4 Penggunaan Turunan

4.1 Maksimum dan Minimum
4.2 Kemonotonan dan Kecekungan
4.3 Maksimum dan Minimum Lokal
4.4 Lebih Banyak Masalah Maks-Min
4.5 Penerapan Ekonomi
4.6 Limit di Ketakhinggaan, Limit Tak Terhingga
4.7 Pengambaran Grafik Canggih
4.8 Teorema Nilai Rata-Rata
4.9 Soal-Soal Ulangan Bab

Saya tidak tahu bagaimana saya tampak pada dunia; tetapi bagi saya sendiri saya nampaknya hanyalah seperti seorang anak laki-laki yang bermain-main di pantai, dan mengalihkan diri sendiri sekarang dan kemudian menemukan koral yang lebih halus atau kerang yang lebih indah daripada yang biasa, sementara samudera besar dari kebenaran semuanya terbentang di hadapan saya tak terungkapkan.
Isaac Newton



Isaac Newton
1642–1727

Lahir pada keluarga petani Inggris pada hari Natal, 1642, Isaac Newton sebagai seorang pemuda remaja memperlihatkan sedikit harapan akademis. Ia bosan dengan sekolah, lebih senang membuat layangan, roda air, jam, dan perkakas lain. Seorang paman pertama kali mengenali bakat luar biasa anak tersebut; ia membujuk ibu Newton untuk memberangkatkan Newton ke Trinity College dari Universitas Cambridge. Di sana ia kena pengaruh Isaac Barrow, seorang pakar ilmu agama dan mahaguru matematika. Barrow melihat di dalam Newton kemampuan yang lebih besar daripada dirinya dan menyerahkan kemahaguruannya kepada Newton pada waktu umur Newton hanya 26.

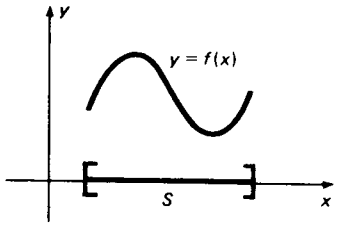
Sebelum itu, sesaat setelah diwisuda dari Trinity, Newton pergi pulang untuk menghindari wabah penyakit pes 1664–65. Selama 18 bulan, sejak Januari 1665, ia menekuni masalah-masalah matematika dan ilmu yang terkemuka. Tidak terdapat kejeniusan yang dapat dibandingkan penuh dalam sejarah ilmu. Dalam waktu singkat tersebut, Newton menemukan teorema binomial umum, elemen dari kalkulus diferensial maupun integral, teori warna-warna, dan hukum gravitasi universal. Lagrange memuji bahwa Newtonlah jenius terbesar yang pernah hidup dan yang paling mujur, karena hanya sekali sistem semesta dapat dikembangkan.

Sama seperti banyak ilmuwan sebayanya, Newton adalah seorang pemeluk agama yang saleh dan dikatakan telah memberikan waktu yang sama banyaknya untuk mempelajari Injil dan untuk matematika. Ia meninggal sebagai seorang terhormat pada usia 85 dan dimakamkan dengan kebesaran bangsanya di Westminster Abbey.

4.1 Maksimum dan Minimum

Dalam hidup ini, kita sering menghadapi masalah guna mendapatkan jalan *terbaik* untuk melakukan sesuatu. Sebagai contoh, seorang petani ingin memilih kombinasi hasil panen yang dapat menghasilkan keuntungan terbesar. Seorang dokter akan menentukan dosis obat yang terkecil untuk menyembuhkan suatu penyakit. Seorang kepala pabrik akan menekan sekecil mungkin biaya pendistribusian produknya. Kadangkala salah satu dari masalah di atas dapat dirumuskan sehingga akan melibatkan memaksimumkan dan meminimumkan fungsi tertentu. Bila demikian, metode kalkulus menyediakan sarana yang ampuh untuk memecahkan masalah seperti itu.

Andaikan kita mengetahui fungsi f dan domain (daerah asal) S seperti pada Gambar 1. Tugas kita yang pertama adalah menentukan apakah f memiliki nilai maksimum atau minimum pada S. Anggap bahwa nilai-nilai tersebut ada, kita ingin mengetahui lebih lanjut di mana dalam S nilai-nilai itu berada. Akhirnya, kita dapat menentukan nilai-nilai maksimum dan minimum. Menganalisis ketiga tugas ini merupakan tujuan pokok pada bagian ini.



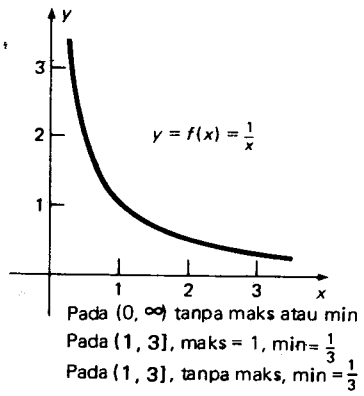
GAMBAR 1

Kita mulai dengan memperkenalkan suatu kosakata yang tepat.

Definisi

Andaikan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

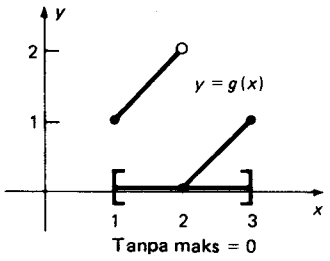
(i) $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada S jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di S;
(ii) $f(c)$ adalah nilai minimum f pada S jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di S;
(iii) $f(c)$ adalah nilai ekstrim f pada S jika ia adalah nilai maksimum atau nilai minimum.



GAMBAR 2

PERTANYAAN EKSISTENSI Apakah f *mempunyai nilai maksimum (atau minimum) pada S?* Jawabnya tergantung pertama-tama pada himpunan S tersebut. Ambillah $f(x) = 1/x$ pada $S = (0,\infty)$; fungsi ini tidak mempunyai nilai maksimum ataupun minimum (Gambar 2). Sebaliknya, fungsi yang sama pada $S = [1,3]$ mempunyai nilai maksimum $f(1) = 1$ dan nilai minimum $f(3) = \frac{1}{3}$. Pada $S = (1,3]$, f tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum $f(3) = \frac{1}{3}$.

