawah] diputar pada suatu bidang tegak di sekitar titik O dengan kecepatan sudut tetap ω. Suatu partikel P bermassa m dikendalikan untuk bergerak sepanjang batang tersebut. andaikan tidak ada gaya gesek, tentukanlah (a) suatu persamaan differensial gerakan P, (b) posisi P pada suatu saat dan (c) syarat agar P menghasilkan gerakan harmonis sederhana.




*Gambar 4-5*

(a) Misalkan r jarak dari P ke O pada saat t dan andaikan bahwa batang itu mendatar pada saat t = 0.
Kita mempunyai

$$\text{Gaya total di P} = \text{Gaya sentrifugal} + \text{Komponen gaya berat}$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = m\omega^2 r - mg\sin\omega t$$

atau
$$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = -g\sin\omega t \qquad \text{.....(1)}$$

di mana $r = r_0$, $dr/dt = v_0$ pada $t = 0$ .....(2)

yaitu $r_0$ dan $v_0$ adalah perpindahan awal dan kecepatan P.

(b) Selesaikan (1) terhadap syarat (2), kita memperoleh

$$r = \left(\frac{r_0}{2} + \frac{v_0}{2\omega} - \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{\omega t} + \left(\frac{r_0}{2} - \frac{v_0}{2\omega} + \frac{g}{4\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g\sin\omega t}{2\omega^2}$$

(c) Gerakan harmonis sederhana sepanjang batang terjadi jika dan hanya jika

$$r_0 = 0 \text{ dan } v_0 = g/2\omega.$$

47. Suatu induktor 2 henry, resistor 16 ohm dan kapasitor 0,02 farad dihubungkan secara seri dengan suatu baterai dengan ggl.E = 100 sin 3t. Pada t = 0 muatan dalam kapasitor dan arus dalam rangkaian adalah nol. Tentukanlah (a) muatan dan (b) arus pada $t > 0$.

Misalkan Q dan I menyatakan muatan dan arus sesaat pada waktu t; berdasarkan Hukum Kirchoff kita memperoleh

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = 100 \sin 3t$$

atau karena $I = dQ/dt$,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \sin 3t$$

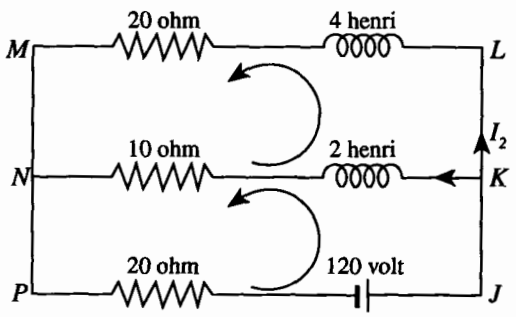
Selesaikan ini terhadap syarat $Q = 0$, $dQ/dt = 0$ pada $t = 0$, kita memperoleh

(a) $$Q = \frac{25}{52}(2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52} e^{-4t}(3 \cos 3t + 2 \sin 3t)$$

(b) $$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52} e^{-4t}(17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$$

Suku pertama adalah arus tunak (steady-state) dan kedua, yang dapat diabaikan untuk waktu yang bertambah, dinamakan arus transien.

48. Diberikan jaringan listrik pada Gambar 4-6. Tentukanlah arus dalam berbagai cabang jika arus awalnya nol.




*Gambar 4-6*

Hukum Kirchoff kedua menyatakan bahwa jumlah aljabar tegangan jatuh (voltage drap) sepanjang suatu simpal (loop) tertutup adalah nol. Misalkan kita menjalani simpal KLMNK dan JKNPJ berlawanan arah putaran jarum jam seperti ditunjukkan pada gambar. Dalam menjalani simpal ini kita mengandaikan tegangan jatuh positif bilamana kita bergerak berlawanan arah daya arus tersebut. Kenaikan tegangan dipandang sebagai negatif dari tegangan jatuh.

Misalkan I adalah arus pada NPJKN. Arus ini terbagi pada titik cabang K ke dalam $I_1$ dan $I_2$ sehingga $I = I_1 + I_2$. Hal ini ekivalen dengan Hukum Kirchoff pertama.

