2 BIDANG LENGKUNG DAN GARIS LENGKUNG DI DALAM RUANG

2.1. PERSAMAAN GARIS DAN BIDANG LENGKUNG

Pada sistim koordinat Cartesian XYZ suatu bidang (surface) dinyatakan sebagai sebuah persamaan yang terdiri dari 3 variabel x,y,z. Bidang nyata misalnya mempunyai persamaan derajat pertama $F(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$.

Suatu titik (x_0,y_0,z_0) terletak pada suatu surface $F(x, y,z) = 0$ apabila terpenuhi $F(x_0,y_0,z_0) = 0$.

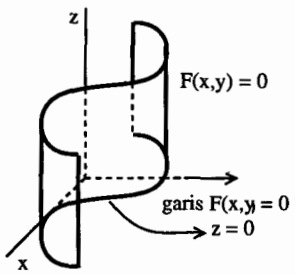
Suatu garis lurus/lengkung di dalam ruang biasanya dinyatakan sebagai perpotongan 2 buah bidang, yang berarti dinyatakan dengan 2 persamaan $f(x,y,z) = 0$ dan $G(x,y,z) = 0$.

2.1.1. Persamaan : $\left.\begin{array}{l}(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\end{array}\right\}$ adalah

persamaan garis lengkung yang berbentuk lingkaran (sebagai hasil perpotongan 2 buah bola).

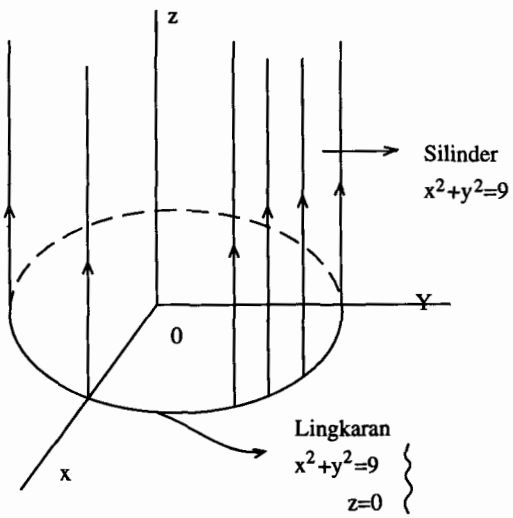
2.2. PROYEKSI GARIS LENGKUNG PADA BIDANG KOORDINAT

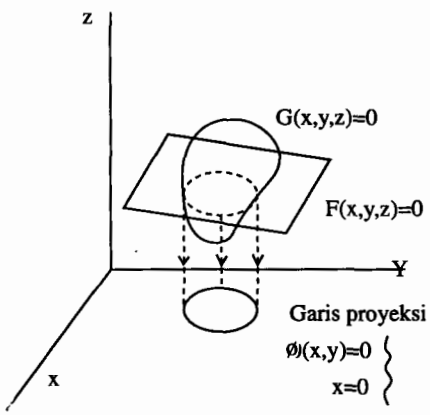
Pandang bidang dengan persamaan F(x,y) = 0. Di sini persamaan bebas dari variabel z. Persamaan tersebut menyatakan suatu bidang silinder yang garis lukisnya // sumbu z.



Sebagai garis lengkung arah dari bidang silinder itu, adalah perpotongan bidang silinder dengan bidang koordinat OXY persamaannya F(x,y) = 0 } sedangkan bidang2
z = 0 }
berbentuk F(x,z) = 0 dan F(y,z) = 0 berturut-turut menyatakan bidang silinder yang // sumbu y dan // sumbu x.

2.2.1. Persamaan $x^2 + y^2 = 9$ menyatakan sebuah silinder dengan garis lengkung arah sebuah lingkaran berpusat dititik 0(0,0,0) berjari-jari 3 dan garis lukisnya // sumbu z.





Pandang garis lengkung $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ (*) dan misalkan $\phi\ (x,y) = 0$ diperoleh dengan mengeliminir z dari (*). Maka $\phi\ (x,y) = 0$ menyatakan bidang silinder yang // sumbu z dan melalui garis lengkung (*). Jadi jelas perpotongan $\phi\ (x,y) = 0$ dengan bidang XOY, yaitu $\phi(x,y) = 0$
$z = 0$ menyatakan proyeksi dari garis (*) pada bidang XOY.

Dengan cara yang sama kita eliminir x untuk mendapatkan proyeksi pada bidang YOZ dan kita eliminir y untuk mendapatkan proyeksi pada bidang XOZ.

2.2.2. Perpotongan 2 bola menghasilkan lingkaran :
(1) ..... $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ }
(2) ..... $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$ } Carilah proyeksi lingkaran itu pada bidang OXY. Kita mencari silinder proyeksi dengan mengeliminir Z. Kurangkan pers. (1) pada pers. (2) didapat : $y + z = 1 \rightarrow z = 1 - y$ ..... (3). Masukkan (3) pada salah satu dari (1) atau (2) didapat $x^2+2y^2-2y = 0$. Maka proyeksi lingkaran pada bidang XOY adalah.

$\left.\begin{matrix} x^2+2y^2-2y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ Yang mana dapat dijabarkan kebentuk standard

$\frac{x^2}{{}^1/_2} + \frac{(y-\ {}^1/_2)^2}{{}^1/_4} = 1$ suatu ellips dengan setengah sumbu ${}^1/_2\sqrt{2}$ dan ${}^1/_2$.

2.3. B O L A

* Persamaan standard bola adalah S : $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, pusat 0(0,0,0) jari-jari r.
** Apabila pusat adalah titik M(a,b,c) dan berjari-jari r, persamaannya adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.
Persamaan umum bola dapat ditulis : $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

dimana : titik pusat M $(\frac{-1}{2}A, \frac{-1}{2}B, \frac{-1}{2}C)$ jari-jari $= \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 + \frac{1}{4}C^2 - D}$.

2.4. (i) Persamaan bola dengan pusat 0(0, 0, 0) dan jari-jari 7 adalah $x^2 + y^2 + z^2 = 49$

(ii) Bola dengan pusat M(–2, 3, 1) dan jari-jari 2 mempunyai persamaan $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 4$ atau $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2x + 10 = 0$.

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 7 = 0$ mempunyai pusat
$(\frac{-1}{2}A, \frac{-1}{2}B, \frac{-1}{2}C) = (2, -1, 0)$ dan jari-jari $= \sqrt{4 + 1 + 0 - 7} = \sqrt{-2}$.

Di sini bola adalah bola imaginer karena $r^2 = -2 < 0$

Dalam hal $r^2 > 0$ dan $r^2 = 0$ berturut-turut disebut bola sejati dan bola titik.

