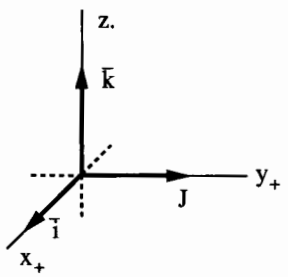
1 VEKTOR DI R^3 DAN ILMU UKUR ANALITIK RUANG

1.1. KOORDINAT SIKU-SIKU DI R^3

Di sini kita hanya memandang sistim koordinat siku-siku (Cartesian), yaitu sistim koordinat dengan sumbu-sumbu X,Y, dan Z yang saling tegak lurus, dan melalui sebuah titik, yang kita sebut titik awal (origin).



Sebagai vektor-vektor basis adalah :
$\bar{i}$ = [1 , 0 , 0] pada sumbu X
$\bar{j}$ = [0 , 1 , 0] pada sumbu Y
$\bar{k}$ = [0 , 0 , 1] pada sumbu Z
{ $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ } bebas linier dan kalau dipilih sebagai basis dari R^3 , disebut basis natural (basis alam).

Setiap titik di dalam ruang dinyatakan dengan tripel bilangan riil (x , y , z) dan disebut "koordinat" titik tersebut. Sedangkan setiap vektor ε R^3 dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\bar{i}$, $\bar{j}$, dan k.

Misalnya $\bar{a} = [3 , 2 , 2]$ berarti $\bar{a} = 3[1 , 0 , 0] + 2[0 , 1 , 0] + 2[0 , 0 , 1]$

$= 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$.

1.2. RANGKUMAN

Dari pembicaraan kita yang umum di bab 1, kita tulis lagi beberapa hasil pembicaraan tersebut untuk R^3. :

(1) Dot produk, dari $\bar{a} = [x_1 , y_1 , z_1]$ dan $\bar{b} = [x_2 , y_2 , z_2]$:
$\bar{a}.\bar{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, atau : $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}| \ |\bar{b}| \cos\theta$ dimana : $|\bar{a}|$ dan $|\bar{b}|$ adalah panjang vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$, sedangkan θ adalah sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$.

Panjang vektor $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} . \bar{a}} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

(2). Sudut antara 2 vektor :

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} \qquad \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$$

Syarat $\bar{a}$ tegak lurus $\bar{b}$ adalah $\bar{a} . \bar{b} = 0$ atau $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$

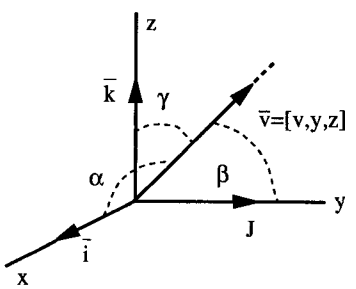
(3). Jarak antara 2 titik (jarak antara titik-ujung ujung vektor radius)
$P(x_1 , y_1 , z_1)$ dan $Q(x_2 , y_2 , z_2)$

$$\overline{PQ} = d(\overline{OP} , \overline{OQ}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.3. SUDUT ARAH, COSINUS ARAH, BILANGAN ARAH

Sudut-sudut arah dari suatu vektor $\bar{v} = [x , y, z]$ yaitu α , β , γ adalah sudut antara $\bar{v}$ dengan $\bar{i}$, $\bar{j}$ dan $\bar{k}$.

Sedangkan cos α , cos β dan cos γ disebut cosinus-cosinus arah dari $\bar{v}$.



Jelas bahwa $\cos \alpha = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{i}}{|\bar{v}|\,|\bar{i}|} = \dfrac{\bar{x}}{|\bar{v}|}$, karena $\bar{i} = [1, 0, 0]$ dan $|\bar{i}| = 1$

$\cos \beta = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{j}}{|\bar{v}|\,|\bar{j}|} = \dfrac{y}{|\bar{v}|}$, karena $\bar{j} = [0, 1, 0]$ dan $|\bar{j}| = 1$

$\cos \gamma = \dfrac{\bar{v} \cdot \bar{k}}{|\bar{v}|\,|\bar{k}|} = \dfrac{z}{|\bar{v}|}$, karena $\bar{k} = [0, 0, 1]$ dan $|\bar{k}| = 1$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{|\bar{v}|^2} + \frac{y^2}{|\bar{v}|^2} + \frac{z^2}{|\bar{v}|^2} = \frac{|\bar{v}|^2}{|\bar{v}|^2} = 1.$$

Maka vektor $[\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma]$ adalah vektor satuan searah $\bar{v}$

CATATAN (1)

Kita dapat teruskan pembicaraan tentang sudut-sudut arah dan cosinus-cosinus arah sebuah vektor dengan sudut arah dan cosinus arah sebuah garis lurus. Di sini sudut-sudut arah dan cosinus-cosinus arah sebuah garis lurus adalah sama dengan sudut-sudut arah dan cosinus-cosinus arah vektor yang dibawanya (vektor arahnya).

Contoh (1.1). Carilah cosinus-cosinus arah dari $\bar{a} = [2, -2, 1]$ dan cosinus-cosinus arah sebuah garis yang melalui titik P(2 , 1 , 3) dan O(2 , 2 , 3).

Jawab : Cosinus-cosinus arah dari a = [2 , –2 , 1] ialah :

$$\cos \alpha = \frac{2}{|\bar{a}|} = \frac{2}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\ ;\ \cos \beta = \frac{-2}{|\bar{a}|} = -\frac{2}{3}\ ;$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3}\ .$$ Dapat diperiksa $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos \gamma = 1$.

Sedangkan garis melalui (2 , 1 , 3) dan (2 , 2 , 3) akan membawa vektor $\overrightarrow{PQ}$ = [2–2 , 2-1 , 3–3] = [0 , 1 , 0] , Jadi $\cos \alpha = 0$.

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{0+1+0}} = 1 \text{ dan } \cos \gamma = 0.$$

Dapat kita catat bahwa garis tersebut / / sumbu Y (vektor arahnya = $\bar{j}$).

CATATAN (2)

Bilangan arah dari sebuah garis lurus adalah bilangan-bilangan yang sebanding dengan cosinus-cosinus arah garis lurus tersebut. Kita sebut bilangan-bilangan arah tersebut a , b , c maka : $\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b} = \frac{\cos \gamma}{c}$,

atau $a : b : c = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$

Hubungan antara bilangan arah dan cosinus arah adalah sebagai berikut :

$\frac{\cos \alpha}{a} = \frac{\cos \beta}{b} = \frac{\cos \gamma}{c}$ misalkan ; λ , jadi $\cos \alpha = a\lambda$

$\cos \beta = b\lambda$

$\cos \gamma = c\lambda$

dan $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \lambda^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$ berarti

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \text{jadi } \cos \alpha = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\text{cox } \beta = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{dan } \cos \gamma = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

CATATAN (3). Kita lihat bahwa cosinus-cosinus arah dari suatu vektor sebanding dengan komponen-komponennya, $\cos \alpha = x \frac{x}{|\bar{v}|}$, $\cos \beta = \frac{y}{|\bar{v}|}$

dan $\cos \gamma = \frac{z}{|\bar{v}|}$; berarti $x : y : z = \cos \alpha : \cos \beta : \cos \gamma$,

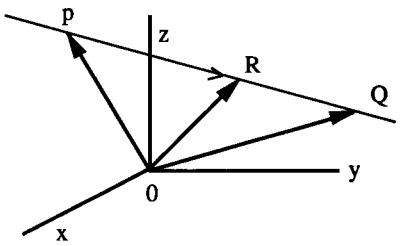
maka komponen-komponen vektor x , y , z merupakan bilangan-bilangan arah garis lurus yang membawanya.

CONTOH (1.2). Carilah bilangan arah garis yang melalui titik P(3 , 2 , 1) dan Q(1 , 2 , 3). Garis , $\overrightarrow{PQ}$ = [1-3 , 2-2, 3-1] = [-2 , 0 , 2] sebagai vektor arahnya, jadi bilangan-bilangan arahnya adalah -2,0 dan 2.

1.4. KOORDINAT TITIK YANG MEMBAGI SEGMEN GARIS ATAS PERBANDINGAN TERTENTU

$P(x_1 , y_1 , z_1)$, $Q(x_2 , y_2 , z_2)$ dan titik $R(x_R , y_R , z_R)$ pada garis lurus melalui P dan Q , membagi $|\overrightarrow{PQ}|$ atas perbandingan $|\overrightarrow{PR}| : |\overrightarrow{PQ}| = \lambda$

Jadi $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{PQ} = \lambda [x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1]$,
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = [x_1 , y_1 , z_1] + \lambda [x_2 - x_1, y_2 - y_1 , z_2 - z_1]$.