Gunakan Hukum Kirchoff kedua pada loop JKNPJ dan KLMNK, kita memperoleh

$$20I - 120 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 = 0 \qquad \text{.....(1)}$$

$$-10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

Ambil $I = I_1 + I_2$ dan gunakan operator $D = d/dt$, ini menjadi

$$(D + 15)I_1 + 10I_2 = 60 \qquad \text{.....(3)}$$

$$-(D + 5)I_1 + (2D + 10)I_2 = 0 \qquad \text{.....(4)}$$

Selesaikan ini terhadap syarat $I_1 = I_2 = 0$ pada $t = 0$, kita memperoleh

$$I_1 = 3\,(1 - e^{-20t}),\quad I_2 = {}^3/_2\,(1 - e^{-20t}),\quad I = {}^9/_2\,(1 - e^{-20t})$$

## 4.6. SOAL LATIHAN

### OPERATOR

1. Tulislah setiap persamaan berikut ini dalam bentuk operator : (a) $y'' + 4y' + 5y = e^{-x}$, (b) $2y'' = x - 2y' + y$, (c) $xy' + 2y = 1$.

2. (a) Hitunglah $(D^3 + 1)\sin 2x$ dan $(D + 1)(D^2 - D + 1)\sin 2x$. (b) Apakah operator $D^3 + 1$ dan $(D + 1)(D^2 - D + 1)$ ekivalen? Jelaskan.

3. (a) Hitunglah $(xD - 3)(D + 2)\{x^2 + x - 4\}$ dan $(D + 2)(xD - 3)\{x^2 + x - 4\}$. (b) Apakah operator $(xD - 3)(D + 2)$ dan $(D + 2)(xD - 3)$ ekivalen? Jelaskan.

4. (a) Hitunglah $(xD)(xD)\{x^2 + 2e^x\}$ yang dapat ditulis sebagai $(xD)^2\{x^2 + 2e^x\}$. (b) Apakah ini sama dengan $x^3D^3\{x^2 + 2e^x\}$? (c) Apakah operator $(xD)^3$ dan $x^3D^3$ ekivalen? Jelaskan.

5. Dengan syarat apakah operator $(D + a)(D + b)$ dan $(D + b)(D + a)$ ekivalen? Jelaskan.

## KETAKBEBASAN LINIER DAN DETERMINAN WRONSKI

6. (a) Tunjukkanlah bahwa fungsi $x^2$, $3x + 2$, $x - 1$, $2x + 5$ takbebas linier (b) Apakah fungsi $x^2$, $3x + 2$, $x - 1$ takbebas linier?

7. Selidiki ketakbebasan linier dari $e^x$, $xe^x$, $x^2e^x$.

8. Tunjukkanlah bahwa $y = x$ adalah penyelesaian dari $xy'' + xy' - y = 0$ dan tentukan penyelesaian umumnya.

9. Jika $y_1$ adalah penyelesaian dari $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, jelaskanlah bagaimana menentukan penyelesaian umumnya. Berikan ilustrasinya dengan suatu contoh.

## PENYELESAIAN TEREDUKSI ATAU HOMOGEN

10. (a) Tentukanlah tiga penyelesaian bebas linier dari $(D + 2)(D - 1)(D - 3)y = 0$ dan (b) tuliskan penyelesaian umumnya.

11. Selesaikanlah (a) $y'' + 8y' + 12y = 0$, (b) $(D^2 - 4D - 1)\, y = 0$.

12. Selesaikanlah (a) $(D^2 + 25)y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$, (b) $y'' - 8y' + 20y = 0$, (c) $(D^3 + 8)y = 0$.