CATATAN (1) : Pada hakekatnya bola adalah perluasan dari lingkaran (di R^2) maka banyak sifat-sifat dan dalil-dalil dari lingkaran dapat diperluas untuk bola, antara lain:

* Persamaan bidang singgung dititik singgung P (x_1, y_1, z_1) pada bola adalah (ingat kaidah membagi adil) ;

  (1) $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$, atau

  (2) $(x_1-a)\ (x-a)+(y_1-b)(y-b)+(z_1-c)\ (z-c) = r^2$

  (3) $xx_1+yy_1+zz_1+{}^1/_2A\ (x+x_1) + {}^1/_2B\ (y+y_1) + {}^1/_2\ C\ (z\pm z_1) + D = 0.$

* Persamaan garis kutub dari lingkaran diperluas sebagai persamaan bidang kutub dari bola dengan titik kutub.
  $P(x_1,y_1,z_1)$;

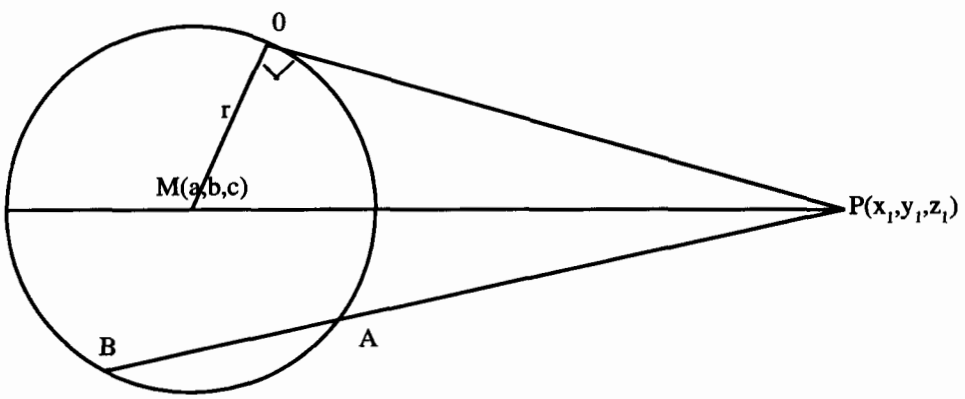
  (1) $x_1x + y_1y + z_1z = r^2$

  (2) $(x_1-a)\ (x-a) + (y_1-b)\ (y-b) + (z_1-c)\ (z-c) = r^2$

  (3) $x_1x+y_1y+zz_1+{}^1/_2A\ (x+x_1) + {}^1/_2\ B\ (y+y_1) + {}^1/_2\ C\ (z + z_1) + D = 0$

* Kuasa sebuah titik $P(x_1,y_1,z_1)$ terhadap bola ; melalui titik P dibuat garis yang memotong bola berturut-turut dititik A dan B maka PA.PB ternyata konstan dan harga yang konstan ini disebut kuasa titik P terhadap bola $S \equiv 0$

Kalau jari-jari bola r : $PA.PB = (PM-r)\ (PM+r) = PM^2 - r^2 = P0^2$
Sedang $PM^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2$.
Jadi kuasa adalah : $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - r^2 = S\ (x_1,y_1,z_1)$.



2.5. Kuasa titik (4,1,0) terhadap bola B $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - y + z = 7$ adalah : $x^2_1 + y^2_1 + z^2_1 + 2x_1 - y_1 + z_1 - 7 = 4^2 + 1^2 + 0 + 2{,}4 - 1 + 0 - 7 = 17$.

* Kalau kuasa titik P yaitu : $K > 0$ maka P di luar bola
$K = 0$ maka P pada bola.
$K < 0$ maka P di dalam bola.

2.6. Periksa letak titik P(2,1,3) terhadap bola $B = x^2 + y^2 + x^2 - 2x + y - z + 2 = 0$. Maka kuasa titik P pada bola.
$K = (2)^2+(1)^2+(3)^2-2(2)+(1)-(3) + 2 = 10 > 0$, Jadi titik P terletak di luar bola.

CATATAN (2) : Bidang kuasa dari 2 bola $B_1 = 0$ dan $B_2 = 0$ adalah tempat kedudukan titik-titik yang kuasanya terhadap $B_1 = 0$ dan $B_2 = 0$ sama.
persamaan bidang kuasa : $B_1 = B_2$.

CATATAN (3) : Titik-titik yang mempunyai kuasa yang sama terhadap ke 3 bola $B_1 = 0$, $B_2 = 0$ dan $B_3 = 0$ terletak pada sebuah garis lurus yang disebut garis kuasa.
Persamaan garis kuasa : $B_1 = B_2 = B_3$.

CATATAN (4) : 4 buah bola $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$ dan $B_4 = 0$ yang tidak melalui dua titik potong yang sama akan mempunyai sebuah titik yang kuasanya terhadap ke 4 bola tersebut sama. Titik tersebut disebut titik kuasa dan koordinatnya diperoleh dari persamaan-persamaan : $B_1 = B_2 = B_3 = B_4$.

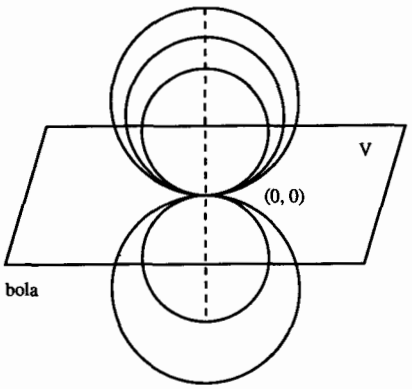
CATATAN (5) : Berkas bola. Kumpulan bola-bola yang melalui perpotongan dua buah bola $B_1 = 0$ dan $B_2 = 0$ disebut berkas bola dan mempunyai persamaan : $B_1 + \lambda B_2 = 0$. (λ = parameter). Untuk setiap harga λ tertentu, diperoleh sebuah bola yang melalui perpotongan $B_1 = 0$ dan $B_2 = 0$ dan disebut anggota dari berkas tersebut.

2.7. Persamaan bola yang melalui 0(0,0,0) dan melalui lingkaran perpotongan bola-bola $B_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 24 = 0$ dan $B_2 = x^2 + y^2 + z^2 + x - 6y - 12 = 0$ adalah :
$B_1 + \lambda B_2 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 24 + \lambda (x^2 + y^2 + z^2 + x - 6y - 12) = 0$,
dan karena melalui 0(0,0,0) maka :
$-24 - 12\lambda = 0 \rightarrow \lambda = -2$. Jadi bola tersebut :
$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 12y = 0$.

CATATAN (6) : Jaringan bola, Pandang 3 bila $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, , $B_3 = 0$ yang tidak terletak pada satu berkas yang sama. Kumpulan bola-bola yang melalui titik potong ke 3 bola tersebut disebut jaringan bola dan mempunyai persamaan $B_1 + \lambda B_2 + \mu B_3 = 0$ (λ dan μ parameter-parameter).

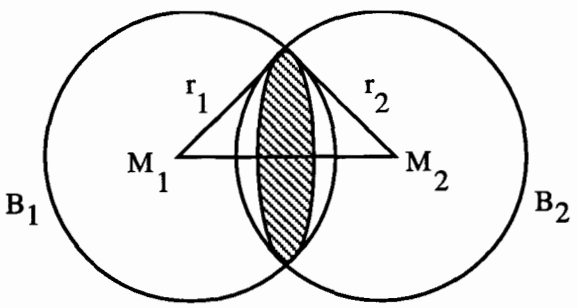
CATATAN (7) : Persamaan berkas bola yang menyinggung suatu bidang V = 0 dititik $P(x_1,y_1,z_1)$ mempunyai persamaan :
$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \lambda V = O.$