Jadi : $x_R = x_1 + \lambda (x_2 - x_1)$
$y_R = y_1 + \lambda (y_2 - y_1)$
$z_R = z_1 + \lambda (z_2 - z_1)$

Bila R terletak pada perpanjangan QP, maka λ negatip.
Bila R titik tengah PQ, berarti $\lambda = {}^1/_2$, diperoleh :

$$x_R = \frac{x_1 + x_2}{2} \; ; \; y_R = \frac{y_1 + y_2}{2} \; ; \; z_R = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

CONTOH (7.3). Carilah koordinat titik R pada garis PQ, bila PR = 2RQ dan P(1 , 2 , 0) , Q(3 , 1 , 2) . Jadi $\lambda = 2/3$, berarti :

P R Q

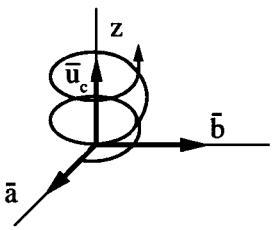
$x_R = 1 + 2/3.(3-1) = 7/3$;

$x_R = 2 + 2/3.(1-2) = 4/3$;

$z = 0 + 2/3. (2-0) = 4/3$. Jadi R = (7/3, 4/3, 4/3).

1.5. CROSS PRODUCT (PRODUK VEKTOR)

Produk vektor $\bar{a}$ x $\bar{b}$ (baca : "a cross b") menghasilkan sebuah vektor (sebutlah $\bar{c}$) yang panjang adalah perkalian panjang vektor $|\bar{a}|$ serta $|\bar{b}|$ dan sinus sudut antara $\bar{a}$ dengan $\bar{b}$ dikalikan dengan vektor dari $\bar{c}$ yakni $\bar{u}_c$, sedangkan arah dari $\bar{c}$ adalah tegak lurus $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ menurut sistem tangan kanan :



$\bar{a} \times \bar{b} = \{ |\bar{a}| \ |\bar{b}| \ \sin\theta \} \bar{u}_c$
$\bar{u}_c$ = vektor satuan terarah $\bar{c}$.
$(0 \leq \theta \leq \pi)$.

CATATAN (4). Cross produk hasilnya adalah sebuah vektor. Untuk menghitung cross produk $\bar{a} = [a_1 , a_2 , a_3]$ dangan $\bar{b} = [b_1 , b_2 , b_3]$ kita pakai determinan :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

CONTOH (1.4). $\bar{a} = [1 , 1 , 3] , \bar{b} = [2 , 0 , 3]$ maka :

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k} = 3[1 , 0 , 0] + 3[0 , 1 , 0] - 2[0 , 0 , 1]$$
$$= [3 , 3 , -2] ,$$

Panjang $|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}.$

CATATAN (5). Cross produk tidak komutatip : $\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a}$ melainkan $\bar{a} \times \bar{b} = - \bar{b} \times \bar{a}$.
Hal ini jelas karena determinan $\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

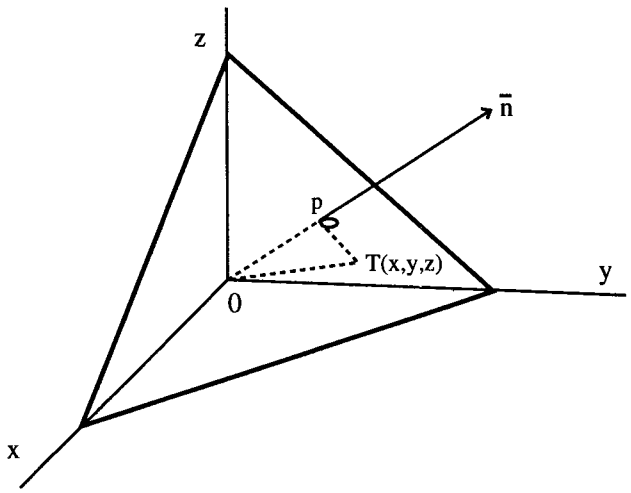
1.6. BIDANG RATA

Kita telah tahu bahwa persamaan umum sebuah bidang rata V adalah: $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, atau secara simbolis $V = 0$.
Vektor $\bar{n} = [A , B , C]$ disebut vektor normal dari bidang dan bersifat tegak lurus pada bidang tersebut. Sudut arah dari V sama dengan sudut arah dari $\bar{n}$, sedang cosinus arah dari V adalah cosinus arah dari $\bar{n}$. Jadi bilangan-bilangan arah dari V adalah komponen-komponen dari $\bar{n}$ yaitu A , B , C.

CONTOH (1.5). Persamaan $2x - 3y + z + 1 = 0$, adalah sebuah bidang rata dengan bilangan-bilangan arah 2, -3 , 1 dan mempunyai normal $\bar{n} = [2 , -3 , 1]$.

CONTOH (1.6). Carilah vektor normal bidang datar $\bar{x} = [1 , 2 , 1] + \lambda[1 , 1 , 3] + \mu [2 , 0 , 3]$
Maka jelas bahwa $\bar{n}$ tegak lurus vektor-vektor [1 , 1 ,3] dan [2 , 0 , 3],
dengan cross produk, $\bar{n} = [1 , 1 , 3] \times [2 , 0 , 3] = [3 , 3 , -2]$.

1.7. PERSAMAAN NORMAL BIDANG RATA



Misalkan p jarak dari 0(0 , 0 , 0) ke bidang V, sedang α , β , γ adalah sudut-sudut arah $\bar{n}$ (yang tegak lurus V)
Kita ambil $\bar{n} = [\cos \alpha, \cos \beta , \cos \gamma]$
yang panjangnya =
$\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = 1$, sebagai vektor normal satuan dari bidang V.

$\overrightarrow{OT} = [x , y , z]$. Proyeksi $\overrightarrow{OT}$ pada $\overrightarrow{OP}$ adalah $| \overrightarrow{OT}.\overrightarrow{OP} | = | [x , y , z]$.
$[\cos \alpha , \cos \beta , \cos \gamma] | = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$ (harus positip)
Persamaan : $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$, disebut persamaan normal *HESSE* dari bidang.

CATATAN (6). Bila bidang melalui 0(0 , 0 , 0) maka p = 0.

CATATAN (7). Pengubahan persamaan umum $Ax + By + Cz + D = 0$ ke bentuk normal adalah sebagai berikut :
Hubungan antara bilangan arah A , B , C dan cosinus arah :

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cox \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} = -\frac{p}{D} \quad \text{misalkan} = \lambda$$

Jadi $\cos \alpha = A\lambda$, $\cos \beta = B\lambda$, $\cos \gamma = C\lambda$ dan $p = -D\lambda$
Sedangkan $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \lambda^2 (A^2 + B^2 + C^2) = 1$,

$$\text{Jadi } \lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} , \cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} , \cos \beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\ \gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ ,\quad p\ = \frac{-D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Tanda ± dipilih salah satu sehingga p berharga positip.

CONTOH (1.7). Carilah persamaan normal dari bidang $3x + 2y + z = 3$.
Maka untuk mengubah ke bentuk normal $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$.

$$p = \frac{-D}{\pm\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$ (kita pilih tanda + supaya p positip),

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{14}}\ ,\quad \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{14}}\ ,\quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}\ .$$

Jadi diperoleh : $\frac{3x}{\sqrt{14}} + \frac{2y}{\sqrt{14}} + \frac{z}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$.

1.8. SUDUT ANTARA DUA BIDANG RATA

Sudut antara 2 bidang rata adalah sudut antara vektor-vektor normalnya.

Misalnya bidang-bidang $V_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ dan
$V_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, maka normal-normalnya
$\bar{n}_1 = [A_1 , B_1 , C_1]$, $\bar{n}_2 = [A_2 , B_2 , C_2]$.

Sudut antara $\bar{n}_1$ dan $\bar{n}_2$;

$$\cos \theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1|\ |\bar{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ .\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

CONTOH (1.8). Sudut antara bidang $x + y + z + 3 = 0$ dan $2x + y + 2z + 11 = 0$ adalah :

$$\cos \theta = \frac{1.2 + 1.1 + 1.2}{\sqrt{1 + 1 + 1}\ .\ \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{3\sqrt{3}}$$ atau $\theta = \text{arc cos}\ \frac{5}{3\sqrt{3}}$.

CATATAN (8).

Syarat sejajar : Kalau V_1 dan V_2 sejajar berarti $\bar{n}_1$ dan $\bar{n}_2$ adalah sama (atau berkelipatan) , jadi V_1 / / V_2 bila :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$ atau bila :

$A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$.

CATATAN (9). Apabila berlaku $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$ dan $D_1 = D_2$ maka bidang V_1 dan V_2 berhimpit.

CONTOH (1.9). Carilah bidang V_2 yang / / bidang $V_1 \equiv x + 2y + 2z + 9 = 0$ dan melalui titik (2 , 0 , 0) . Maka V_2 mempunyai bentuk $x + 2y + 2z + D_2 = 0$ dan karena melalui (2 , 0 , 0) maka harus terpenuhi 2.1 + 2.0 + 2.0 + $D_2 = 0$ atau $D_2 = -2$.
Jadi $V_2 \equiv x + 2y + 2z - 2 = 0$.