13. Selesaikanlah
    (a) $y'' + 4y' + 4y = 0$
    (b) $16y'' - 8y' + y = 0$
    (c) $(D + 6)^4(D - 3)^2y = 0$
    (d) $(D^8 + D^6)y = 0$
    (e) $(D^3 + 64)^2y = 0$

14. Selesaikanlah $D^4(D + 1)^2(D^2 + 4D + 5)^2(D^2 + 4)y = 0$.

## PERSAMAAN LENGKAP ATAU TAKHOMOGEN

15. Selesaikanlah (a) $y'' - 5y' + 6y = 50 \sin 4x$, (b) $(D^3 - 8)y = 16x + 18e^{-x} + 64 \cos 2x - 32$.

16. Selesaikanlah (a) $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-2x}$, (b) $(D^3 + 3D^2)y = 180x^3 + 24x$.

17. Selesaikanlah $(D^6 - 2D^5 + D^4)y = 120x + 8e^x$.

18. Selesaikanlah dengan menggunakan metode variasi parameter.

(a) $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}$
(b) $y'' + 4y = \csc 2x$
(c) $xy'' - y' = x$
(d) $(D^3 + D)y = 4 \tan x$

## TEKNIK OPERATOR

19. Hitunglah setiap soal berikut

(a) $\frac{1}{D+3}\{e^{-2x}\}$
(b) $\frac{1}{D^2 + D - 12}\{9e^{5x} - 4e^{-x}\}$
(c) $\frac{1}{(D+1)^2}\{4 \sin 2x + 3 \cos 2x\}$
(d) $\frac{D-1}{D^4 + D^2 + 1}\{8 \cos x\}$
(e) $\frac{1}{(D-4)^5}\{xe^{4x}\}$
(f) $\frac{1}{D^2 - 4}\{16x^3\}$
(g) $\frac{1}{D^2 + D - 2}\{x^2e^{2x}\}$
(h) $\frac{1}{D^2 - 1}\{e^x(\sin x + \cos x)\}$
(i) $\frac{1}{D^3 + D^2 + d}\{3x^4 - 2 \sin x\}$
(j) $\frac{1}{(D-4)(D+3)(D+1)}\{e^{-2x} \cos 2x\}$

20. Selesaikanlah dengan menggunakan teknik operator :
(a) $(D^2 + 4D + 4)y = 18e^x - 8 \sin 2x$, (b) $(D + 1)(D - 3)y = e^{3x} + x^2$,
(c) $(D + 2)^2(D - 2)y = e^{-2x} \cos x$.

21. Buktikanlah jajaran (a) A, (b) B, (c) E, (d) H pada tabel di halaman 114

## PERSAMAAN CAUCHY ATAU EULER

22. Selesaikanlah
(a) $x^2y'' + xy' \lambda^2y = 0$
(b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3$
(c) $(2x^2D^2 + 5xD + 1)y = \ln x$
(d) $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' + 8y = 7x^{-1/2}$
(e) $r^2R'' + 2rR'' - n(n + 1)R = 0$

## BERBAGAI METODE LAINNYA

23. (a) Tunjukkanlah bahwa $(xD^2 - xD + 1) = (D - 1)(xD - 1)$.
(b) Kemudian selesaikanlah $xy'' - xy' + y = x^2$.

24. Kerjakanlah soal 71 (b) dengan mengingat bahwa $y = x$ adalah suatu penyelesaian persamaan homogennya dan misalkan $y = vx$.

25. Selesaikan $y'' + 2xy' + x^2y = 0$ dengan mereduksikan persamaannya ke bentuk kanonik.

26. Tunjukkanlah bahwa $xy'' + (x + 2)y' + y = 0$ eksak dan tentukan penyelesaiannya.

27. Gunakanlah metode Frobenius untuk menyelesaikan persamaan
(a) $y'' + y = 0$, (b) $xy'' - 2y' + xy = 0$, (c) $y'' = xy$.

## PERSAMAAN SIMULTAN

28. Selesaikanlah sistem $\frac{dx}{dt} + y = e^t$, $x - \frac{xy}{dt} = t$

29. Selesaikanlah sistem

$$\frac{dx}{dt} + 2x = \frac{dy}{dt} + 10 \cos t, \quad \frac{dy}{dt} + 2y = 4e^{-2t} - \frac{dx}{dt}$$

jika $x = 2$, $y = 0$ bilamana $t = 0$.