2.8. Ditanya persamaan bola yang melalui titik (0,0,0) dan yang menyinggung bidang V = x + y + z = 1 dititik (0,0,1)



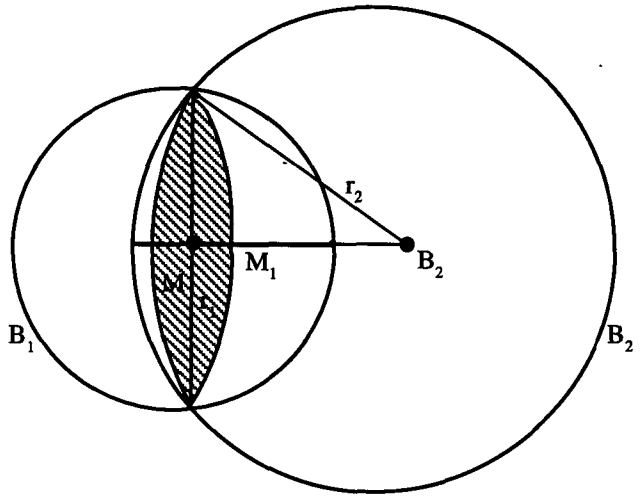
Berkas bola : $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 + \lambda (x+y+z-1) = 0.$
Karena melalui 0(0,0,0) diperoleh $\lambda = 1$.
Jadi persamaan bola tersebut : $x^2 + y^2 + z^2 + x + y - z = 0.$

CATATAN (8) : Bola-bola yang menyinggung garis g : $\left.\begin{matrix} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{matrix}\right\}$
dititik (x_1,y_1,z_1) membentuk jaringan bola : $(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 + \lambda V_1 + \mu V_2 = 0,$



CATATAN (9) : Dua bola berpotongan tegak lurus. Bola B_1 dan B_2 dikatakan berpotongan tegak lurus apabila kedua bidang ruang di sembarang titik pada lingkaran potong saling tegak lurus, selalu berlaku, $r_1^2 + r_2^2 = (M_1M_2)^2$. Kuasa M_1 terhadap B_2 adalah $+ r_1^2$. Kuasa M_2 terhadap B_1 adalah $+ r_2^2$.

CATATAN (10) : Bola B_2 membagi dua sama bola B_1 jika bola B_2 melalui lingkaran besar bola B_1. Di sini berlaku : $M_1M^2_2 = r^2_2 - r^1_2$



2.4. TEMPAT KEDUDUKAN, BIDANG SILINDER, BIDANG KERUCUT, BIDANG PUTAR DAN BIDANG ATUR

TEMPAT KEDUDUKAN (TK) : Adalah kumpulan titik-titik atau garis-garis yang memenuhi suatu hubungan tertentu.
Secara umum soal-soal mengenai TK dapat dibagi 3 golongan :

(A). Diambilkan titik sembarang (x_0,y_0,z_0) pada TK tersebut.
Dari hubungan-hubungan yang ada dapat disimpulkan suatu hubungan antara x_0,y_0,x_0 dengan bilangan-bilangan yang diketahui, lalu dengan membuang indeks 0 (nol) tersebut diperoleh TK yang diminta.

2.9 . Cari TK titik-titik yang berjarak a dari bidang OYZ dan untuk mana jumlah dari kwadrat jarak ketitik (b,0,0) dan (–b,0,0) adalah tetap (= c^2). Maka ambil sembarang titik (x_0,y_0,z_0) pada TK maka syarat (1) , $x_0 = a$ dan syarat (2) : $(x_0–b)^2+ y_0^2+ z_0^2$, $(x_0+ b)^2+ y_0^2+ z_0^2 = c^2$ atau $2z_0^2 + 2y_0^2+ 2z_0^2 = c^2 – 2b^2$.
Jadi hanya tinggal hubungan antara x_0,y_0,x_0 dengan a,b,c dan dengan membuang indeks (disebut menjalankan titik (x_0,y_0,z_0) diperoleh TK :

$$x = a$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = c^2 – 2b^2$$

suatu lingkaran perpotongan bidang x = a dan bola berpusat (0,0,0) jari-jari

$$= \sqrt{\frac{1}{2} c^2 – b^2}.$$

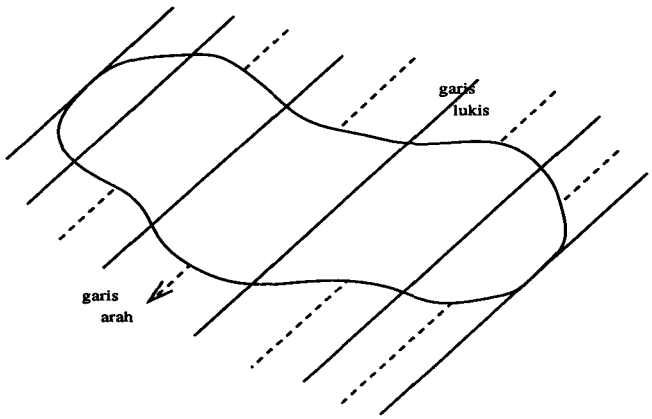
(B). Ada satu atau lebih parameter-parameter, dicari hubungan antara x,y,z dengan parameter-parameter tadi, lalu parameter-parameter dieliminir.

2.10. Cari TK garis kuasa bola-bola $B_1 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, B_2 yang melalui (0,0,0) berpusat di (0,p,1) B_3 melalui (0,0,0) pusat (1,0,p) persamaan $B_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2py - 2z = 0$ dan B_3 :
$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2pz = 0$.
Persamaan garis kuasa : $B_1 = B_2 = B_3$ atau $1 = 2py + 2z = 2x + 2pz$.

Jadi $p = \dfrac{1 - 2x}{2y}$ dan $p = \dfrac{1 - 2x}{2z}$. Pelenyapan p menghasilkan $y = z$

(C). Kombinasi dari (A) dan (B), misalnya bidang silinder dan bidang kerucut.

BIDANG SILINDER : Adalah TK garis lurus-lurus yang saling // dan selalu memotong suatu garis tertentu.
Untuk mencari persamaan suatu bidang silinder kita lakukan kombinasi dari (A) dan (B) di atas.



2.11 Cari persamaan silinder dengan garis lengkung arah sebuah lingkaran pada bidang $z = 0$ berpusat di (0,0,0) dan jari-jari 3, sedang garis lukisnya berarah [2,1,1].
Maka lingkaran arah silinder adalah perpotongan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan bidang $z = 0$ atau : $\left.\begin{matrix} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$

Ambil sembarang titik $(x_0,y_0,0)$ pada lingkaran, berarti terpenuhi $x_0^2 + y_0^2 = 9$ ..... (*).
Persamaan garis lukis melalui $(x_0,y_0,0)$ berarah 2.1,1 adalah [x,y,z] =

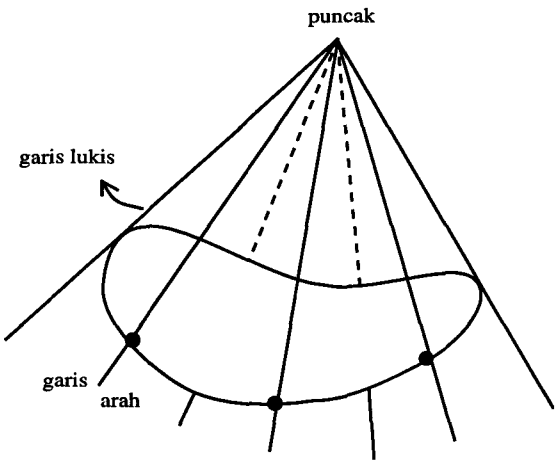
$[x_0,y_0,0] + \lambda [\ 2,1,1\ ]$ atau

$\left.\begin{matrix} x = x_0 + 2\lambda \longrightarrow x_0 = x - 2\lambda \\ y = y_0 + \lambda \longrightarrow y_0 = y - \lambda \\ z = \lambda \end{matrix}\right\}$ dan dengan mensubstitusikan ke (*)

diperoleh : $(x - 2z)^2 + (y - z) = 9$ atau $x^2 + y^2 + 5z^2 - 4xz - 2yz = 9$ adalah persamaan bidang silinder yang diminta.