CATATAN (10)

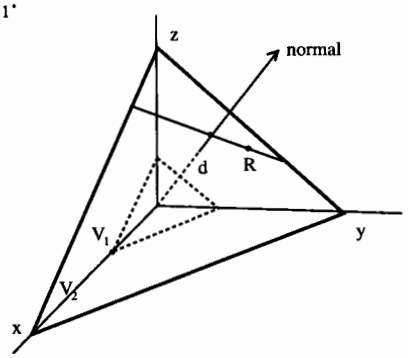
Syarat tegak lurus : Kalau V_1 dan V_2 saling tegak lurus maka $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$, berarti juga $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$ atau $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

CONTOH (1.10). Carilah bidang V_2 yang $\perp$ bidang $V_1 = x + y + z = 1$, melalui titik awal (0 , 0 , 0) dan titik (1 , 1 , 0).
Syaratnya : $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ atau $A_2 + B_2 + C_2 = 0$ ..... (1).
$V_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 z + D = 0$ melalui (0 , 0 , 0) berarti D = 0 dan melalui (1 , 1 , 0) berarti $A_2 + B_2 = 0$ ..... (2).

Dari (1) dan (2) diperoleh $C_2 = 0$ dan $A_2 = -B_2$.
Jadi $V_2 \equiv A_2x + B_2y + 0z + 0 = 0$ atau $-B_2x + B_2y = 0$ dan kalau kita bagi dengan B_2 diperoleh $V_2 : -x + y = 0$.

1.9. JARAK DUA BIDANG RATA YANG SEJAJAR DAN JARAK SUATU TITIK KE BIDANG RATA

Pandang sebuah bidang $V_1 \equiv x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p$.
Kita hendak menentukan jarak sebuah titik $R(x_1 , y_1 , z_1)$ ke bidang V_1 tersebut, Kita buat melalui R, bidang V_2 / / V_1.



Jadi V_1 dan V_2 mempunyai normal yang sama, sedangkan jarak dari 0 ke V_2 adalah $| p \pm d |$ (tergantung letak V_2 dari 0 dibandingkan V_1).
$V_2 = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \beta + z \cos \gamma = | p \pm d |$
Karena $R(x_1 , y_1 , z_1)$ pada V_2 berarti terpenuhi $x_1 \cos \alpha + \gamma_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma = | p \pm d |$

Jadi $d = | x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p |$ adalah jarak sebuah titik $R(x_1 , y_1 , z_1)$ ke bidang $V_1 = x \cos \alpha + y \cos z \cos \gamma = p$, atau jarak dua buah bidang V_1 dan V_2 yang sejajar.
Kalau bidang mempunyai persamaan berbentuk :
$V_1 = Ax + By + Cz + D = 0$ maka jarak $R (x_1 , y_1 , z_1)$ ke V_1 :

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

CONTOH (1.11). Jarak titik (7 , 3 , 4) ke bidang $6x - 3y + 2z - 13 = 0$

adalah : $d = \left| \frac{6.7-3.3+2.4-13}{\sqrt{36 + 9 + 4}} \right| = 4$.

Jarak antara bidang $V = x + y + z = 2$ dan $W = x + y + z = 5$
dapat kita cari sebagai berikut : Kita pilih sebuah titik pada W, misalnya (0 , 0 , 5), lalu kita cari jarak titik tersebut ke V :

$$d = \left| \frac{1.0+1.0+1.5-2}{\sqrt{1 + 1 + 1}} \right| = \sqrt{3}$$

1.10. PERSAMAAN BIDANG RATA DIKETAHUI MELALUI SATU TITIK

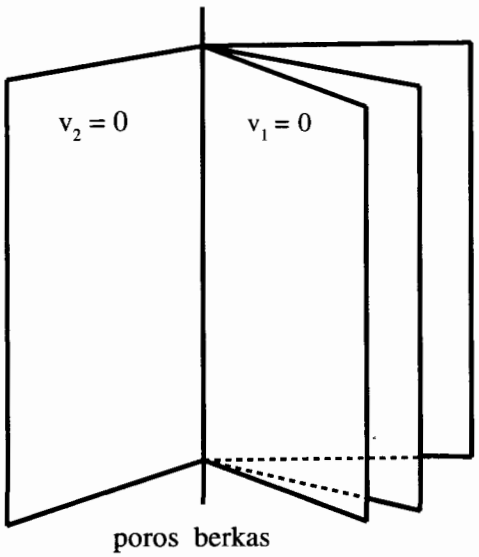
Misalkan $V \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ melalui sebuah titik $R(x_1 , y_1 , z_1)$ maka terpenuhi : $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ atau $D = - Ax_1 - By_1 - Cz_1$ dan bila disubstitusikan ke V diperoleh $Ax + By + Cz - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = 0$.
Jadi bentuk umum persamaan bidang melalui 1 titik :
$A(a - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$.

CONTOH (1.12). Carilah persamaan bidang melalui (1 , 1 , 1) dan / / bidang $x + y + 2z = 3$.

Persamaan bidang melalui (1 , 1 , 1) berbentuk :
$A(x - 1) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0$, dan karena / / bidang
$x + y + 2z = 3$, berarti $A = 1$, $B = 1$, $C = 2$
Jadi bidang yang diminta :
$(x - 1) + (y - 1) + 2(z - 1) = 0$ atau : $x + y + 2z - 4 = 0$.

1.11. BERKAS BIDANG RATA

Misalkan ada 2 bidang $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ maka untuk λ_1 dan λ_2 skalar-skalar yang berubah-ubah, persamaan $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 = 0$ menyatakan kumpulan bidang-bidang yang berpotongan pada garis potong $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$, yang disebut berkas bidang. Kalau $\lambda_1 \neq 0$ maka berkas menjadi $V_1 + \lambda_2/\lambda_1 V_2 = 0$ atau $V_1 + \lambda V_2 = 0$



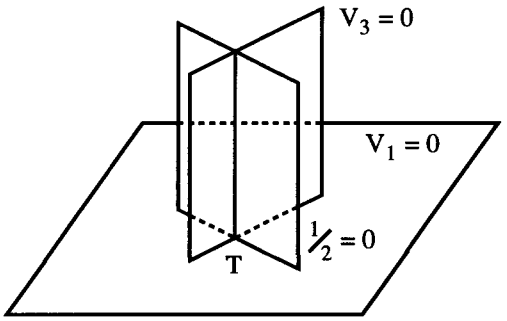
Bila $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$ sejajar maka bentuk $V_1 + \lambda V_2 = 0$ menyatakan kumpulan bidang-bidang / / $V_1 = 0$ dan $V_2 = 0$, dan kita sebut berkas bidang sejajar.

CONTOH (1.13). Carilah persamaan bidang V_1 yang melalui titik (0, 0, 1) dan melalui garis potong bidang-bidang $V_2 = x + y = 1$ dan $V_3 = x + 2y - z = 0$.

Maka dengan berkas bidang : $V_1 = V_2 + \lambda V_3 = 0$ atau :
$x + y - 1 + \lambda (x + 2y - z) = 0 \rightarrow (1 + \lambda)x + (1 + 2\lambda) y - \lambda z - 1 = 0$
dan karena melalui (0 , 0 , 1) berarti $(1 + \lambda)0 + (1 + 2\lambda)0 - \lambda - 1 = 0$.
Jadi $\lambda = -1$
Maka $V_1 \equiv (1 - 1)x + (1 - 2)y - (-1)z - 1 = 0$ atau $y - z + 1 = 0$.

1.12. JARINGAN BIDANG RATA

Pandang bidang-bidang $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ dan $V_3 = 0$ yang tidak melalui satu garis lurus yang sama (bukan dalam satu berkas).



Bentuk $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ menyatakan kumpulan bidang-bidang yang melalui titik potong ke 3 bidang $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ itu.
(Dalam gambar melalui titik T) dan kumpulan bidang-bidang tersebut disebut jaringan bidang.

CONTOH (1.14). Carilah persamaan bidang W yang sejajar bidang
$V_1 \equiv x + y + z = 1$ dan melalui titik potong bidang-bidang
$V_2 \equiv x = 3$, $V_3 \equiv y = 4$, $V_4 \equiv z = 0$

Jawab : Maka W : $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ atau : $x - 3 + \lambda (y - 4) + \mu z = 0$
$\rightarrow x + \lambda y + \mu z - (3 + 4\lambda) = 0$ ..... (*).
Karena / / dengan $x + y + z = 1$ bilangan-bilangan arah dari W adalah 1 , 1 , 1 berarti $\lambda = 1$ dan $\mu = 1$ (dari pers. (*)).
Maka (*) menjadi : $x + y + z - 7 = 0$. adalah persamaan bidang W yang diminta.