Jawaban juga tergantung pada tipe fungsi. Ambillah fungsi tak kontinu g (Gambar 3) yang didefinisikan oleh

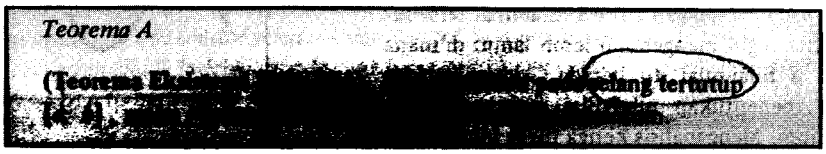


GAMBAR 3

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{jika } 1 \le x < 2 \\ x - 2 & \text{jika } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

Pada $S = [1, 3]$, g tidak mempunyai nilai maksimum (menjadi cukup dekat ke 2 tetapi tidak pernah mencapainya). Tetapi, g mempunyai nilai minimum $g(2) = 0$.

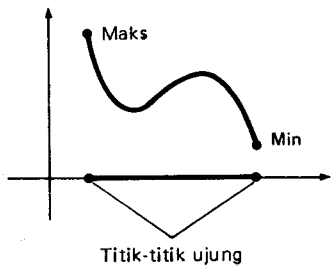
Terdapat sebuah teorema bagus yang menjawab pertanyaan eksistensi untuk beberapa masalah yang muncul dalam praktek. Walaupun secara intuisi ini jelas, bukti yang teliti sangat sukar; kita biarkan itu untuk buku pelajaran lebih lanjut.



Perhatikan kata-kata kunci: f **harus** *kontinu* dan himpunan S harus berupa *selang tertutup.*

DI MANA TERJADINYA NILAI-NILAI EKSTRIM? Biasanya fungsi yang ingin kita maksimumkan atau minimumkan akan mempunyai suatu selang I sebagai daerah asalnya. Tetapi selang ini boleh berupa sebarang dari sembilan tipe yang dibahas dalam Pasal 1.3. Beberapa dari selang ini memuat **titik-titik ujung;** beberapa tidak. Misalnya, $I = [a, b]$ memuat titik ujung dua-duanya; $[a, b)$ hanya memuat titik ujung kiri; (a, b) tidak memuat titik ujung satupun. Nilai-nilai ekstrim sebuah fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup sering kali terjadi pada titik-titik ujung (lihat Gambar 4).

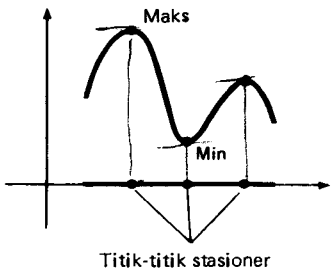
Jika c sebuah titik pada mana $f'(c) = 0$, kita sebut c **titik stasioner.** Nama itu diturunkan dari fakta bahwa pada titik stasioner, grafik f mendatar, karena garis singgung mendatar. Nilai-nilai ekstrim seringkali terjadi pada titik-titik stasioner (lihat Gambar 5).



GAMBAR 4

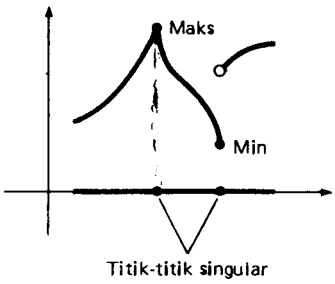
Akhirnya, jika c adalah titik dalam dari I di mana f' tidak ada, kita sebut c **titik singular.** Ini merupakan titik di mana grafik f mempunyai sudut tajam, garis singgung vertikal, atau mungkin berupa lompatan (atau di dekatnya ia bergoyang sangat buruk). Nilai-nilai ekstrim dapat terjadi pada titik-titik singular (Gambar 6), walaupun dalam masalah-masalah praktis hal ini sangat langka.

Ketiga jenis titik ini (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) merupakan titik-titik kunci dari teori maks-min. Sebarang titik dalam daerah asal fungsi f yang termasuk salah satu dari tiga tipe ini disebut sebuah **titik kritis** f.



Titik-titik stasioner

GAMBAR 5



Titik-titik singular

GAMBAR 6

CONTOH 1 Cari titik-titik kritis dari $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ pada $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Penyelesaian Titik-titik ujung adalah $-\frac{1}{2}$ dan 2. Untuk mencari titik-titik stasioner, kita pecahkan $f'(x) = -6x^2 + 6x = 0$ untuk x, diperoleh 0 dan 1. Tidak terdapat titik-titik singular. Jadi titik-titik kritis adalah $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2. ■

Teorema B

(Teorema Titik Kritis). Andaikan f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis; yakni c berupa salah satu:

(i) titik ujung dari I;
(ii) titik stasioner dari f ($f'(c) = 0$);
(iii) titik singular dari f ($f'(c)$ tidak ada).

Bukti Pandang kasus pertama di mana $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada I dan andaikan bahwa c bukan titik ujung ataupun titik singular. Akan cukup untuk memperlihatkan bahwa c adalah titik stasioner.

Sekarang, karena $f(c)$ adalah nilai maksimum, $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I; yaitu,

$$f(x) - f(c) \leq 0$$

Jadi jika $x < c$, sehingga $x - c < 0$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{1}$$

sedangkan jika $x > c$, maka

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{2}$$

Tetapi $f'(c)$ ada, karena c bukan titik singular. Akibatnya, bilamana kita biarkan $x \to c^-$ dalam (1) dan $x \to c^+$ dalam (2), kita peroleh masing-masing, $f'(c) \geq 0$ dan $f'(c) \leq 0$. Kita simpulkan bahwa $f'(c) = 0$, seperti yang diinginkan.

Kasus di mana $f(c)$ adalah nilai minimum ditangani dengan cara serupa. ■

Dalam bukti yang baru saja diberikan, kita memakai fakta bahwa ketaksamaan $\leqslant$ terpelihara di bawah operasi pengambilan limit (lihat Soal 26 dari Pasal 2.5).

APAKAH YANG DIMAKSUD DENGAN NILAI-NILAI EKSTRIM? Mengingat Teorema A dan B, sekarang kita dapat menyatakan suatu prosedur yang sangat sederhana untuk menghitung nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi kontinu f pada *selang tertutup* I.