BIDANG KERUCUT : Adalah TK garis-garis yang melalui sebuah titik tetap tertentu (disebut puncak) dan selalu memotong sebuah garis lengkung tertentu (disebut garis arah).

2.12. Misalnya hendak mencari persamaan kerucut berpusat di T (1,1,2) dan baris lengkung arahnya adalah sebuah lingkaran terletak di bidang OYZ pusat (0,0,0) jari-jari = 1.
Maka persamaan lingkaran
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ }
$x = 0$ }
Ambil titik sembarang $(0,y_0,z_0)$ pada lingkaran, tersebut ,
$y_0^2 + z_0^2 = 1$ ..... (*).



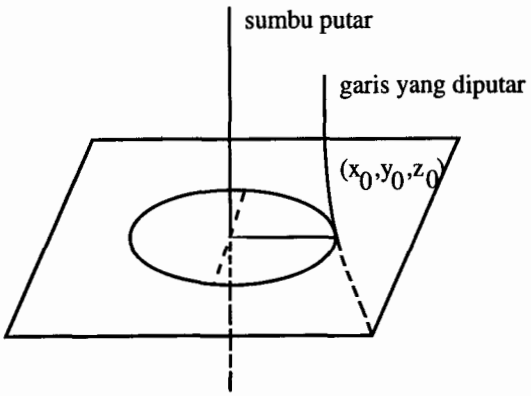
Garis lukis melalui T(1,1,2) dan $(0,y_0,z_0)$ persamaannya : [x,y,z] = [1,1,2] + λ [$-1,y_0-1,z_0-2$] atau :
$x = 1 - \lambda \longrightarrow \lambda = 1 - x$
$y = 1+y_0\,\lambda - \lambda \longrightarrow y_0 = \dfrac{y-1+\lambda}{\lambda} = \dfrac{y-x}{1-x}$

$z = 2+\lambda z_0 - 2\lambda \longrightarrow z_0 = \dfrac{z-2+2\lambda}{\lambda} = \dfrac{z-2x}{1-x}$

Substitusi ke (*) diperoleh : $\left(\dfrac{y - x}{1 - x}\right)^2 + \left(\dfrac{z - 2x}{1 - x}\right)^2 = 1$

atau ; $4x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 4xz + 2x - 1 = 0$ adalah persamaan bidang kerucut yang diminta.

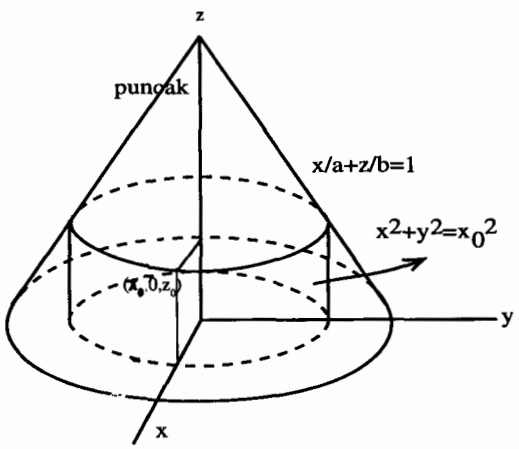
BIDANG PUTAR : Terjadi bila suatu garis lurus/lengkung diputar sekeliling sebuah garis lurus tertentu (yang disebut sumbu putar). Tiap-tiap titik dari garis yang berputar tadi akan melalui sebuah lingkaran, yang mana bidang lingkaran tersebut tegak lurus sumbu putar.



Misalkan kita hendak mencari persamaan bidang putar yang terjadi apabila sebuah garis lurus : $y = 0$, $x/a + z/b = 1$ diputar sekeliling sumbu Z.
Ambil titik sembarang $(x_0,0,z_0)$ pada garis tersebut maka terpenuhi : $x_0/a + z_0/b = 1$ ..... (*).

Persamaan lingkaran yang dibuat oleh perputaran titik $(x_0,0,z_0)$ sekeliling sumbu z adalah perpotongan silinder $x^2 + y^2 = x_0^2$ dan bidang $z = z_0$ atau :

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x_0^2 \\ z &= z_0 \end{aligned}\right\}$$



Substitusi ke (*) diperoleh :

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} + \frac{z}{b} = 1 \text{ atau } \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{(b-z)^2}{b^2}$$

yang adalah suatu kerucut lingkaran tegak.

BIDANG ATUR : Adalah bidang yang dibentuk oleh sebuah garis lurus yang bergerak di dalam ruang menurut ketentuan-ketentuan yang diberikan.
Silinder dan kerucut adalah contoh-contoh dari bidang atur

2.5. PERSAMAAN STANDAR

* ELLIPSOIDA : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ..... (*)

Pusat (0,0,0) dan setengah sumbu-sumbu a , b , c .
Dalam hal : $a = b \neq c$, bentuk (*) adalah sebuah ellipsoida putar dengan sumbu putar sumbu z.
Dalam hal : $a = b = c$, bentuk (*) adalah sebuah bola.

Ellipsoida imaginer : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1.$

* HIPERBOLOIDA :