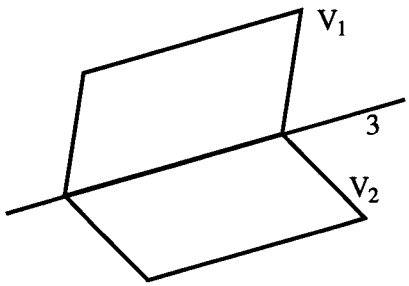
1.13. GARIS LURUS DI R^3

Di dalam Ilmu Ukur Analitik Ruang, garis lurus dinyatakan sebagai perpotongan 2 buah bidang rata yang tidak sejajar. Kita tulis, misalnya garis lurus g mempunyai persamaan :

$$g : \left.\begin{array}{l} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

CONTOH (1.15). Garis lurus g mempunyai persamaan : $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z + 1 = 0 \end{array}\right\}$

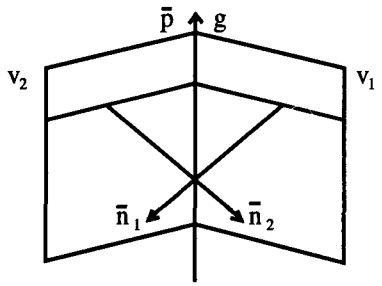
maka g adalah garis potong dari bidang-bidang :
V_1 : x + y + 2z – 3 = 0 dan
V_2 : 2x – y – 2z + 1 = 0 .



1.14. MENCARI BILANGAN ARAH GARIS LURUS

Pandang persamaan garis g : $\left.\begin{array}{l} V_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ V_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$

Maka $\bar{n}_1 = [A_1 , B_1 , C_1]$, $\bar{n}_2 = [A_2 , B_2 , C_2]$
Maka jelas bahwa vektor arah garis g adalah vektor $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ (atau $\bar{n}_2 \times \bar{n}_1$)



Jadi $p = [a , b , c] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} , - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$

Atau biasa ditulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccccc} & \overbrace{\quad\quad} & & & \overbrace{\quad\quad} & \\ A_1 & B_1 & C_1 & A_1 & B_1 & \\ A_2 & B_2 & C_2 & A_2 & B_2 & \\ & & \underbrace{\quad\quad} & & & \\ & & b & & & \end{array} \qquad \begin{matrix} a \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} c \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

CONTOH (1.16) Carilah bilangan arah garis g : $\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z + 2 = 0 \\ -x - y + 2z + 7 = 0 \end{array}\right\}$

Kita tulis : $\begin{array}{cccccc} & & \overline{\text{a}} & & \overline{\text{c}} & \\ 2 & & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & 2 & -1 & -1 \\ & & & \underline{\quad} & & \\ & & & \text{b} & & \end{array}$, maka $a = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$,

$b = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -7$ dan $c = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$.

1.15. BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN GARIS LURUS

Dari bab 1 kita telah mengetahui persamaan parameter garis lurus di R^3 yang melalui $A(x_1 , y_1 , z_1)$ dan $B(x_2 , y_2 , z_2)$:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{aligned} \qquad \text{dimana } x_2 - x_1 , y_2 - y_1 \text{ dan } z_2 - z_1$$

adalah bilangan-bilangan arah yang sebanding dengan cosinus-cosinus arah.
Jadi dapat kita tulis : $x = x_1 + r \cos \alpha$
$y = y_1 + r \cos \beta$
$z = z_1 + r \cos \gamma$, r adalah parameter yang menyatakan jarak titik (x_1 , y_1 , z_1) ke titik (x , y , z) pada garis tersebut.

Kalau parameter-parameter dilenyapkan, diperoleh persamaan linier :

(*) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$: Persamaan garis melalui 2 titik

(x_1 , y_1 , z_1) dan (x_2 , y_2 , z_2) , asalkan tidak ada $x_2 - x_1 , y_2 - y_1$ ataupun $z_2 - z_1$ yang sama dengan nol.

(**). $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$ atau

$\dfrac{x - x_1}{\cos \alpha} \quad \dfrac{y - y_1}{\cos \beta} \quad \dfrac{z - z_1}{\cos \gamma}$: persamaan garis melalui satu titik

dan mempunyai bilangan-bilangan arah a , b , c atau cosinus-cosinus arah $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ yang $\neq 0$.

CONTOH (1.17). Carilah persamaan garis melalui (3 , 2 , 1) dan (0 , 1 , 0).

Maka persamaan liniernya : $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$

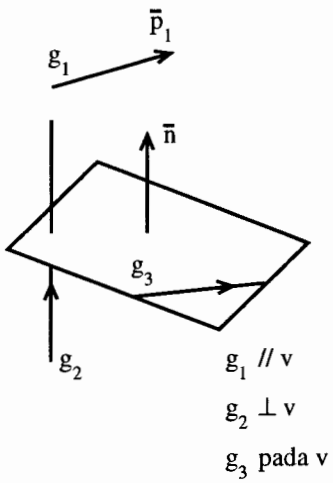
Bilangan-bilangan arahnya dapat diambil –3 , –1 dan –1 .

1.16. GARIS DAN BIDANG RATA

Pandang garis lurus dengan vektor arah [a , b , c] dan bidang rata Ax + By + Cz + D = 0 (dengan vektor normal [A , B , C]).
Maka :

(1). Garis / / bidang, berarti vektor arah garis tegak lurus vektor normal bidang, Sehingga syarat garis / / bidang :
[a , b , c]. [A , B , C] = 0 atau Aa + Bb + Cc = 0 .

(2). Garis tegak lurus bidang, berarti vektor arah garis sama (sejajar/berkelipatan) dengan vektor normal bidang. Sehingga syarat garis tegak lurus bidang :
[a , b , c] = λ [A , B , C] atau A/a = B/b = C/c (atau A = a , B = b , C = c).



(3). Garis terletak seluruhnya pada bidang, berarti vektor arah garis tegak lurus vektor normal bidang dan bila ditentukan suatu titik sembarang pada garis maka koordinat titik tersebut memenuhi persamaan bidang.
[a , b , c] . [A , B , C] = 0 → Aa + Bb + Cc = 0
dan $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, untuk setiap (x_1 , y_1 , z_1) pada garis.

CONTOH (1.18). Buktikan bahwa garis g : $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$

sejajar bidang $x + y + z + 7 = 0$. Karena $Aa + Bb + Cc = 1.2 + 1.-3 + 1.1 = 0$ maka benar garis tersebut sejajar bidang ; namun tak terletak pada bidang, sebab suatu titik misalnya (3, –2 , 0) pada garis tak memenuhi kalau kita masukkan ke persamaan bidang $x + y + z + 7 = 0$ tersebut.

1.17. GARIS HUBUNG TERPENDEK DAN JARAK DUA GARIS BERSILANGAN

Pandang 2 garis lurus g_1 : $\left.\begin{matrix} V_1 = 0 \\ V_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ dan g_2 : $\left.\begin{matrix} V_3 = 0 \\ V_4 = 0 \end{matrix}\right\}$

Bentuk : $\left.\begin{matrix} V_1 + \lambda V_2 = 0 \\ V_3 + \mu V_4 = 0 \end{matrix}\right\}$ (λ dan μ parameter)

menyatakan garis-garis lurus yang memotong g_1 dan g_2.
Maka dengan memilih λ dan μ tertentu kita dapat menentukan garis hubung terpendek (garis tegak lurus persekutuan) antara g_1 dan g_2.

CONTOH (1.19). Carilah garis hubung terpendek antara garis-garis :
g_1 : $\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ dan g_2 : $\left.\begin{matrix} x + y = 1 \\ x + z = 0 \end{matrix}\right\}$

Kita kerjakan sebagai berikut : Sebut g_3 garis hubung terpendek dari g_1 dan g_2 maka
g_2 : $\left.\begin{matrix} x + \lambda y = 0 \\ x + y - 1 + \mu(x + z) = 0 \end{matrix}\right\}$

dengan syarat $g_3 \perp g_1$ dan g_2.