Langkah 1 Carilah titik-titik kritis dari f pada I.

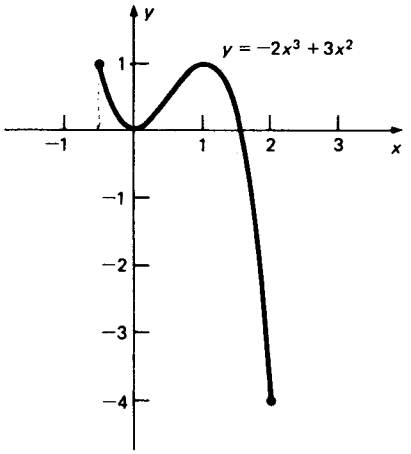
Langkah 2 Hitunglah f pada setiap titik kritis. Yang terbesar adalah nilai maksimum; yang terkecil adalah nilai minimum.

CONTOH 2 Carilah nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2$$

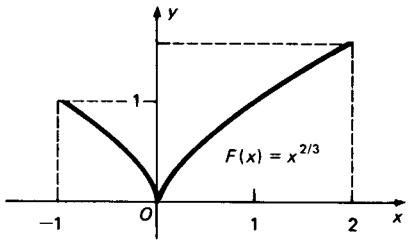
pada $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Penyelesaian Dalam Contoh 1, kita kenali $-\frac{1}{2}$, 0, 1, 2 sebagai titik-titik kritis. Sekarang $f(-\frac{1}{2}) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, dan $f(2) = -4$. Jadi nilai maksimum adalah 1 (dicapai pada $-\frac{1}{2}$ dan 1) dan nilai minimum adalah -4 (dicapai pada 2). Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 7. ■



GAMBAR 7

CONTOH 3 Fungsi $F(x) = x^{2/3}$ kontinu di mana-mana. Cari nilai-nilai maksimum dan minimumnya pada $[-1,2]$.

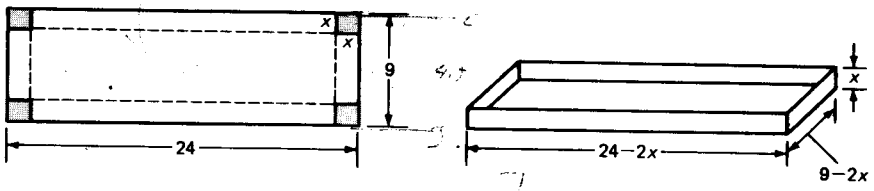


GAMBAR 8

Penyelesaian $F'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$, tidak pernah 0. Tetapi, $F'(0)$ tidak ada, sehingga 0 adalah titik kritis, sama seperti titik-titik ujung -1 dan 2. Sekarang $F(-1) = 1$, $F(0) = 0$, dan $F(2) = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}59$. Jadi nilai maksimum adalah $\sqrt[3]{4}$; nilai minimum adalah 0. Grafik diperlihatkan dalam Gambar 8. ■

MASALAH-MASALAH PRAKTIS Yang dimaksudkan dengan masalah praktis adalah masalah yang mungkin timbul dalam kehidupan sehari-hari. Masalah-masalah yang demikian jarang mempunyai titik-titik singular; faktanya, untuk masalah-masalah ini nilai-nilai maksimum dan minimum biasanya terjadi pada titik-titik stasioner, walaupun titik-titik ujung harus diperiksa. Berikut dua contoh khas.

CONTOH 4 Kotak persegi-panjang dibuat dari selembar papan, panjang 24 inci dan lebar 9 inci, dengan memotong bujur sangkar identik pada keempat pojok dan melipat ke atas sisi-sisinya, seperti dalam Gambar 9. Cari ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapa volume ini?



GAMBAR 9

Penyelesaian Andaikan x adalah sisi bujur sangkar yang harus dipotong dan V adalah volume kotak yang dihasilkan. Maka

$$V = x(9 - 2x)(24 - 2x) = 216x - 66x^2 + 4x^3$$

Sekarang x tidak dapat lebih kecil dari 0 ataupun lebih besar dari 4,5. Jadi, masalah kita adalah memaksimumkan V pada $[0; 4{,}5]$. Titik-titik stasioner ditemukan dengan menetapkan dV/dx sama dengan nol dan menyelesaikan persamaan yang dihasilkan:

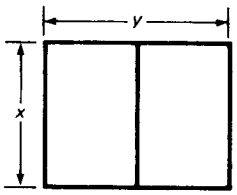
$$\frac{dV}{dx} = 216 - 132x + 12x^2 = 12(18 - 11x + x^2) = 12(9 - x)(2 - x) = 0$$

Ini memberikan $x = 2$ atau $x = 9$, tetapi 9 tidak pada selang $[0; 4{,}5]$. Kita lihat bahwa hanya terdapat tiga titik kritis, yaitu, 0, 2, dan 4,5. Pada titik-titik ujung 0 dan 4,5, $V = 0$; pada 2, $V = 200$. Kita simpulkan bahwa kotak mempunyai volume maksimum 200 inci kubik jika $x = 2$ – yakni, jika kotak berukuran panjang 20 inci, lebar 5 inci, dan tinggi 2 inci.

CONTOH 5 Seorang peternak mempunyai 100 meter kawat berduri yang akan dipakai membuat dua pagar identik yang berdampingan, seperti diperlihatkan dalam Gambar 10. Berapa ukuran seluruh kelilingnya agar luas maksimum?

Penyelesaian Andaikan x adalah lebar dan y adalah panjang seluruh keliling, keduanya dalam meter. Karena tersedia 100 meter kawat, $3x + 2y = 100$ – yakni,

$$y = 50 - \tfrac{3}{2}x$$



GAMBAR 10

Luas total A diberikan oleh

$$A = xy = 50x - \tfrac{3}{2}x^2$$

Karena harus terdapat tiga sisi sepanjang x, kita lihat bahwa $0 \le x \le \frac{100}{3}$. Jadi masalah kita adalah memaksimumkan A pada $[0, \frac{100}{3}]$.