Hiperboloida Daun satu : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

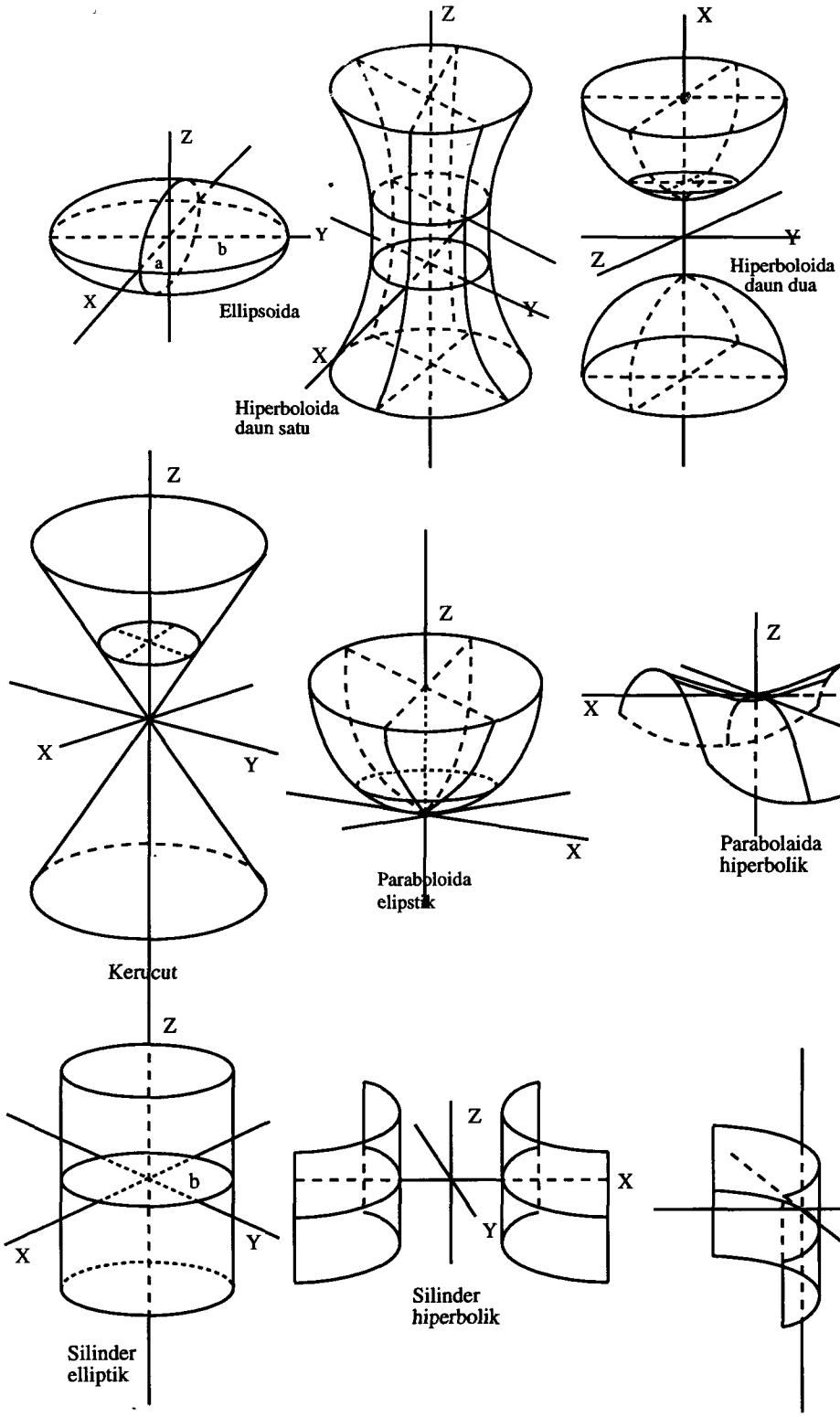
Hiperboloida Daun dua : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

* KERUCUT : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

Dalam hal a = b kerucutnya adalah kerucut lingkaran tegak.

Persamaan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ menyatakan sebuah titik riil

$x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan kerapkali pula kita sebut sebagai kerucut imaginer (ada pula yang menyebutnya ellipsoida titik)


Z
Y
X
a
b
Ellipsoida
Hiperboloida
daun satu
Hiperboloida
daun dua
Kerucut
Paraboloida
elipstik
Parabolaida
hiperbolik
Silinder
elliptik
Silinder
hiperbolik
Silinder
parabolik

* PARABOLOIDA :

Paraboloida elliptik : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$

Paraboloida hiperbolik : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$

* SILINDER TEGAK : Kita tahu bahwa silinder tegak (garis lukis // sumbu z) persamaannya hanya terdiri dari 2 variabel x dan y , maka :

(1) Silinder elliptik : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Kalau a = b maka silinder adalah silinder lingkaran.

(2). Silinder hiperbolik : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(3). Silinder parabolik : $y^2 = 2px$

(4). Silinder imaginer : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

CATATAN (11) Bentuk umum bidang derajat kedua di R^3 adalah

$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2+2_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}\ z+a_{44} = 0$

atau : $V^tAV + 2B^tV + c = 0$ bila :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}, \quad C = (a_{44}). \; ; \; V = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Didalam diktat ini bidang derajat kedua hanya dibahas secara singkat dan sederhana saja. Disini kita cukup memperluas pengertian-pengertian translasi, rotasi, vektor dan akar karakteristik yang dibahas di bab 1 untuk R^3. Akan diberikan beberapa contoh:

2.13. Pada sistim koordinat Cartesian diketahui bidang derajat kedua $2x^2+2y^2+5z^2-2xy-4xz+4yz-2x+6z-4=0$ (**).

Carilah titik pusat, bentuk standar dan jenisnya.

Penyelesaian Persamaan pusat dapat diperluas sebagai :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad \text{atau} \quad 2p_1 - p_2 - 2p_3 - 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} -p_1 + 2p_2 + 2p_3 &= 0 \\ -2p_1 + 2p_2 + 5p_3 + 3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{pusat } ; (0,1,-1) = 0'.$$

Kita pakai rumus translasi ke titik pusat : $x = x' + 0$, $y = y' + 1$, $z = z' - 1$. Kalau kita substitusikan ke (**) persamaan menjadi :

$$2x'^2 + 2y'^2 + 5x'^2 - 2x'y' - 4x'z' + 4y'z' - 7 = 0.$$

Untuk melenyapkan bagian homogen kwadratis (suku kembar x'y', x'z', y'z') kita lakukan rotasi ke vektor-vektor karakteristiknya.

Persamaan karakteristiknya : $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = +7$

Bentuk standar adalah $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 - 7 = 0$. atau :

$x''^2 + y''^2 + 7z''^2 = 7$ atau $\frac{x''^2}{7} + \frac{y''^2}{7} + \frac{z''^2}{1} = 1$, suatu ellipsoida putar dengan sumbu putar sumbu Z" dan setengah sumbu $a=b = \sqrt{7}$, $c=1$.

2.14. Selidiki titik pusat dan bentuk standar dari :

$2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2x - 2y + z + 1 = 0$ ..... (1*)

Penyelesaian :

Pusat $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{dy} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ atau $2p_1 - p_2 - p_3 - 1 = 0$

$-p_1 + p_2 \cdot \quad - 1 = 0$

$-p_1 \quad \cdot \quad + p_3 + 1 = 0$

ternyata $r(A) = 2 \neq r(A,B) = 3$ tak ada jawab sehingga pusat tak ada. Kita lakukan rotasi lebih dahulu. Persamaan karakteristik:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ diperoleh : } \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

tersebut $\lambda_1 = 1$ maka : $x - y - z = 0$ diperoleh [x,y,z]

$-x = 0$ $= \mu$ [0,1,–1]

dan $= \{ 0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}\}$ vektor karakteristik yang panjangnya

$= 1$ untuk $\lambda_2 = 3$ maka $-x - y - z = 0$

$-x - 2y = 0$ } cukup

$-x - 2z = 0$

Kita ambil 2 persamaan dan diperoleh $\{x,y,z\} = \mu \{-2,1,1\}$ dan $\{-2/\sqrt{6},1/\sqrt{6},1/\sqrt{6}\}$ panjangnya = 1. Untuk $\lambda_3 = 0$

maka : $2x - y - z = 0$

$-x + y = 0$ } kita peroleh : $[x,y,z] = \mu [\ 1,1,1\ ]$

$-x + z = 0$

dan w $\{1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}\}$ panjangnya = 1

Setiap vektor [x,y,z] relatif terhadap [1,0,0] , [0,1,0] , [0,0,1] mempunyai hubungan :

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = x'\begin{bmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1\sqrt{2}\end{bmatrix} + y'\begin{bmatrix}-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{bmatrix} + z'\begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

atau : $x = -2/\sqrt{6}y' + 1/\sqrt{3}z'$

$y = 1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{6}y' + 1/\sqrt{3}z'$ } (2*).

$z = -1/\sqrt{2}x' + 1/\sqrt{6}y' + 1/\sqrt{3}z'$

Dengan rotasi bentuk homogen kwadratis menjadi $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$ atau $x'^2 + 3y'^2$, dan bila (2*) kita masukkan ke bagian linier $-2x - 2y + 2z$ diperoleh : $-2\sqrt{2}x' + 4/\sqrt{6}y' - 2/\sqrt{3}z'$.