Bilangan-bilangan arah g_1 :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad , \quad a_1 = 0 \ , \ b_1 = 0 \ , \ c_1 = 1.$$

Bilangan-bilangan arah g_2 :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad , \quad a_2 = 1 \ , \ b_2 = -1 \ , \ c_2 = -1$$

Bilangan-bilangan arah g_3 :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \lambda & 0 & 1 & \lambda \\ 1+\mu & 1 & \mu & 1+\mu & 1 \end{array} \quad , \quad a_3 = \lambda\mu \ , \ b_3 = -\mu \ , \ c_3 = 1 - \lambda - \lambda\mu$$

$g_3 \perp g_1$ berarti $a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0 \rightarrow 1 - \lambda - \lambda\mu = 0$ ..... (1)
$g_3 \perp g_2$ berarti $a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0 \rightarrow \lambda\mu + \mu - 1 + \lambda + \lambda\mu = 0$ ..... (2)
Dari (1) dan (2) diperoleh $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 0$
dan $\lambda_2 = -2$, $\mu_2 = -2$
Jadi kita peroleh g_3 perpotongan bidang-bidang : $\left.\begin{matrix} x + y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ (*)

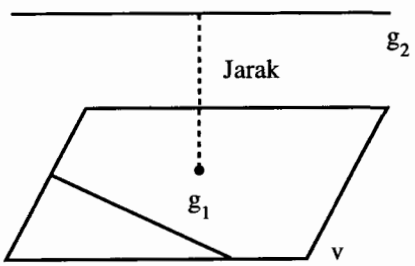
dan $\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ -x + y - 2z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$ (**) Karena bidang-bidang pada (*) adalah

sejajar (berpotongan di ∞) maka sebagai g_3 kita peroleh :

$\left.\begin{matrix} x - y = 0 \\ -x + y - 2z - 1 = 0 \end{matrix}\right\}$

Jarak 2 garis bersilangan : Kita peroleh dengan membuat sebuah bidang melalui salah satu garis dan sejajar garis yang kedua.
Kemudian dari garis kedua tersebut kita pilih sebuah titik dan kita tentukan jarak dari titik tersebut ke bidang yang kita buat tadi.

CONTOH (1.20). Dari contoh (1.19) di atas kita hendak mencari jarak g_1 dan g_2 . Misalnya kita buat sebuah bidang melalui g_1 dan / / g_2 .



Sebut bidang itu V, maka $V = x + \lambda y = 0$ dan karena / / g_2 , normal bidang harus : $a_2.1 + b_2\lambda + c_20 = 0$ atau $1.1 + (-1)\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$.
Jadi $V = x + y = 0$.

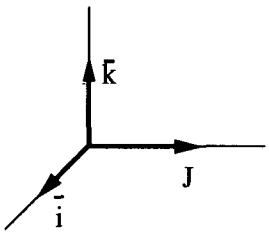
Pilih sebuah titik pada g_2 misalnya (0 , 1 , 0) dan kita cari jarak dari (0 , 1 , 0) ke bidang $V = x + y = 0$.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$; jarak yang diminta.

1.18. SOAL-SOAL DAN PEMECAHANNYA

(1.21). Bila $\bar{i} = [1 , 0 , 0]$, $\bar{j} = [0 , 1 , 0]$, $\bar{k} = [0 , 0 , 1]$ adalah vektor satuan yang saling $\perp$, tentukan $\bar{i} \times \bar{j}$, $\bar{j} \times \bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{i}$, 1×1 , $\bar{j} \times \bar{j}$, $\bar{k} \times \bar{k}$.

Penyelesaian :



Dengan sistem tangan kanan

$\bar{i} \times \bar{j} = \{ |\bar{i}| |\bar{j}| \sin 90^o \} \bar{k} = \bar{k}$

$\bar{j} \times \bar{k} = \{ |\bar{j}| |\bar{k}| \sin 90^o \} \bar{i} = \bar{i}$

$\bar{k} \times \bar{i} = \{ |\bar{k}| |\bar{i}| \sin 90^o \} \bar{j} = \bar{j}$

Juga dengan mudah kita dapat

$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$, $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$, $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$.

sedangkan $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$,

karena $\sin 0^o = 0$.

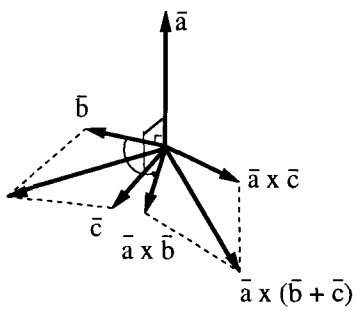
CONTOH (1.22). Buktikan bahwa : $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$.

Bukti : (1). Hal khusus dimana $\bar{a} \perp \bar{b}$ dan $\bar{a} \perp \bar{c}$.

Karena $\bar{a} \perp \bar{b} \rightarrow (\bar{a} \times \bar{b}) \perp$ bidang $(\bar{a} , \bar{b})$

dengan $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin 90^o = |\bar{a}| |\bar{b}|$

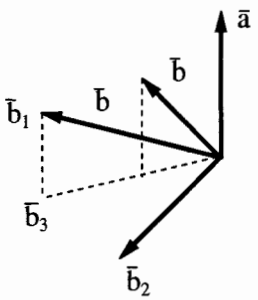
Jadi $\bar{a} \times \bar{b}$ ekivalen dengan mengalikan vektor $\bar{b}$ dengan $|\bar{a}|$ lalu merotasikan 90^o sesuai dengan gambar.



Demikian pula halnya untuk $\bar{a} \times \bar{c}$ dan $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$.

Karena $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$ adalah diagonal jajaran genjang dengan sisi-sisi $\bar{a} \times \bar{b}$ dan $\bar{a} \times \bar{c}$ maka $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

(ii). Hal umum : Uraikan $\bar{b}$ menjadi 2 vektor $\bar{b}_1 \perp \bar{a}$ dan $\bar{b}_2 // \bar{a}$, dimana $\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2$.
Kalau ψ sudut antara $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ maka $\bar{b}_2 = \bar{b} \sin \psi$ sehingga $|\bar{a} \times \bar{b}_2| = |\bar{a}| \, |\bar{b} \sin \psi|$
$= |\bar{a}| \, |\bar{b}| \sin \psi = |\bar{a} \times \bar{b}|$.
Juga arah dari $a \times \bar{b}_2$ = arah dari $\bar{a} \times \bar{b}$.
Jadi $\bar{a} \times \bar{b}_2 = \bar{a} \times \bar{b}$.
Hal yang sama dikerjakan terhadap $\bar{c}$, berarti $\bar{a} \times \bar{c}_2 = \bar{a} \times \bar{c}$



Karena $\bar{b} - \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{c}_1 + \bar{c}_2 = (\bar{b}_1 + \bar{c}_1) + (\bar{b}_2 + \bar{c}_2)$
maka $\bar{a}_1 + (\bar{a}_2 + \bar{c}_2) = \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c})$.
Karena $\bar{a}$ dan c_2 tegak lurus a maka (menurut bukti (1))
di atas $\bar{a} \times (\bar{b}_2 + \bar{c}_2) = (\bar{a} \times \bar{b}_2) + (\bar{a} \times \bar{c}_2)$
$\rightarrow \bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{a} \times \bar{c})$

Secara mudah berlaku pula $(\bar{b} + \bar{c}) \times \bar{a} = (\bar{b} \times \bar{a}) + (\bar{c} + \bar{a})$

(1.23). Buktikan bahwa bila $\bar{a} = [a_1 , a_2 , a_3]$, $\bar{b} = [b_1 , b_2 , b_3]$ maka

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Bukti : $\bar{a} = [a_1 , a_2 , a_3] = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$ dan
$\bar{b} = [b_1 , b_2 , b_3] = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}$. Berdasarkan (1.22) :
$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}) \times (b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}) = (a_1 \bar{i} \times b_1 \bar{i}) +$
$(a_1 \bar{i} \times b_2 \bar{j}) + (a_1 \bar{i} \times b_3 \bar{k}) + (a_2 \bar{j} \times b_1 \bar{i}) + (a_2 \bar{j} \times b_2 \bar{j})$
$+ (a_2 \bar{j} \times b_3 \bar{k}) + (a_3 \bar{k} \times b_1 \bar{i}) + (a_3 \bar{k} \times b_2 \bar{j}) + (a_3 \bar{k} \times b_3 \bar{k})$

Dengan melihat hasil pada soal 1.21 di atas, didapat seterusnya $\bar{a} \times \bar{b} = a_1 b_2 \bar{k} - a_1 b_3 \bar{j} - a_2 b_1 \bar{k} + a_2 b_3 \bar{i} + a_3 b_1 \bar{j} - a_3 b_2 \bar{i}$

$= \bar{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) - \bar{j} (a_1 b_3 - a_3 b_1) + \bar{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(1.24). Carilah vektor $\bar{c}$ yang panjangnya = 1 dan tegak lurus vektor-vektor a = [1 , 2 , 1] dan b = [0 , 1 , 2].

Penyelesaian : Cross produk $\bar{a} \times \bar{b}$ dan $\bar{b} \times \bar{a}$ akan menghasilkan vektor yang $\perp \bar{a}$ dan $\bar{b}$.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = [3 , -2 , 1]$$

dan $\bar{b} \times \bar{a} = -\bar{a} \times \bar{b} = [-3 , 2 , -1]$.