Sekarang

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 3x$$

Bilamana kita tetapkan $50 - 3x$ sama dengan 0 dan menyelesaikannya, kita peroleh $x = \frac{50}{3}$. Jadi terdapat tiga titik kritis: 0, $\frac{50}{3}$, dan $\frac{100}{3}$. Kedua titik ujung 0 dan $\frac{100}{3}$ memberikan $A = 0$, sedangkan $x = \frac{50}{3}$ menghasilkan $A = 416{,}67$. Ukuran yang diinginkan adalah $x = \frac{50}{3}$ meter dan $y = 50 - \frac{3}{2}(\frac{50}{3}) = 25$ meter. ■

Contoh terakhir menggambarkan suatu masalah yang dialami oleh sebuah perusahaan yang menyalurkan produknya dengan mempergunakan truk. Dengan bertambahnya kecepatan truk tersebut, biaya operasinya (bahan bakar, minyak pelumas, dan lain-lain) bertambah, sedangkan biaya tenaga kerja (pengemudi) menjadi berkurang. Berapakah kecepatan yang paling ekonomis bagi sebuah truk yang akan menjalankan tugas?

CONTOH 6. Biaya operasi sebuah truk diperkirakan sebesar $(30 + v/2)$ sen dollar per mil pada saat dikemudikan dengan kecepatan v mil per jam. Pengemudinya dibayar \$14 per jam. Pada kecepatan berapakah biaya pengiriman ke suatu kota yang jauhnya k mil akan paling murah? Dengan anggapan bahwa aturan kecepatan yang diperbolehkan adalah $40 \leqslant v \leqslant 60$.

Penyelesaian Misalkan C adalah biaya total dalam sen \$ untuk menjalankan truk sebuah k mil. Maka,

$$C = \text{biaya pengemudi} + \text{biaya operasi}$$

$$= \frac{k}{v}(1400) + k\left(30 + \frac{v}{2}\right) = 1400kv^{-1} + \left(\frac{k}{2}\right)v + 30k$$

Maka,

$$\frac{dC}{dv} = -1400kv^{-2} + \frac{k}{2} + 0$$

Dengan mengambil dC/dv sama dengan 0 mendapatkan

$$\frac{1400k}{v^2} = \frac{k}{2}$$

$$v^2 = 2800$$

$$v \approx 53$$

Pada kecepatan 53 mil per jam merupakan nilai optimum, akan tetapi, kita harus meninjau C pada tiga titik-titik kritis 40, 53 dan 60 untuk meyakinkan.

$$\text{At } v = 40, \quad C = k\left(\frac{1400}{40}\right) + k(30 + 20) = 85k$$

$$\text{At } v = 53, \quad C = k\left(\frac{1400}{53}\right) + k\left(30 + \frac{53}{2}\right) = 82{,}9k$$

$$\text{At } v = 60, \quad C = k\left(\frac{1400}{60}\right) + k(30 + 30) = 83{,}3k$$

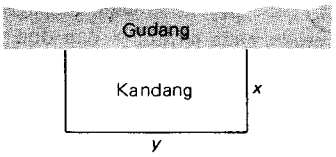
Dapat disimpulkan bahwa pada kecepatan 53 mil per jam adalah yang terbaik. ■

Kita akan dapatkan lagi sejumlah soal-soal terapan mengenai maksimum dan minimum pada Pasal 4.4.

SOAL-SOAL 4.1

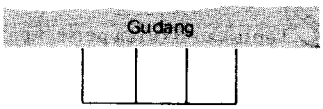
Dalam Soal-soal 1-16, kenali titik-titik kritis dan carilah nilai maksimum dan nilai minimum (lihat Contoh 1, 2, dan 3).

1. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$; $I = [0, 3]$
2. $f(x) = x^2 + 3x$; $I = [-2, 1]$
3. $G(x) = \frac{1}{3}(2x^3 + 3x^2 - 12x)$, $I = [-3, 3]$
4. $h(t) = 4t^3 + 3t^2 - 6t + 1$, $I = [-2, 1]$
5. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $I = (-\frac{3}{2}, 3)$
   Petunjuk: Sketsakan grafik.
6. $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $I = [-\frac{3}{2}, 3]$
7. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $I = [-2, 1]$
8. $g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $I = (-\infty, \infty)$
   Petunjuk: Sketsakan grafik.
9. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2}$; $I = [-1, 4]$
10. $F(t) = \sin t - \cos t$; $I = [0, \pi]$
11. $f(x) = |x - 2|$; $I = [1, 5]$
12. $f(x) = |5 - 3x|$; $I = [0, 3]$
13. $g(x) = x^{2/5}$; $I = [-1, 32]$
14. $f(x) = [\![5x]\!]$; $I = [-\frac{3}{2}, 4]$
15. $h(x) = x^{2/5}$; $I = (-1, 32)$
16. $f(t) = t - \tan t$; $I = [-\pi/4, \pi/4]$
17. Carilah dua bilangan tak negatif yang jumlahnya 10 dan yang hasilkalinya maksimum. *Petunjuk:* Jika x salah satu bilangan, maka yang lainnya $10 - x$.
18. Bilangan apa yang melebihi kuadratnya secara maksimum? Mulailah dengan meyakinkan diri sendiri bahwa bilangan ini berada pada selang $[0, 1]$.
19. Dono mempunyai 200 meter kawat duri yang ia rencanakan untuk memagari halaman berbentuk persegi-panjang untuk anjingnya. Jika ia ingin agar luas maksimum, berapa ukuran yang seharusnya?
20. Buktikan bahwa untuk persegi-panjang dengan keliling K, yang luasnya maksimum adalah bentuk bujur sangkar.
21. Hitunglah volume terbesar dari kotak terbuka yang dapat dibuat dari selembar papan luas 24 inci kuadrat dengan cara memotong bujur sangkar berukuran sama pada sudut-sudutnya dan melipat sisi-sisi ke atas (lihat Contoh 4).
22. Kawat sepanjang 16 inci dipotong menjadi dua; satu potong ditekuk untuk membentuk bujur sangkar dan yang lainnya ditekuk untuk membentuk lingkaran. Di mana kawat harus dipotong agar jumlah luas bujur sangkar dan luas lingkaran minimum? Maksimum? (Pertimbangkan juga kemungkinan tanpa memotong).
23. Petani Badu mempunyai 80 kaki kawat duri yang ia rencanakan untuk memagari kandang persegi-panjang sepanjang satu sisi gudangnya sepanjang 100 kaki, seperti diperlihatkan dalam Gambar 11 (sisi sepanjang gudang tidak memerlukan kawat duri). Berapa ukuran kandang yang mempunyai luas maksimum?