30. Selesaikanlah sistem $(D^2 + 2)x + Dy = 2 \sin t + 3 \cos t + 5e^{-t}$, $Dx + (D^2 - 1)y = 3 \cos t - 5 \sin t - e^{-t}$ jika $x = 2$, $y = -3$, $Dx = 0$, $dy = 4$ bilamana $t = 0$.

31. Selesaikanlah
$\frac{dx}{dt} = 2x + y$, $\frac{dy}{dt} = y + 6e^{-t}$, $\frac{dz}{dt} = 2 \sin t + x$ jika $x = y = z = 0$ pada $t = 0$

## PENERAPAN

32. Suatu partikel bergerak sepanjang sumbu x menuju titik O dengan gaya yang sebanding terhadap jaraknya dari O. Jika partikel tersebut bergerak mulai dari keadaan berhenti pada $x = 5$ cm dan sampai pada $x = 2{,}5$ cm setelah 2 detik, tentukanlah (a) posisi pada suatu saat t sesudah partikel itu bergerak, (b) arah kecepatannya pada $x = 0$, (c) amplitudo, periode dan frekuensi sebarannya dan (d) percepatan sesaatnya.

33. Posisi suatu partikel yang bergerak sepanjang sumbu x ditentukan oleh persamaan

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 20 \cos 2t.$$

Jika partikel bergerak dari keadaan diam pada $x = 0$, tentukanlah (a) x sebagai fungsi dari t, (b) amplitudo, periode dan frekuensinya setelah suatu waktu yang panjang.

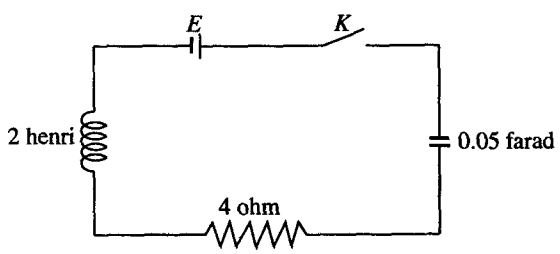
34. Suatu benda seberat 7 kg digantung pada suatu pegas tegak dan meregangnya 5 cm. Benda tersebut ditarik ke bawah 10 cm dan dilepaskan. (a) Tentukanlah posisi benda itu pada suatu saat jika gaya redamannya secara numerik sama dengan 0,2 kali kecepatan sesaat yang bekerja padanya. (b) Apakah gerakan ini berosilasi, terlalu teredam atau teredam kritis?

35. Berat pada suatu pegas tegak memperoleh gaya vibrasi sesuai dengan persamaan

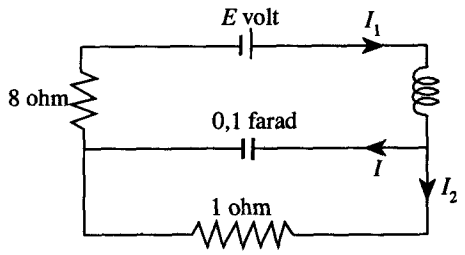
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 8 \sin \omega t$$

di mana x perpindahan dari posisi seimbang dan $\omega > 0$ konstanta. Jika $x = dx/dt = 0$ bilamana $t = 0$, tentukanlah (a) x sebagai fungsi dari t, (b) periode dari gaya luar yang menyebabkan terjadinya resonansi.

36. Muatan pada suatu kapasitor dalam jaringan pada Gambar 4-7 adalah 2 coulomb. Jika sakelar K ditutup pada saat $t = 0$, tentukanlah muatan dan arus pada saat $t > 0$ bila (a) $E = 100$ volt, (b) $E = 100 \sin 4t$.




Gambar 4-7




Gambar 4-8

37. Tentukanlah arus I, $I_1$ dan $I_2$ dalam jaringan pada Gambar 4-8 dan juga muatan Q dari kapasitornya jika (a) $E = 360$, (b) $E = 600e^{-5t} \sin 3t$. Andaikan muatan dan arusnya nol pada saat $t = 0$.