Jadi vektor $\bar{c}$ yang $\perp \bar{a}$ dan $\bar{b}$ serta panjangnya = 1 adalah :

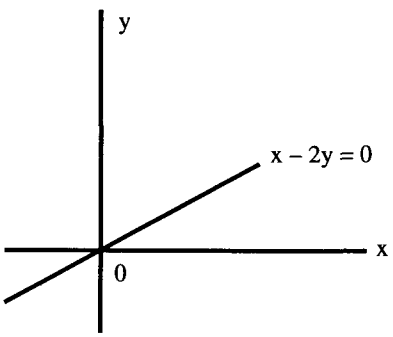
$$c = \frac{[3 , -2 , 1]}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}} [3 , -2 , 1]$$

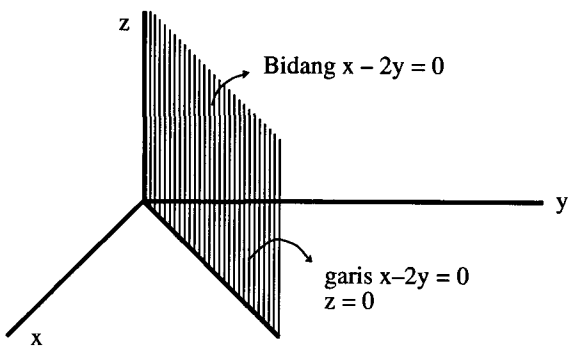
$$\text{dan } c = \frac{[-3 , 2 , -1]}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{14}} [-3 , 2 , -1] .$$

(1.25). Kedudukan istimewa manakah dimiliki bidang-bidang berikut, gambarlah pada suatu koordinat siku-siku.

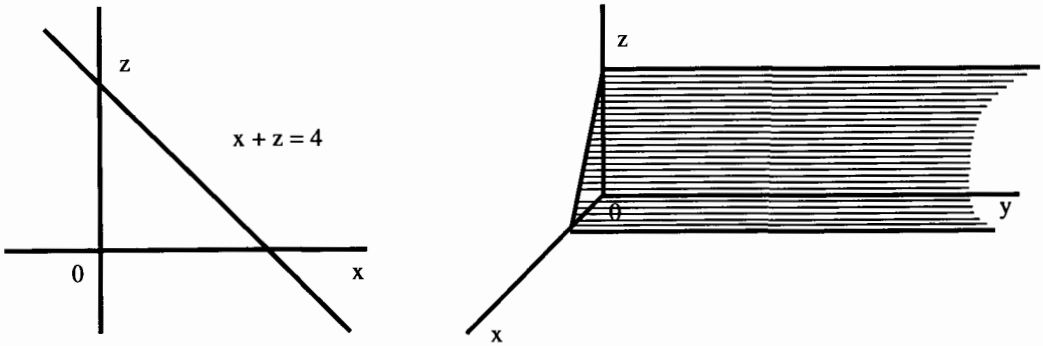
(i) $x = 2y$ (ii) $x + z = 4$ (iii) $x + y - z = 0$.

Penyelesaian : (i) Bidang $x = 2y$ atau $x - 2y = 0$ tidak mengandung z dan konstantanya = 0 , berarti melalui sumbu Z dan garis potongnya dengan bidang XOY adalah $\left.\begin{matrix} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$



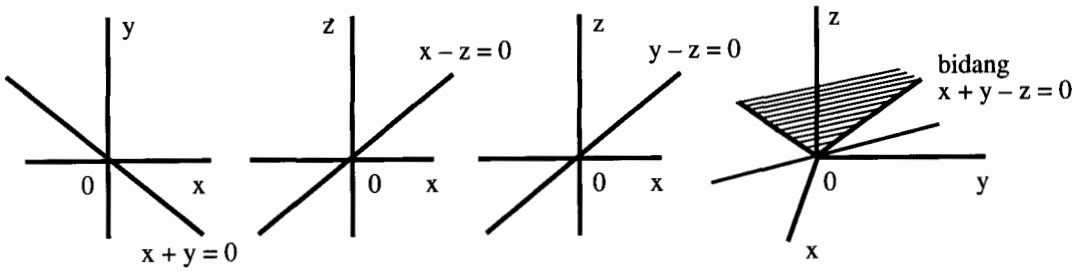


(ii). $x + z = 4$; karena tidak mengandung y berarti / / sumbu Y dan garis potongnya dengan bidang XOZ adalah garis $x + z = 4$
$y = 0$



(iii) $x + y - z = 0$, konstantanya = 0, bidang harus melalui 0(0 , 0 , 0). Garis potong dengan XOY adalah $x + y = 0$
$x = 0$

dengan XOZ : $x - z = 0$, $y = 0$ dan dengan YOZ : $y - z = 0$, $x = 0$



(1.26). Tentukan jarak dari titik (0 , 0 , 0) ke bidang $3x + 2y - z = 2$ dan juga jarak titik (1 , 1 , 2) ke bidang tersebut.

Penyelesaian : Jarak dari (0 , 0 ,0) :

$$d = \left| \frac{3.0 + 2.0 - 1.0 - 2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{-2}{\sqrt{14}} \right| = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

Jarak dari (1 , 1 , 2) :

$$d = \frac{3.1 + 2.1 - 1.2 - 2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

(1.27). Cari persamaan bidang melalui P(1 , 0 , -2) dan tegak lurus ke 2 bidang V_1 = 2x + y = z = 2 dan $V_2 \equiv x - y - z = 3$.

Penyelesaian : Persamaan bidang melalui (1 , 0 , –2) :

$V \equiv A(x - 1) + By + C(z + 2) = 0$
$V \perp V_1$ jadi $2A + B - C = 0$ ..... (1).
$V \perp V_2$ jadi $A - B - C = 0$ ..... (2).

Kita jumlahkan (1) dan (2) diperoleh $3A = 2C$ atau $A = 2/3C$ dan dari (2) diperoleh $B \equiv -1/3C$.
Jadi persamaan $V = 2/3C(x - 1) - 1/3Cy + C(z + 2) = 0$ atau $2x - y + 3z + 4 = 0$

(1.28). Cari persamaan bidang yang / / 2x – 3y – 6z = 14 dan berjarak 5 dari titik (0 , 0 , 0).

Penyelesaian : Karena / / dengan 2x – 3y – 6z = 14 , vektor normal bidang tersebut [A , B , C] = [2 , –3 , –6] , sebut bidang tersebut W , maka W = 2x – 3y – 6z + D = 0 . Jarak (0 , 0 , 0) ke bidang W :

$$d = \left| \frac{D}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right| = \left| \frac{D}{7} \right| = 5 \text{ (diketahui)}$$

Jadi $D^2 = 49.25$ atau $D = \pm 35$. Jadi $W = 2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$

(1.29). Carilah persamaan bidang melalui A(2 , 1 , 2) , 0(0 , 0 , 0) dan tegak lurus bidang 2x – y + z + 2 = 0 .

Penyelesaian : Bidang melalui (0 , 0 , 0) maka D = 0
Bidang melalui (2 , 1 , 2) maka 2A + B + 2C = 0 , dan tegak lurus 2x – y + z + 2 = 0 , maka 2A – B + C = 0.
Dari ke 2 persamaan di atas kita peroleh $A = -\frac{3}{4}C$, $B = -\frac{1}{2}C$.
Maka persamaan bidang tersebut $V = -\frac{3}{4}Cx - \frac{1}{2}Cy + Cz = 0$ atau $3x + 2y - 4z = 0$.

(1.30). Carilah persamaan bidang melalui sumbu Z dan tegak lurus bidang $W \equiv x - y - z = 3$.
Penyelesaian : Sumbu Z adalah garis potong bidang $x = 0$ dan $y = 0$.
Kita pergunakan berkas bidang $x + \lambda y = 0$, yaitu kumpulan bidang-bidang yang melalui sumbu Z . Karena $\perp$ W berarti : $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ atau $1.1 - 1.\lambda - 1.0 = 0 \rightarrow \lambda = 1$.
Maka persamaan bidang tersebut $x + y = 0$.

(1.31). Carilah bidang yang melalui titik potong bidang-bidang
$V_1 = x - y + 2z = 3$, $V_2 = 2x - 5y - 7z = 12$, $V_3 = 3x + 2y - z = 5$.
dan sejajar bidang $V_4 = 3x - y = 4$.
Penyelesaian : Kita pergunakan jaringan bilangan : $V_1 + \lambda V_2 + \mu V_3 = 0$
$\rightarrow x - y - 2z - 3 + \lambda (2x - 5y - 7z - 12) + \mu(3x + 2y - z - 5) = 0$
$\rightarrow (1+2\lambda+3\mu)\, x + (-1 - 5\lambda + 2\mu)\, y + (-2 - 7\lambda - \mu)\, z + (-3 - 2\lambda - 5\mu) = 0$.
Karena juga / / V_4 : ia berbentuk $3x - y + D = 0$.

Berarti : $(1 + 2\lambda + 3\mu) = 3$, $(-1 - 5\lambda + 2\mu) = -1$ dan $(-3 - 12\lambda - 5\mu) = 5$.
Dari ke 3 persamaan di atas diperoleh bidang yang diminta $3x - y - 155/19 = 0$ atau $57x - 19y - 155 = 0$.