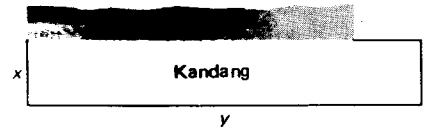
GAMBAR 11

24. Petani Badu dari Soal 23 memutuskan untuk membuat tiga kandang yang identik dengan 80 kaki kawat durinya, seperti diperlihatkan dalam Gambar 12. Berapa ukuran untuk total lingkupan agar kandang seluas mungkin?



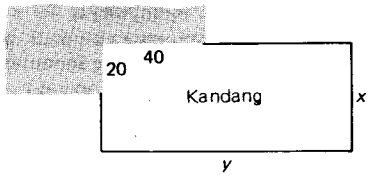
GAMBAR 12

25. Andaikan petani Badu dari Soal 23 mempunyai 180 kaki kawat duri dan ingin agar kandang melingkari seluruh sisi gudang, seperti diperlihatkan dalam Gambar 13. Berapa ukuran yang seharusnya agar luas maksimum? Perhatikan bahwa dalam hal ini $0 \leqslant x \leqslant 40$.



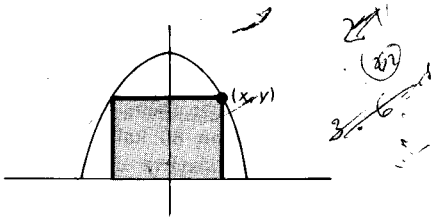
GAMBAR 13

26. Andaikan bahwa petani Badu dari Soal 23 memutuskan untuk memakai 80 kaki kawat durinya untuk membuat kandang persegi-panjang untuk memenuhi pojok gudang berukuran 20 kaki kali 40 kaki, seperti diperlihatkan dalam Gambar 14 (semua pojok harus dipakai dan tidak memerlukan kawat). Berapa ukuran kandang yang memberikan luas maksimum? *Petunjuk:* Mulai dengan memutuskan pada nilai-nilai x yang diperbolehkan.



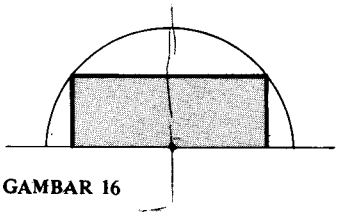
GAMBAR 14

27. Dua pojok sebuah persegi-panjang berada pada sumbu-x dan dua yang lainnya pada parabol $y = 12 - x^2$, dengan $y \geqslant 0$. Berapa ukuran persegi-panjang semacam ini (Gambar 15) dengan luas maksimum?



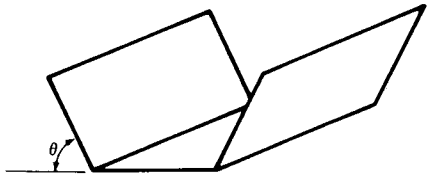
GAMBAR 15

28. Tentukan ukuran persegi-panjang yang luasnya maksimum yang dapat diletakkan di dalam setengah lingkaran dengan jari-jari r (Gambar 16).



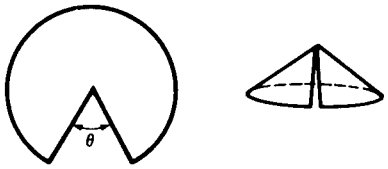
GAMBAR 16

29. Sebuah pancuran atap logam mempunyai sisi 3 inci dan alas mendatar 3 inci, sisi-sisi membuat sudut sama sebesar θ dengan alas (Gambar 17). Berapa θ agar kapasitas pancuran maksimum? *Perhatikan:* $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.



GAMBAR 17

30. Sebuah kerucut harus dibuat dari potongan melingkar selembar logam jari-jari 10 meter dengan cara memotong satu sektor dan mengelas sisi terpotong dari sisa potongan (Gambar 18). Berapa volume maksimum yang mungkin dari kerucut yang dihasilkan? *Petunjuk:* Andaikan θ sudut pusat dari sektor yang dibuang.



GAMBAR 18

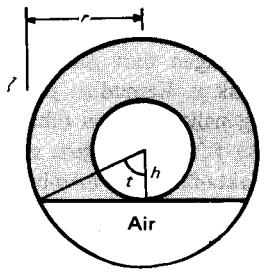
31. Biaya operasi sebuah truk tertentu adalah $25 + x/4$ rupiah tiap kilometer jika truk berjalan pada x km/jam. Sebagai tambahan, supir memperoleh Rp. 120 tiap jam. Berapa laju yang paling ekonomis untuk mengoperasikan truk pada jarak tempuh 400 km jika laju jalan raya harus antara 40 dan 55 km/jam?

32. Mengulangi Soal 31 dengan menganggap biaya operasi adalah $40 + 0{,}05x^{3/2}$ sen per mil.

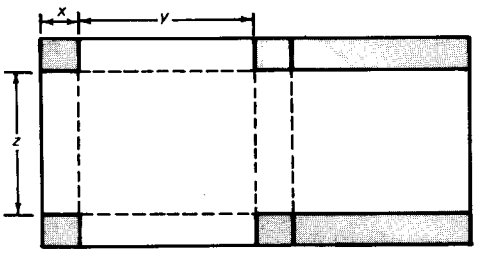
33. Tentukanlah titik-titik P dan Q yang terletak pada kurva $y = x^2/4$, $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$, yang jaraknya paling dekat dan paling jauh dari titik (0,4). *Petunjuk:* Secara aljabar akan lebih mudah menentukan kuadrat jarak yang diperlukan dari pada jarak itu sendiri.

34. Suatu alat pelembab udara menggunakan cakram putar yang berjari-jari r, sebagian dicelupkan di air. Penguapan yang terjadi akan semakin banyak apabila bagian yang basah (tampak sebagai belahan pada Gambar 19) semaksimum mungkin. Tunjukkanlah bahwa hal ini akan terjadi apabila h (jarak dari pusat ke permukaan air) sama dengan $r/\sqrt{1+\pi^2}$.