## JAWABAN SOAL LATIHAN

1. (a) $(D^2 + 4D + 5)y = e^{-x}$, (b) $(2D^3 + 2D - 1)y = x$, (c) $(xD + 2)y = 1$

2. (a) Keduanya sama dengan $\sin 2x - 8 \cos 2x$. (b) Ya

3. (a) $-2x^2 - 8x + 21$, $-2x^2 - 6x + 22$, (b) Tidak

4. (a) $8x^2 + 2x^3e^x + 6x^2e^x + 2xe^x$

7. Fungsi-fungsinya bebas linier

8. $y = c_1x + c_2x \int \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx$

10. (b) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{x} + c_3e^{3x}$

11. (a) $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-6x}$, (b) $y = e^{2x}(c_1e^{\sqrt{5}x} + c_2e^{-\sqrt{5}x})$

12. (a) $y = 2\cos 5x - \sin 5x$, (b) $y = e^{4x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$
    (c) $y = c_1e^{-2x} + e^{x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x)$

13. (a) $y = (c_1 + c_2x)e^{-2x}$, (b) $(c_1 + c_2x)e^{x/4}$
    (c) $y = (c_1 + c_2 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3)e^{-6x} + (c_5 + c^6x)e^{3x}$
    (d) $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6x^5 + c_7 \cos x + c_8 \sin x$
    (e) $y = (c_1 + c_2x)e^{-4x} + e^{4x}(c_3 \cos 4x + c_4 \sin 4x) + xe^{4x}(c_5 \cos 4x + c_6 \sin 4x)$

14. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + (c_5 + c^6x)e^{-x} + e^{-2x}(c_7 \cos x + c_8 \sin x)$
    $+ xe^{-2x}(c_9 \cos x + c_{10} \sin x) + c_{11} \cos 2x + c_{12} \sin 2x$

15. (a) $y = c_1e^2x + c_2e^3x + 2\cos 4x - \sin 4x$
    (b) $y = c_1e^2x + e^{-x}(c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x) - 2x + 4 - 2e^{-x} - 4\cos 2x - 4\sin 2x$

16. (a) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} - 4xe^{-2x}$
    (b) $y = c_1e^{-3x} + c_2 + c_3x - 8x^2 + 8x^3 - 5x^4 + 3x^5$

17. $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + (c_5 + c_6x)e^{x} + x^5 + 4x^2e^{x}$

18. (a) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{x} - {}^1/_4xe^{-x}$
    (b) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - {}^1/_2x \cos 2x - {}^1/_4 \sin 2x \ln \csc 2x$
    (c) $y = c_1 + c_2x^2 + {}^1/_2x^2(\ln x - {}^1/_2)$
    (d) $y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - 4 \cos x \ln (\sec x + \tan x)$

19. (a) $e^{-2x}$
    (b) ${}^1/_2e^{5x} + {}^1/_3e^{-x}$
    (c) $-\cos 2x$
    (d) $-8(\sin x + \cos x)$
    (e) $\frac{x^6e^{4x}}{6!}$
    (f) $-4x^3 - 6x$
    (g) $\frac{e^{2x}}{32}(8x^2 - 20x + 21)$

(h) $^1/_5 e^x(\sin x - 3\cos x)$

(i) $^3/_5 x^5 - 3x^4 + 36x^2 - 72z + 2\sin x$

(j) $\dfrac{e^{-2x}}{100}(3\cos 2x - \sin 2x)$

20. (a) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + 2e^x + \cos 2x$

(b) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{4}xe^{3x} - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{4}{9}x - \dfrac{14}{27}$

(c) $y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + c_3 e^{2x} + \dfrac{e^{-2x}}{17}(4\cos x - \sin x)$

22. (a) $y = c_1 x^{\lambda} + c_2 x^{-\lambda}$,

(b) $y = c_1 x + c_2 x^2 + {}^1/_2 x^3$,

(c) $y = c_1 x + c_2 x^{-1/2} + \ln x - 3$

(d) $y = c_1 x^{-2} + x[c_2 \cos(\sqrt{3}\ln x) + c_3 \sin(\sqrt{3}\ln x)] + {}^8/_9 x^{-1/2}$