(1.32). Tentukan persamaan garis lurus melalui titik P(1 , 2 , 2) dan / / garis 9 : $3x - y = 2y - z = 2z - 5$.
Penyelesaian : Kita jadikan g sebagai garis potong 2 bidang :

$$\left.\begin{matrix} 3x - y = 2z - 5 \\ 2y - z = 2z - 5 \end{matrix}\right\} \quad \text{atau} \quad \left.\begin{matrix} 3x - y - 2z + 5 = 0 \\ 2y - 3z + 5 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Kita mencari bilangan arah dari g :

$$\begin{matrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{matrix}, \quad a = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7, \quad b = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$c = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$. Karena garis yang diminta / / g maka mempunyai vektor arah [7 , 9 , 6] dan karena melalui (1 , 2 , 2), persamaannya :

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{9} = \frac{z - 2}{6}$$

(1.33). Carilah persamaan bidang W yang tegak lurus pada potongan garis AB, dimana A(–3 , 2 , 1) dan B(9 , 4 , 3) serta melalui tengah-tengah AB.
Penyelesaian : Misalnya tengah-tengah AB kita sebut C, maka

$$x_c = \frac{-3 + 9}{2} = 3 \; ; \; y_c = \frac{2 + 4}{2} = 3 \; ; \; z_c = \frac{1 + 3}{2} = 2. \; C(3,3,2).$$

vektor arah garis AB adalah [a , b , c] dimana :
$a = x_2 - x_1 = 9 + 3 = 12$
$b = x_2 - y_1 = 4 - 2 = 2$
$c = z_2 - z_1 = 3 - 1 = 2.$

Jadi persamaan bidang W yang melalui (3 , 3 , 2) dan $\perp$ garis dengan vektor arah [12 , 2 , 2] (berarti vektor tersebut adalah normal dari W), ialah $W = 12(x - 3) + 2(y - 3) + 2(z - 2) = 0$
atau $6x + y + z - 23 = 0.$

(1.34). Tentukan titik tembus garis g : $\left.\begin{matrix} x + y - 1 = 0 \\ 2x - 3y + z = 5 \end{matrix}\right\}$
pada bidang $2x + y + 5z + 7 = 0.$

Penyelesaian : Di sini kita mencari harga-harga x , y , z yang memenuhi ke 3 persamaan :

$x + y - 1 = 0$
$2x - 3y + z = 5$
$2x + y + 5z + 7 = 0$

$$\det(a) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -16 - 8 = -24$$ (dengan aturan CRAMER) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-24} = 2 , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & -7 & 5 \end{vmatrix}}{-24} = -1, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -7 \end{vmatrix}}{-24} = -2$$

Jadi titik tembus (2 , –1 , –2).

(1.35). Carilah persamaan bidang V yang memuat garis-garis :

$$g_1 : \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \text{ dan } g_2 : \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}$$

Penyelesaian : Jelas g_1 dan g_2 sama-sama melalui titik (1 , –1 , 2) , demikian pula halnya V , jadi $V \equiv A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2)$, demikian pula halnya V, jadi $V \equiv A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0$
g_1 pada V berarti : $4A + 2B + 3C = 0$
g_2 pada V berarti : $5A + 4B + 3C = 0$ dan dari ke 2 persamaan ini kita peroleh $A = -2B$, $C = 2B$.
Jadi $V = -2B(x - 1) + B(y + 1) + 2B(z - 2) = 0$ atau
$-2x + y + 2z - 1 = 0.$

(1.36). Bagaimanakah kedudukan garis g_1 : $\left.\begin{matrix} 2x + y + 3z = -2 \\ x + y - 2z = -1 \end{matrix}\right\}$

dan g_2 : [x , y , z] = [–4 , 8 , 4] + λ [–5 , 7 1]. Kemudian hitung jarak g_1 dan g_2 .

Penyelesaian : Vektor arah g_1 : $\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}$ $\begin{matrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$, yaitu [–5 , 7 , 1]

$\underline{\quad\quad\quad}$
7

Ternyata g_1 // g_2 . Untuk mencari jarak antara 2 garis sejajar dapat kita lakukan sebagai berikut :

- Membuat bidang W tegak lurus g_1 (sekaligus tegak lurus g_2) melalui suatu titik P sebarang pada g_1.
- Kita tentukan titik tembus g_2 pada W, sebut titik Q , maka panjang potong garis PQ adalah jarak g_1 dan g_2.

Disini kita tentukan lebih dahulu titik P sebarang pada g_1 , ambil z = 0 → x = –1 , y = 0 , P (–1 , 0 , 0).
Bidang W melalui P dan tegak lurus g_1, W ≡ –5 x + 7y + = 5
Titik tembus g_2 pada W adalah Q (1 , 1 , 3).
Maka Jarak g_1 dan g_2 adalah $|\vec{PQ}|$ = $(\sqrt{(1 + 1)^2 + (1 - 0)^2 + (3 - 0)^2}$
= $\sqrt{14}$.

(1.37). Tentukan persamaan garis g yang melalui P (1, –1, –3) dan sejajar. bidang V ≡ 2x + y – z = 0 serta bersilangan tegak lurus dengan

m : x – 4z = 1 }
y + 3z = 2 }

Penyelesaian : Vektor arah dari m : $\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$; [a , b , c] = [4 , –3 , 1]

g melalui P (1 , –1 , –3) berarti berbentuk :

$\frac{x - 1}{a} = \frac{y + 1}{b} = \frac{z + 3}{c}$ dan karena // V berarti tegak lurus pada

normal V : 2a + b – c = 0 ..... (1)
Karena g ⊥ m maka berlaku : 4a – 3b + c = 0 ..... (2)
Bila persamaan (1) dan (2) diselesaikan kita dapat b = 3a, c = 5a.

Jadi g : $\frac{x - 1}{a} = \frac{y + 1}{3a} = \frac{z + 3}{5a}$ atau $\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z + 3}{5}$

1.19. SOAL-SOAL UNTUK LATIHAN

(1.38). Carilah jarak dari pusat 0 ke titik P bila :
(i) P (2 , 3 , 4) ; (ii) P (–1 , –2 , –30 ; (iii) P (0 , 0 , 7) ;
(iv) P (π , 2π , 3) ; (v) P (1 , 1 , 1) ; (vi) P (–1 , 2 , 1) ;
(vii) P (0 , 2 , –7) ;
(viii) P (a , 2a , 3a)

Jawab : (1) $\sqrt{29}$; (ii) $\sqrt{14}$; (iii) 7 ; (iv) $\sqrt{5\pi^2 + 9p}$ (v) $\sqrt{3}$;
(vi) $\sqrt{53}$; (ii) $\sqrt{6}$; (viii) $a\sqrt{14}$.

(1.39). Periksa apakah ke 3 vektor $\bar{a}$ = [2 , 1 , 4] , $\bar{b}$ = [2 , 0 , –1] , $\bar{c}$ = [4 , 1 , 3] membentuk sebuah segi tiga siku-siku. Carilah sudut-sudut dan luasnya. (Jawab : Ya , $^1/_2\sqrt{105}$).

(1.40). Carilah cosinus arah dari vektor $\bar{v}$ apabila :
(i) $\bar{v}$ = [2 , 1 , -2] , (ii) $\bar{v}$ = [–2 , –1 2] , (iii) P(2 , 1 , 2) , Q (1 , 0 , –3) ;
(iv) P (1 , 1 , 1) , Q (2 , 3 , 4) ; (v) P (–1 , 0 , –2), Q (0 , –3 , –4).
(Jawab : (i) $6\sqrt{}$; (ii) $\sqrt{3}$; (iii) $3\sqrt{3}$; (iv) $\sqrt{14}$; (v) $\sqrt{14}$).

(1.41). Carilah jarak antara P dan Q bila
(i) P (5 , 7 , 9) , Q (11 , 13 , 9) ; (ii) P(2 , 3 , 4) , Q (3 , 4 , 5) ;
(iii) P (2 , 1 , 2) , Q (1 , 0 , –3) ; (iv) P (1 , 1 , 1) , Q (2 , 3 , 4) ;
(v) P (–1 , 0 , –2) , Q (0 , –3 , –4).
(Jawab : (i) $6\sqrt{2}$; (ii) $\sqrt{3}$; (iii) $3\sqrt{3}$; (iv) $\sqrt{14}$; (v) $\sqrt{14}$).

(1.42). Tentukan tengah-tengah PQ pada soal 1.41 (Jawab: (8 , 10 , 9) , ($2^1/_2$, $3^1/_2$, $4^1/_2$) , ($1^1/_2$, $^1/_2$, $-^1/_2$) , ($1^1/_2$, 2 , $2^1/_2$) , ($-^1/_2$, $-1^1/_2$, –3) .

(1.43). Diketahui titik-titik P (1 , 1 , 1) dan Q (2 , 3 , 4). Titik R (3 , y , z) terletak pada garis lurus PQ. Tentukan y dan z.
(Jawab : 5 , 7).