35. Sebuah kotak tertutup terbuat dari karton berbentuk empat persegi panjang dengan ukuran 5 kaki dan 8 kaki. Pembuatannya dilakukan dengan membuang bagian-bagian yang terpotong pada Gambar 20, kemudian melipatnya pada garis titik-titik. Berapakah ukuran x, y, dan z agar volumenya maksimum?



GAMBAR 19



GAMBAR 20

4.2 Kemonotonan dan Kecekungan

Pandang grafik dalam Gambar 1. Tak seorang pun akan terkejut bilamana kita mengatakan bahwa f turun di kiri c dan naik di kanan c. Tetapi untuk meyakinkan bahwa kita sepakat tentang istilah, kita berikan definisi-definisi yang persis.

Definisi

Andaikan f terdefinisi pada selang I (terbuka, tertutup, atau tak satupun). Kita katakan bahwa:

(i) f adalah **naik** pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I,

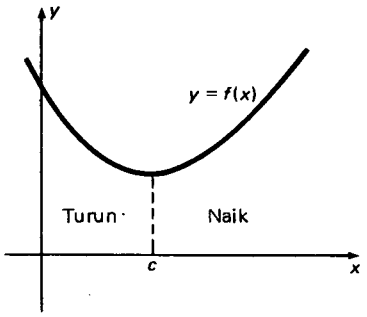
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

(ii) f adalah **turun** pada I jika untuk setiap pasang bilangan x_1 dan x_2 dalam I,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

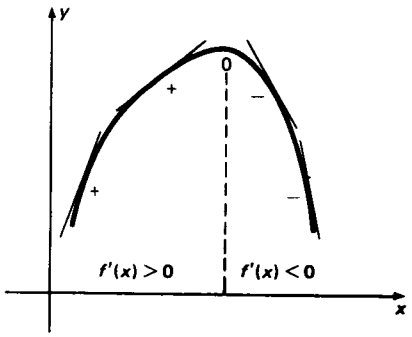
(iii) f **monoton murni** pada I jika ia naik pada I atau turun pada I.

Bagaimana kita memutuskan di mana suatu fungsi naik? Seseorang mungkin menyarankan bahwa kita menggambar grafiknya dan memperhatikannya. Tetapi sebuah grafik biasanya digambar dengan merajah beberapa titik dan menghubungkan titik-titik



GAMBAR 1

tersebut dengan suatu kurva mulus. Siapa yang dapat yakin bahwa grafik tidak bergoyang di antara titik-titik yang dirajah. Kita memerlukan prosedur yang lebih baik.



GAMBAR 2

TURUNAN PERTAMA DAN KEMONOTONAN Ingat kembali bahwa turunan pertama $f'(x)$ memberi kita kemiringan dari garis singgung pada grafik f di titik x. Kemudian jika $f'(x) > 0$, garis singgung naik ke kanan (lihat Gambar 2). Serupa, jika $f'(x) < 0$, garis singgung jatuh ke kanan. Fakta-fakta ini membuat teorema berikut secara intuisi jelas. Kita tunda bukti yang cermat sampai Pasal 4.8.

Teorema A

(Teorema Kemonotonan). Andaikan f kontinu pada selang I dan dapat didiferensialkan pada setiap titik dalam dari I.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f naik pada I.
(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua titik dalam x dari I, maka f turun pada I.

Teorema ini biasanya membolehkan kita secara persis menentukan di mana suatu fungsi yang terdiferensial naik dan di mana ia turun. Ini masalah penyelesaian dua pertaksamaan.

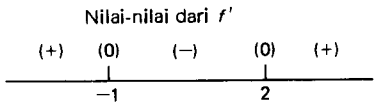
CONTOH 1 Jika $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, cari di mana f naik dan di mana turun.

Penyelesaian Kita mulai dengan mencari turunan f.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

Kita perlu menentukan di mana $(x + 1)(x - 2) > 0$ dan juga di mana

$$(x + 1)(x - 2) < 0.$$



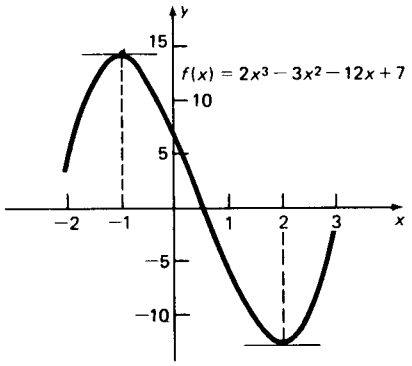
GAMBAR 3

Masalah ini dibahas secara terinci di Pasal 1.3, pasal yang sekarang perlu ditelaah ulang. Titik-titik pemisah adalah -1 dan 2; mereka membagi sumbu-x atas tiga selang; $(-\infty, -1), (-1, 2)$, dan $(2, \infty)$. Dengan memakai titik-titik uji -2, 0, dan 3, kita simpulkan bahwa $f'(x) > 0$ pada yang pertama dan terakhir dari selang-selang ini dan bahwa $f'(x) < 0$ pada selang tengah (Gambar 3). Jadi, menurut Teorema A, f naik pada $(-\infty, -1]$ dan $[2, \infty)$; ia turun pada $[-1, 2]$. Perhatikan bahwa teorema tersebut membolehkan kita mengikutkan titik-titik ujung dari selang-selang ini, walaupun $f'(x) = 0$ pada titik-titik itu. Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 4. ■

CONTOH 2 Tentukan di mana $g(x) = x/(1 + x^2)$ naik dan di mana turun.