Jadi (1*) menjadi : $x'^2 - 2\sqrt{2}x' + 3y'^2 + 4/\sqrt{6}y' - 2/\sqrt{3}z' + 1 = 0$

atau $(x'-\sqrt{2})^2 + 3(y'+2/3\sqrt{6})^2 = 2/\sqrt{3}(z' + 11\sqrt{3}/18)$.

Dengan translasi : $x'' = x' - \sqrt{2}$

$y'' = y' + 2/3\sqrt{6}$ } persamaan standar adalah :

$z'' = z' + 11\sqrt{3}/18$

$x''^2 + 3y''^2 = 2/\sqrt{3}z$ atau $\dfrac{x''^2}{1} + \dfrac{y''^2}{1/3} = 2/\sqrt{3}\ z''$ suatu paraboloida elliptik.

2.15. $x^2 + 2y^2 - 7z^2 + 4xy - 2xz - 12yz - 2x + 10z = 0$ (*) selidiki pusat, bentuk standar dan jenisnya.

Penyelesaian Persamaan pusat $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ atau

$$\left.\begin{array}{l} p_1 + 2p_2 - p_3 - 1 = 0 \\ 2p_1 + 2p_2 - 6p_3 = 0 \\ -p_1 - 6p_2 - 7p_3 + 5 = 0 \end{array}\right\}$$ r(A) = r(A,B) = 2 jadi bila diselesaikan diperoleh

jawab berupa garis p = [1,–1,0] + μ [5,–2,1] , jadi diperoleh segaris titik-titik pusat dan kita ambil titik pusat sembarang misalnya (4,–1,1) untuk pusat translasi: x = x' + 4, y = y' – 1, z = z' + 1 dan kita substitusikan ke (*) didapat : $x'^2 + 2y'^2 - 7z'^2 + 4x'y' - 12y'z' - 2x'z' + 1 = 0$.
Untuk menghilangkan suku kembar x'y', x'z', x'z', kita lakukan rotasi kevektor-vektor karakteristik ;

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -6 \\ -1 & -6 & -7-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 - 10,\ \lambda_3 = 0.$$

Maka persamaan setelah rotasi adalah $\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + 1 = 0$ atau $-6x''^2 + 10y''^2 = 1$; $\dfrac{x''^2}{1/6} = \dfrac{y''^2}{1/10} = 1$

Suatu silinder hiperbolik.

2.6. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

2.16. Tentukan proyeksi garis lengkung : (i) $x^2 + y^2 = 3z$ dan $2x - y + z = 0$, (ii) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, kebidang OXY.

Penyelesaian : (1) $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 3z \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x - y + z = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{array}\right.$ kita eliminir z.

maka (2) → z = – 2x + y dan substitusikan ke (1) :
$x^2 + y^2 = 3(-2x+y)$ atau $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$. Jadi garis lengkung proyeksi tersebut : $x^2 + y^2 + 6x - 3y = 0$ suatu
$z = 0$
lingkaran yang terletak pada bidang OXY dengan pusat $(-3,1^1/_2,0)$ jari-jari $^3/_2\sqrt{5}$.

(ii) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ atau : $y = x^2$ ..... (1)
$z = x^3$ ..... (2) jadi

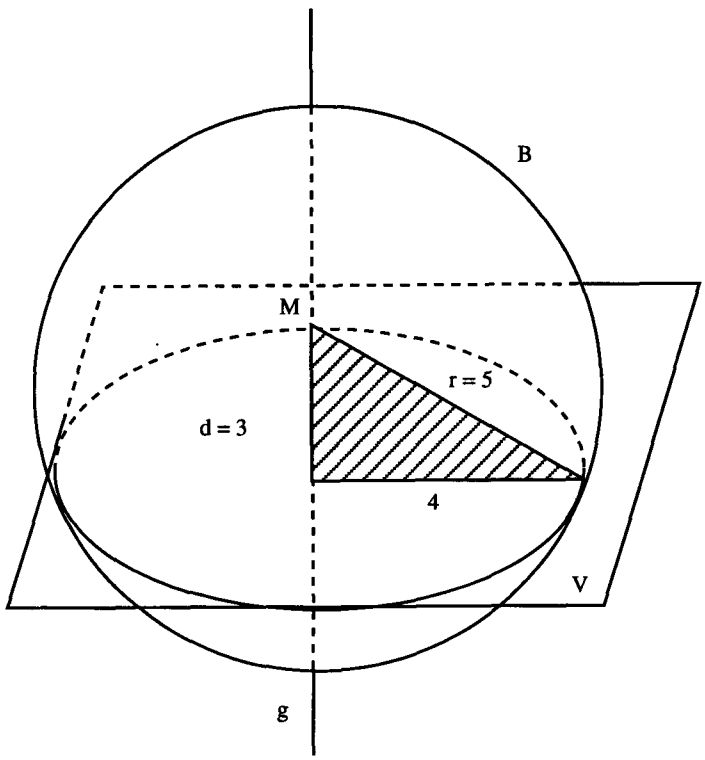
proyeksi pada bidang OXY adalah $\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ suatu parabola
pada bidang OXY.

2.17. Carilah sebuah titik pada garis $x = y = z$ yang berjarak 5 terhadap sumbu z.
Penyelesaian : Kita tahu bahwa bidang silinder lingkaran adalah TK titik-titik yang berjarak sama terhadap porosnya. Jadi kita dapat membuat bidang silinder lingkaran dengan poros sumbu z dan jari-jari = 5, yaitu $x^2 + y^2 = 25$ ..... (*).
Maka titik tembus garis $x = y = z$ pada bidang silinder adalah titik-titik yang diminta.
Kita kerjakan sebagai berikut : $x = y = z \rightarrow [\ x,y,z\ ] = \lambda\ [\ 1,1,1\ ]$
substitusikan pada (*) : $\lambda^2 + \lambda^2 = 25 \rightarrow \lambda = \pm 2^1/_2\sqrt{2}$.
Jadi titik yang diminta $(2^1/_2\sqrt{2},\ 2^1/_2\sqrt{2},\ 2^1/_2\sqrt{2})$ dan $(-2^1/_2\sqrt{2},\ -2^1/_2\sqrt{2},\ -2^1/_2\sqrt{2})$

2.18. Diketahui bola B : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 16 = 0$ dan bidang datar V: $x + 2y + 2z = 0$. Periksa apakah bidang V tersebut memotong bola B. Kemudian cari pusat dan jari-jari lingkaran, hasil perpotongan V dan B tersebut.
Penyelesaian : Bola pusat M (–1,–2,–2) jari-jari $= \sqrt{1+4+4+16} = 5$.
Jarak dari M ke bidang V :

$$d = \left| \frac{-1+(2)\ (-2)+2(-2)}{\sqrt{1+4+4}} \right| = 3$$

Karena $d = 3 <$ jari-jari $= 5$ jelas V memotong bola B. Jari-jari lingkaran $\sqrt{25 - 9} = 4$.



Garis g $\perp$ V jadi arahnya [1,2,2] dan melalui pusat bola (–1,–2,–2), maka persamaannya : [x,y,z] = [–1,–2,–2] + λ [1,2,2] (*).