(1.44). Dengan produk vektor, buktikan rumus sinus $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

(1.45). Carilah luas segi tiga ABC yang dibatasi oleh $\overrightarrow{AC}$ = [2 , 0 , 3] dan $\overrightarrow{BC}$ = [3 , 2 , 1] . (Petunjuk : Ingat luas segi tiga ABC = $^1/_2$ AB sin γ).
Jawab : $^1/_2\sqrt{101}$).

(1.46). Hitunglah $\bar{a}$ x $\bar{b}$ bila : (i) $\bar{a}$ = [2 , –1 , –4] , $\bar{b}$ = [–1 , –2 , 1]
(ii) $\bar{a}$ = [3 , 3 , 3] . $\bar{b}$ = [2 , 0 , 2] . (Jawab : [–9 , 2 , –5], [6, 0 , –6]).

(1.47). Untuk $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ pada soal 1.46, carilah $\bar{c}$ yang $\perp \bar{a}$ dan $\bar{b}$ dan panjangnya 1. (Jawab $\pm 1/\sqrt{110}$ [-9 , 2 , –5] , $\pm 1/\sqrt{72}$ [6 , 0 , –6).

(1.48). Buktikan bila $\bar{a} = [a_1 , a_2, a_3]$, $\bar{b} = [b_1 , b_2 , b_3]$, $\bar{c} = [c_1 , c_2 , c_3]$

(i) $\bar{a} . (\bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

(ii). $\bar{a} . (\bar{b} \times \bar{c})$, harga mutlaknya menunjukkan volume paralel-epipedum yang dibatasi oleh $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

(iii) Cari volume paralel-epipedum yang melalui (0 , 0 , 0), (3 , –1 , 0) , (0 , 1 , 2) , (1 , 5 , 4) . (Jawab. 20).

(1.49). Dari bidang-bidang berikut, carilah vektor normal, bilangan arah dan cosinus arahnya : (i) $2x + 3y - z = 0$, (ii) $2y - z = 3$, (iii) $2x + z = 1$.
(Jawab. (i) [2 , 3 , –1) , $2/\sqrt{14}$, $3/\sqrt{14}$, $-1\sqrt{14}$, (ii) [0 , 2 , –1] , 0 , $2/\sqrt{5}$, (iii) [2 , 0 , 1] , $2/\sqrt{5}$

(1.50). Ubahlah bidang-bidang pada soal 1.49 ke dalam normal dari Hesse.
Lalu tentukan jarak titik 0 ke bidang-bidang tersebut.

(Jawab. $\frac{2x}{\sqrt{14}} + \frac{3y}{\sqrt{14}} - \frac{z}{\sqrt{14}} = 0$, 0 ; $\frac{2y}{\sqrt{5}} - \frac{z}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$;

$\frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{z}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$).

(1.51). Cari persamaan linier bidang $x \equiv [-1 , 2 , 1] + \lambda [2 , 1 , 1] + \mu [1 , 3 , 1]$.
(Jawab. $2x + y - 5z - 5 = 0$).

(1.52). Carilah sudut antara bidang $V = 4x = 2$ dengan bidang $W \equiv x - 2y + 2z = 0$.
(Jawab. arc cos 2/3)

(1.53). Tentukan persamaan bidang yang memotong sumbu-sumbu dengan OA = 1 , 0B = 4 , OC = 2 , bila A , B , C berturut-turut titik pada sumbu X , Y , Z positip. (Jawab. x/1 + y/4 + z/2 = 1).

(1.54). Carilah persamaan bidang : (1) melalui (1 , –2 , 3) dan sejajar bidang $x - 3y + 2z = 0$ (ii) melalui (1 , 1 , 1) dan tegak lurus pada bidang-bidang $x - y - z = 0$ dan $2x + 3y + z = 2$ (iii) melalui (0 , 0 , 1) dan (2 , 3 , 1) serta tegak lurus pada bidang XOY. (Jawab. (i) $x - 3y + 2z - 13 = 0$ (ii) $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ (iii) $3x - 2y = 0$).

(1.55). Hitung jarak antara titik (3 , 2 , 0) dengan bidang $3x - 2y + 5z = 7$, juga jarak antara bidang $3x - 2y + 5z = 9$ dan bidang $3x - 2y + 5z = 7$. (Jawab. $2/\sqrt{38}$; $2/\sqrt{38}$).

(1.56). Cari persamaan bidang melalui : (1) sumbu X dan tegak lurus bidang $2x - 3y - z = 5$ (ii) garis potong bidang-bidang $3x - y = 2 + z$ dan $2x + 3y - 3z - 5 = 0$ serta melalui titik 0(0 , 0 , 0).
(Jawab. (i) $y - 3z = 0$; (ii) $11x - 11y + z = 0$).

(1.57). Tentukan bilangan arah garis-garis berikut : (i) $x + y + z = 2$ dan $x - y - z = 3$ (ii) $2x - y = 3$ dan $x - y + 2z = 1$ (iii) $x = 2$ dan $2x - y + z = 1$ (iv) $x - y = y + z = z - 2$.
(Jawab. 0 , 2 , –2 ; 2 , 4 , 1 ; 0 , 1 , 1 ; 1 , 0 , 1).

(1.58). Tentukan persamaan garis lurus yang melalui P dan tegak lurus bidang V : (i) P(2 , 3 , 4) dan $V = 3x - y + z = 2$ (ii) P(2 , 0 , 0) dan $V = 5x - 2y + 3z = 3$.
(Jawab. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{1}$; $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$) .

(1.59). Tentukan persamaan garis lurus melalui P dan // garis g (i) P(0 , 0 , 0); $g : x + y + z = 2$ dan $2x - y - z = 4$. (ii) P(1 , 3 , 0) ; $g : x = 2x + 3$ dan $y = 3z - 2$. (Jawab. $x = 0$, $y + z = 0$;

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 3}{3} = z \text{).}$$

(1.60). Tunjukkan bahwa ke 2 garis :
$g : 2x - y + z = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$ dan $m : 2Y + Z + 3 = 0$, $4x - 2y + 2x + 8 = 0$ adalah sejajar. Kemudian hitung jarak mereka.
(Jawab. $\sqrt{22}$).

(1.61). Carilah titik tembus 1 dengan V bila (i) $1 : x + 2y - z = 6$ dan $2x - y + 3z = -13$ dengan $V = 3x - 2y + 3z + 16 = 0$;
(ii) $1 : x = y = z - 1$ dengan $V = x - y + z = 3$; (iii) 1 ; $x - y - z = 0$ dan $-2x + 2y + 5z = 3$ dengan $V = 3x + 4y + 5z = 15$
(Jawab. (i) (–1 , 2 , –3) (ii) (2 , 2 , 3) (iii) (2 , 1 , 1).

(1.62). Carilah persamaan linier bidang yang memuat garis-garis

$$g : \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{3} \text{ dan } m : \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{3} .$$

(Jawab. $3x - 9y + 5z - 27 = 0$).

(1.63). Carilah garis yang melalui P(3 , –1 , 4) dan tegak lurus ke 2 garis yang bilangan arahnya 2 , –1 , 3 dan 2 , –3 , 2.

(Jawab. $\frac{x-3}{7} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-4}$) .

(1.64). Carilah persamaan garis melalui titik P(1 , 3 , 1) dan memotong tegak lurus garis g : x - z + 1 = 0
y + 2z = 3
Carilah juga jarak P ke garis g. (Jawab. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{1}$, $^1/_2\sqrt{14}$.

(1.65). Ditentukan titik A(0, –1 , 4) , B(0 , 6 , 4) dan C(2 , 0 , 0).
Diminta untuk menentukan sebuah titik D pada sumbu X sehingga AC tegak lurus ganda-BD. Tentukan jarak AC dan BD.
(Jawab. D(–5 , 0 , 0) , $28/\sqrt{33}$).

(1.66). Carilah persamaan garis lurus yang terletak pada bilangan V = x + 3y - z + 4 = 0 dan memotong tegak lurus garis 1 : x – 2z = 3 dan y – 2z = 0
(Jawab. $\frac{x-5}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$)

(1.67). Tentukan persamaan garis yang memotong garis-garis 1_1 : x + y = 4
z = 4

dan 1_2 : x – z = 0 dan // 1_3 : x = y = 4 – z.
y = 4 (Jawab. x + y + 2z = 12 , x – 2y – z = –8).

(1.68). Tentukan persamaan garis hubung terpendek antara garis-garis :
1_1 ; x + y = 4 dan 1_2 : x = y = z
z = 0 (Jawab. x + y + z = 4 , x – y = 0).

(1.69). Tentukan jarak antara garis-garis g_1 : x – y = 0
x + y + z = 4

dengan g_2 ; x + y + 4 = 0
z = 0

(Jawab. $\frac{8}{3}\sqrt{3}$)