Penyelesaian

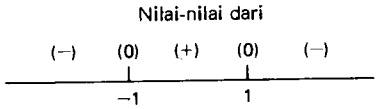
$$g'(x) = \frac{(1 + x^2) - x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$$



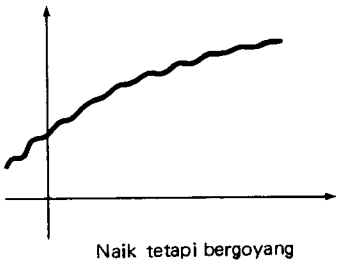
GAMBAR 4

Karena penyebut selalu positif, $g'(x)$ mempunyai tanda sama seperti $(1 - x)(1 + x)$. Titik-titik pemisah -1 dan 1, menentukan tiga selang $(-\infty, -1), (-1, 1)$, dan $(1, \infty)$. Bilamana kita menguji mereka, kita temukan bahwa $g'(x) < 0$ pada selang-selang yang pertama dan ketiga dan bahwa $g'(x) > 0$ pada yang tengah (Gambar 5). Kita simpulkan dari Teorema A bahwa g turun pada $(-\infty, -1]$ dan $[1, \infty)$, naik pada $[-1, 1]$. Kita tunda penggambaran grafik g sampai nanti, tetapi jika anda ingin melihat grafiknya, beralihlah ke Contoh 4. ■

TURUNAN KEDUA DAN KECEKUNGAN Sebuah fungsi mungkin naik dan tetap mempunyai grafik yang sangat bergoyang (Gambar 6). Untuk menganalisis goyangan, kita perlu mempelajari bagaimana garis singgung berliku saat kita bergerak sepanjang grafik dari kiri ke kanan. Jika garis singgung berliku secara tetap berlawanan arah putaran jarum jam, kita katakan bahwa grafik *cekung ke atas*, jika garis singgung berliku searah putaran jarum jam, grafik *cekung ke bawah*. Kedua definisi lebih baik dinyatakan dalam istilah fungsi dan turunannya.



GAMBAR 5

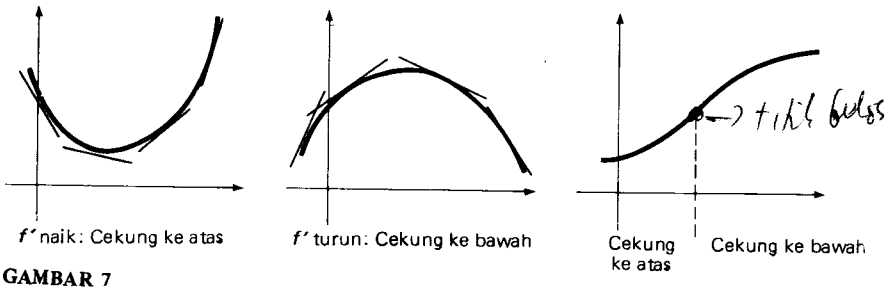


GAMBAR 6

Definisi

Andaikan f terdiferensial pada selang terbuka $I = (a, b)$. Jika f' naik pada I, f (dan grafiknya) **cekung ke atas** di sana; jika f' turun pada I, f **cekung ke bawah** pada I.

Diagram dalam Gambar 7 akan membantu memperjelas gagasan ini. Perhatikan bahwa kurva yang cekung ke atas berbentuk seperti sebuah cangkir.



GAMBAR 7

Sehubungan dengan Teorema A, kita mempunyai kriteria sederhana untuk memutuskan di mana kurva cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah. Kita cukup mengingat dalam hati bahwa turunan kedua dari f adalah turunan pertama dari f'. Jadi f' naik jika f'' positif; turun jika f'' negatif.

Teorema B

(Teorema Kecekungan). Andaikan f terdiferensial dua kali pada selang terbuka (a, b).

(i) Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke atas pada (a, b).

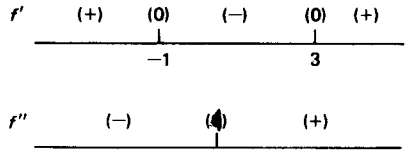
(ii) Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f cekung ke bawah pada (a, b).

Untuk kebanyakan fungsi, teorema ini mengubah masalah penentuan kecekungan ke masalah penyelesaian pertaksamaan. Kita ahli untuk ini.

CONTOH 3 Di mana $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah?

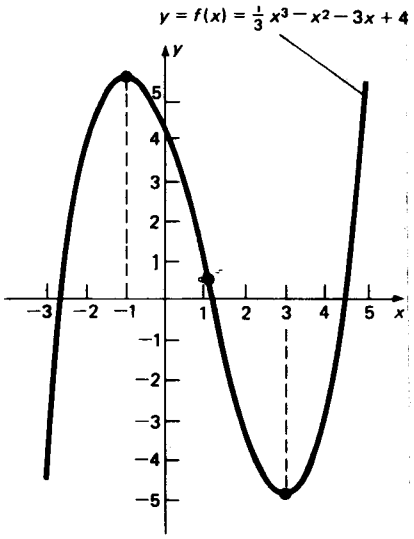
Penyelesaian

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$



GAMBAR 8

Dengan menyelesaikan pertaksamaan $(x + 1)(x - 3) > 0$ dan lawannya kita simpulkan bahwa f naik pada $(-\infty, -1]$ dan $[3, \infty)$ dan turun pada $[-1, 3]$ (Gambar 8). Serupa, penyelesaian $2(x - 1) > 0$ dan $2(x - 1) < 0$ memperlihatkan bahwa f cekung ke atas pada $(1, \infty)$, cekung ke bawah pada $(-\infty, 1)$. Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 9. ■



GAMBAR 9

CONTOH 4 Di mana $g(x) = x/(1 + x^2)$ cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah? Sketsakan grafik g?