N adalah titik tembus g pada V maka substitusikan (*) pada V : $(-1+\lambda) + 2(-2+2\lambda) + 2(-2+2\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda = 1$.
Jadi titik tembus (pusat lingkaran perpotongan) : N(0,0,0).

2.19. Hitung persamaan bola yang memotong tegak lurus bola $B_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$, membagi dua sama besar bola, $B_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 3$ dan menyinggung garis lurus g : $x = 7 - 2y = -z$ dititik P(1,3,–1).
Penyelesaian : Jaringan bola menyinggung g dititik P. $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 + \lambda(x+2y-7) + \mu(x+z) = 0 \longrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + (-2+\lambda+\mu)x + (-6+2\lambda)y + (2+\mu)z + (11-7\lambda) = 0$ ..... (1)
Bola B_1 : pusat M_1 (3,–2,1), jari-jari $\sqrt{9+4+1+11} = 5$.
Karena B berpotongan tegak lurus dengan B_1 maka kuasa M_1 terhadap B = 25 atau : $B(3,-2,1) = (3)^2 + (-2)^2 + (1)^2 + (-2+\lambda+\mu)3 + (-6+2\lambda)(-2) + (2+\mu) 1 + 11 - 7\lambda = 25 - (8) = -8\lambda + 4\mu = 0$ ..... (2).
Bola B_2 : pusat M_2 (0,0,0) jari-jari $\sqrt{3}$, dan karena B membagi 2 sama besar B_2 maka kuasa M_2 terhadap B, $= -(V3)^2 = -3$ atau $(0)_{(0,0,0)} = (0)^2 + (0)^2 + (0)^2 + 0 + (-2+\lambda+\mu)(0) + (2+\mu)(0) + (11-7\lambda) = -3 \rightarrow \lambda = 2$ ..... (3).
Jadi dengan (2) diperoleh $\mu = 2$.
Maka persamaan bola B yang diminta (1) menjadi : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$.

2.20. Diminta TK titik-pusat 2 bola-bola B yang menyinggung bidang V : y = z + 1 dan kuasa 0(0,0,0) terhadap bola-bola tersebut sama dengan kuasa titik 0 terhadap bola $B_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0$.

Penyelesaian : Kuasa 0(0,0,0) terhadap B_1 adalah $(B_1)_{(0,0,0)} = 5$.

Misalkan B : $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$ ..... (1).

Karena B menyinggung B berarti $r = d = \left| \dfrac{y_0 - z_0 - 1}{\sqrt{0+1+1}} \right|$

atau $r^2 = {}^1/_2 (y_0 - z_0 - 1)^2$. (1) menjadi B : $x^2 - y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x^2_0 + {}^1/_2y^2_0 + {}^1/_2z^2_0 + y_0z_0 + y_0 - z_0 - {}^1/_2 = 0$.
Kuasa 0 terhadap B, = 5 (diketahui), atau (B) $(0,0,0) = x^2_0 + {}^1/_2y^2_0 + {}^1/_2z^2_0 + y_0z_0 + y_0 - z_0 - {}^1/_2 = 5$, dan dengan menjalankan titik (x_0,y_0,z_0) diperoleh TK : $2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz + 2y - 2z - 11 = 0$.

2.21. Ialah persamaan kerucut yang berpuncak dititik T (–1,2,3) dan mempunyai garis lengkung arah sebuah lingkaran yang terletak di bidang OYZ, pusat (0,2,2) dan jari-jari = 1.

Penyelesaian : Persamaan lingkaran arah : $x^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 1$ $\left.\begin{matrix}\\ \\ x = 0\end{matrix}\right\}$

bila titik $(0,y_0,z_0)$ pada lingkaran, terpenuhi :
$(y_0 - 2)^2 + (z_0 - 2)^2 = 1$. (*).
Persamaan garis lukis melalui T (–1,2,3) dan $(0,y_0,z_0)$
$(x,y,z) = (-1,2,3) + \lambda\ (1,y_0-2,z_0-3)$ atau :
$x = -1 + \lambda \longrightarrow \lambda = x + 1$

$$y = 2 + \lambda\ y_0 - 2\ \lambda \longrightarrow y_0 = \frac{y - 2 + 2\ \lambda}{\lambda} = \frac{y + 2x}{x + 1}$$

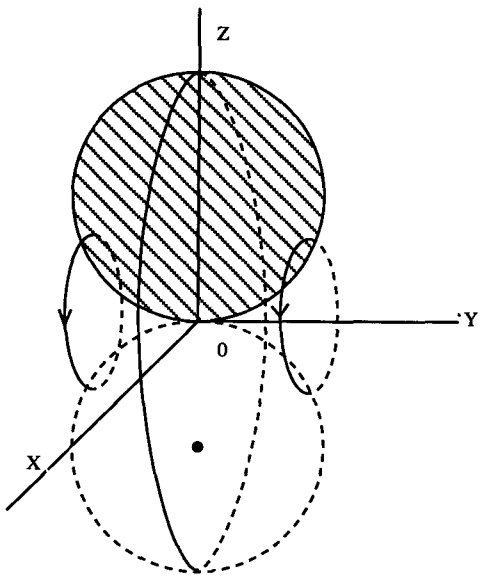
$$z = 3 + \lambda\ z_0 - 3\ \lambda \longrightarrow z_0 = \frac{z - 3 + 3\ \lambda}{1} = \frac{z + 3x}{x + 1}$$

Kita substitusikan ke (*) diperoleh : $\left(\frac{y + 2x}{x + 1} - 2\right)^2$

$+ \left(\frac{z + 3x}{x + 1} - 2\right)^2 = 1$ atau : $y^2 + z^2 + z^2 + 2xz - 6x - 4y + 7 = 0.$

2.22. Lingkaran yang terletak di bidang x = 0 berjari-jari a dan menyinggung sumbu Y, diputar sekeliling sumbu Y. Carilah persamaan bidang putar yang terjadi.

Penyelesaian : Persamaan lingkaran : $x = 0$
$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ $\left.\begin{matrix}\\ \end{matrix}\right\}$



Ambil titik $(0,y_0,z_0)$ pada lingkaran, terpenuhi : $y^2_0 + (z_0 - a)^2 = a^2$ ..... *
Lingkaran yang dilalui titik $(0,y_0,z_0)$ waktu mengelilingi sumbu y persamaannya:

$$\left.\begin{aligned} y &= y_0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= y^2_0 + z^2_0 \end{aligned}\right\} (**)$$

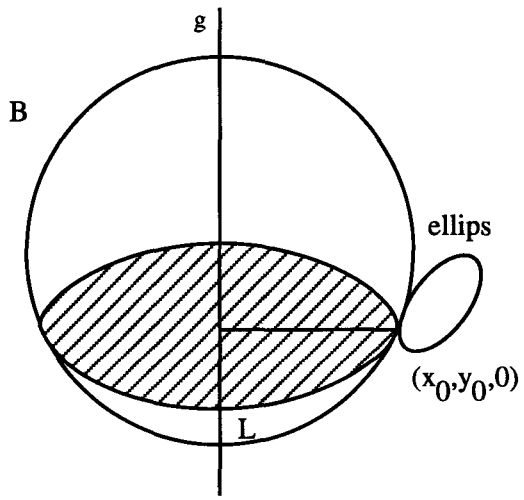
kita hilangkan y_0 dan z_0 dari (**) dan (*) diperoleh persamaan :

$x^2 + y^2 + z^2 = 2a\ \sqrt{x^2 + z^2}$.