(e) $R = c_1 r^n + c_2/r^{n+1}$

23. $y = c_1 x + c_2 x \int \dfrac{e^x}{x^2}\,dx - x^2 - 2x\ln x + 2$

25. $y = e^{-x2/2}(c_1 e^x + c_2 e^{-x})$

26. $y = (c_1 + c_2 e^{-x})/x$

27. (a) $y = c_1\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots\right) + c_2\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots\right)$

$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$

(b) $y = c_1\left(x^{-1} + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^3}{4!} + \ldots\right) + c_2\left(1 + \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + \ldots\right)$

$= \dfrac{c_1 \cosh x + c_2 \sinh x}{x}$

(c) $y = c_1\left(1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{1 \cdot 4x^6}{6!} + \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7x^9}{9!} + \ldots\right)$

$+ c_2\left(x + \dfrac{2x^4}{4!} + \dfrac{2 \cdot 5x^7}{7!} + \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8x^{10}}{10!} + \ldots\right)$

28. $x = c_1 \cos t - c_2 \sin t + {}^1/_2 e^t + t, \quad y = c_1 \sin t + c_2 \cos t + {}^1/_2 e^t - 1$

29. $x = 4\cos t + 3\sin t - 2e^{-2t} - 2e^{-t}\sin t, \quad y = \sin t - 2\cos t + 2e^{-t}\cos t$

30. $x = \cos t + \sin t + e^{-t}, \quad y = 2\sin t - \cos t - \cos t - 2e^{-t}$

31. $x = 2e^{2t} - 3e^{t} + e^{-t}, \quad y = 3e^{t} - 3e^{-t}, \quad z = e^{2t} - e^{-t} - 3e^{t} + 5 - 2\cos t$

32. (a) $x = 5\cos(\pi t/6)$, (b) $5\pi/6$(cm/det), (c) amp. = 5 cm, periode = 12 det, freq.= $^1/_{12}$ cycle per detik, (d) $-25\pi^2/36$(cm/detik$^2$)

33. (a) $x = \cos 2t + 2\sin 2t - e^{-2t}(\cos 2t + 3\sin 2t)$
    (b) amp. = $\sqrt{5}$, periode = $\pi$, freq. = $1/\pi$

34. (a) $x = 10(1 + 14t)e^{-14t}$, (b) terendam kritis

35. (a) $x = \dfrac{8\sin \omega t - 4\omega \sin 2t}{4 - \omega^2}$ jika $\omega \neq 2$, $x = \sin 2t - 2t\cos 2t$ jika $\omega = 2$

    (b) $\omega = 2$ atau periode = $\pi$

36. (a) $Q = r - e^{-t}(3\cos 3t + \sin 3t)$, $I = 10e^{-t}\sin 3t$
    (b) $Q = 6e^{-t}(\sin 3t + \cos 3t) - 3\sin 4t - 4\cos 4t$,
    $I = 12e^{-t}(\cos 3t - 2\sin 3t) - 12\cos 4t + 16\sin 4t$

37. (a) $Q = 4 + 5e^{-9t} - 9e^{-5t}$, $I = 45(e^{-5t} - e^{-9t})$,
    $I_1 = 40 + 5e^{-9t} - 45e^{-5t}$, $I_2 = 40 + 50e^{-9t} - 90e^{-5t}$

    (b) $Q = 25e^{-5t} - 9e^{-9t} - 4e^{-5t}(4\cos 3t + 3\sin 3t)$,
    $I = 81e^{-9t} - 125e^{-5t} + 4e^{-5t}(11\cos 3t + 27\sin 3t)$,
    $I_1 = 125e^{-5t} - 9e^{-9t} - 4e^{-5t}(29\cos 3t + 3\sin 3t)$,
    $I_2 = 250e^{-5t} - 90e^{-9t} - 40e^{-5t}(4\cos 3t + 3\sin 3t)$