Benda putar ini disebut torus (doughnot).

2.23. Tentukan persamaan bidang yang terjadi akibat perputaran ellips $x = 0$, $x^2 + 2y^2 - 2x = 0$ sekeliling garis g : $y = 0$, $z = px$.
Penyelesaian : Ambil titik $(x_0,y_0,0)$ pada ellips, terpenuhi :

$x^2_0 + 2y^2_0 - 2x_0 = 0$ ..... (*).



Perhatikan gambar, lingkaran L yang dilalui $(x_0,y_0,0)$ waktu berputar sekeliling g terletak pada bidang yang $\perp$ g. Arah g: 0 1 0 0 1 [-1,0,-p] p 0 -1 p 0
p 0 -1 p 0

Jadi W : $-1(x-x_0) - pz = 0 \rightarrow -x - n + x_0 = 0$. Lingkaran L tersebut kita anggap sebagai perpotongan W dan bila B (dengan pusat (0,0,0) dan jari-jari $\sqrt{x^2_0 + y^2_0}$) atau :

L : $x + pz - x_0 = 0 \rightarrow x_0 = x + pz$)
$x^2 + y^2 + z^2 = x^2_0 + y^2_0$) (**), dan dengan melenyapkan X_0 dan y_0 dari (*) dan (**) diperoleh persamaan bidang putar :

$x^2 + 2y^2 + (2 - p^2)z^2 - 2pxz - 2x - 2pz = 0$

2.24. Ditanya persamaan bidang atur yang dilalui oleh garis lurus yang selalu // dengan OYZ dan yang selalu memotong sumbu x dan garis lengkung $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ (t parameter).

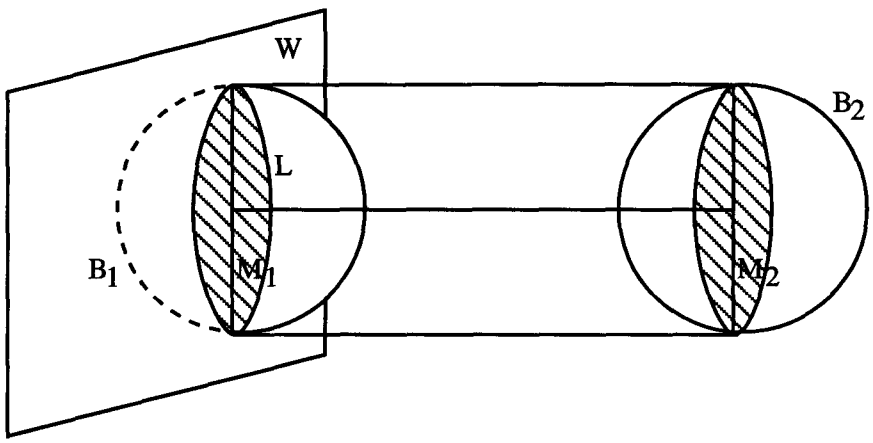
Penyelesaian : Garis lurus yang // bidang OYZ terletak pada bidang $x = \mu$ ..... (1).
Garis lurus yang memotong sumbu x terletak pada berkas bidang
$y + \lambda z = 0$ ..... (2).

Garis : $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ $\left.\begin{matrix} y = x^2 \text{ ..... (3)} \\ z = x^3 \text{ ..... (4)} \end{matrix}\right\} \rightarrow$

Dari (1) dan (3) serta (x) dan (4) : $y = \mu^2$, $z = \mu^3$
dan substitusikan ke (2) : $\mu^2 + \lambda \mu^3 - 0 \rightarrow \mu^2(1 + \lambda\mu) = 0$
Jadi $\mu = 0$ dan $1 + \lambda \mu = 0$ ..... (5). Dari (1) : $\mu = x$ dan dari (2) : $\lambda = -y/z$
Maka persamaan bidang atur diperoleh dari (5) : $x = 0$ dan $(1 - y/z)(x) = 0 \rightarrow$
$xy - z = 0$

2.25. Bola-bola B_1 dan B_2 jari-jarinya = r, titik pusatnya masing-masing $M_1(0,0,0)$ dan M_2 (1,1,2). Tentukan persamaan silinder selubung persekutuannya.

Penyelesaian : Garis lukis silinder // M_1M_2, arahnya [1,1,2].



Lingkaran arah arah L adalah perpotongan B_1 dengan bidang W yang tegak lurus [1,1,2] dan melalui M_1.
Jadi $x + y + 2z = 0$.

L : $\left.\begin{matrix} x + y + 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \end{matrix}\right\}$

Ambil (x_0,y_0,z_0) pada L terpenuhi :
$x_0 + y_0 + 2x_0 = 0$ ..... (1) dan $x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 = r^2$ ..... (2).
Garis lukis melalui (x_0,y_0,z_0) berarah [1,1,2] ; $[x,y,z] = [x_0,y_0,z_0] + \lambda [1,1,2]$
atau $x_0 \pm x - \lambda$, $y_0 = y - \lambda$, $z_0 = z - 2\lambda$ ..... (3).

kita masukkan ke (1) $(x-\lambda) + (y-\lambda) + 2(z-2\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = 1/6\ (x+y+2z)$ ..... (4). Dari (2) dan (3) $(x-\lambda)2 + (y-\lambda)^2 + (z-2\lambda)^2 = r^2$. Dan ganti λ dari (4) diperoleh : $5x^2 + 5y^2 + 2x^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 6r^2 = 0$.

2.7. SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

2.26. Tentukan jenis proyeksi pada bidang OYX dari garis lengkung

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x+y+z &= a \end{aligned}\right\}$$ (Jawab. Ellips melalui 0, berpusat (1/3a,1/3a,0).

2.27. Tentukan persamaan bola melalui 4 titik (0,0,0), (0,0,1), (2,0,0), (0,1,0). (Jawab $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - y - z = 0$).

2.28. Tentukan persamaan bola yang pusatnya terletak pada bidang $x-2y+z = 5$ dan memotong bidang $3x-y+2z = 1$ menurut sebuah lingkaran yang berpusat di (2,1,–2) dan jari-jarinya $2^1/_2$.
(Jawab. $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = (^9/_4)$).

2.29. Tentukan pusat dan jari-jari bola yang menyinggung bidang $x+2y-z = 6$ dititik (1,2,–1) dan yang dengan bola, yang melalui 0(0,0,0), (4,0,0), (0,6,0) dan (0,0,2), mempunyai sebuah bidang kuasa yang sejajar sumbu z.
(Jawab. (–1,–2,1), jari-jari $2\sqrt{6}$).

2.30. Tentukan persamaan bola yang melalui (1,–3,4), terhadap mana kuasa titik (–4,–1,0) adalah 13, memotong tegak lurus bola $x^2+y^2+z^2-4x-2y+12z+4 = 0$ serta membagi dua sama besar bola $x^2+y^2+z^2+2x+8y-4z+14 = 0$.
(Jawab. $x^2+y^2+z^2-2x+6y-6 = 0$).

2.31. Carilah persamaan silinder yang garis lengkung arahnya sebuah ellips yang terletak dibidang OXY, pusat (0,0,0) dan $^1/_2$ sumbu 1 dan 2, (sumbu pendek berhimpit dengan sumbu x), garis lukis silinder // garis $2x = y = z$.
(Jawab. $4x^2 + y^2 + 2z^2 - 4xz - 2yz - 4 = 0$).