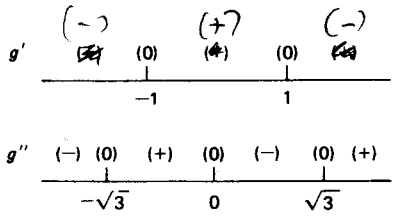
Penyelesaian Kita mulai pembahasan fungsi ini dalam Contoh 2. Di sana kita mempelajari bahwa g turun pada $(-\infty, -1]$ dan $[1, \infty)$ dan naik pada $[-1, 1]$. Untuk menganalisis kecekungan, kita hitung g''.

$$g'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$g''(x) = \frac{(1 + x^2)^2(-2x) - (1 - x^2)(2)(1 + x^2)(2x)}{(1 + x^2)^4}$$

$$= \frac{(1 + x^2)[(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(4x)]}{(1 + x^2)^4}$$

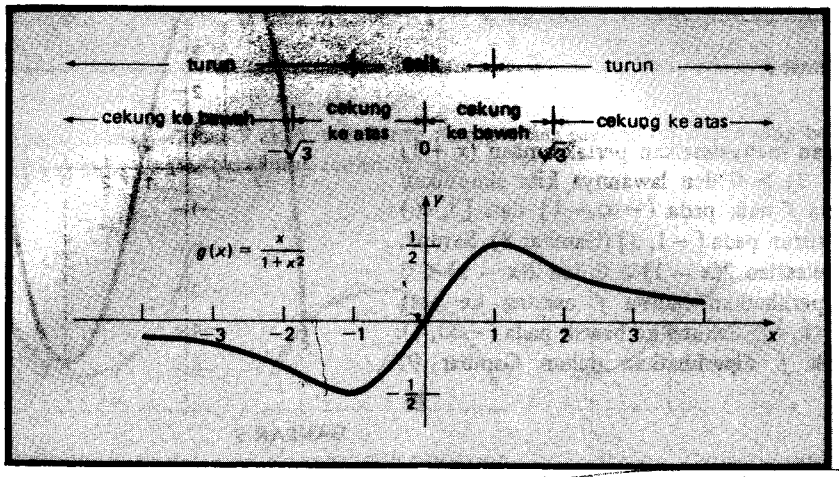
$$= \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$



GAMBAR 10

Karena penyebut selalu positif, kita hanya perlu menyelesaikan $x(x^2 - 3) > 0$ dan lawannya. Titik-titik pemisah adalah $-\sqrt{3}, 0$, dan $\sqrt{3}$. Tiga titik pemisah ini menentukan empat selang. Setelah menguji mereka (Gambar 10), kita simpulkan bahwa g cekung ke atas pada $(-\sqrt{3}, 0)$ dan $(\sqrt{3}, \infty)$ dan bahwa ia cekung ke bawah pada $(-\infty, -\sqrt{3})$ dan $(0, \sqrt{3})$.

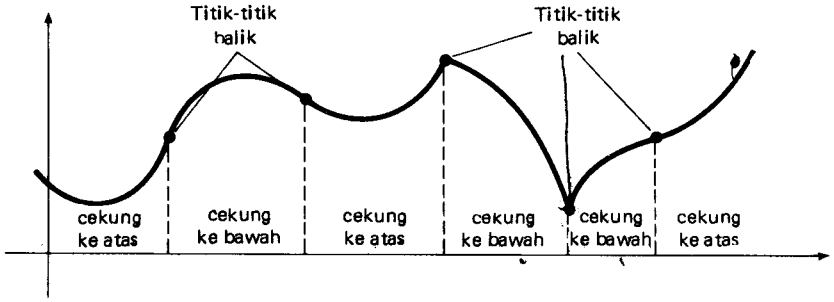
Untuk membuat sketsa grafik g kita memanfaatkan semua informasi yang sedemikian jauh telah diperoleh, ditambah dengan fakta bahwa g sebuah fungsi ganjil yang grafiknya simetri terhadap titik asal (Gambar 11). ■



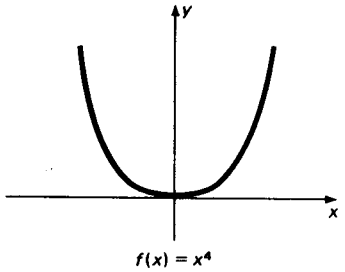
GAMBAR 11

titik balik → $f''(x) = 0$ atau tdk ada

TITIK BALIK Andaikan f kontinu di c. Kita sebut $(c, f(c))$ suatu **titik balik** dari grafik f jika f cekung ke atas pada satu sisi dan cekung ke bawah pada sisi lainnya dari c. Grafik dalam Gambar 12 menunjukkan sejumlah kemungkinan.



GAMBAR 12



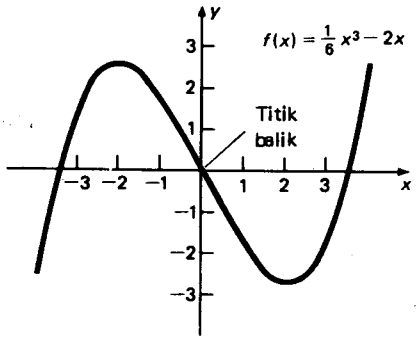
GAMBAR 13

Seperti yang mungkin anda terka, titik-titik di mana $f''(x) = 0$ atau $f''(x)$ tidak ada merupakan calon-calon untuk titik balik. Kita gunakan kata *calon* secara sengaja. Sama halnya seperti calon untuk jabatan politik mungkin gagal untuk terpilih, sehingga — misalnya — titik di mana $f''(x) = 0$ mungkin gagal menjadi suatu titik balik. Pandang $f(x) = x^4$, yang mempunyai grafik diperlihatkan dalam Gambar 13. Benar bahwa $f''(0) = 0$; tetapi

titik asal bukan titik balik. Tetapi dalam pencarian titik-titik balik, kita mulai dengan mengenali titik-titik dengan $f''(x) = 0$. (dan di mana $f''(x)$ tidak ada). Kemudian kita memeriksa apakah mereka benar-benar merupakan titik-titik balik.

Lihat kembali pada grafik dalam Contoh 4. Anda akan melihat bahwa $f(x)$ mempunyai tiga titik balik, yaitu $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/4)$, $(0, 0)$, dan $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/4)$.

CONTOH 5 Cari semua titik balik dari grafik $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x$.



GAMBAR 14

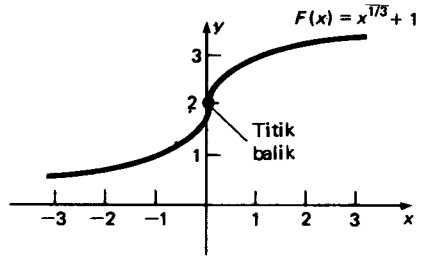
Penyelesaian

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - 2$$
$$f''(x) = x$$

Hanya terdapat satu calon untuk titik balik, yakni, titik di mana $f''(x) = 0$. Ini terjadi pada titik asal, $(0, 0)$. Bahwa $(0, 0)$ adalah titik balik menyusul dari fakta bahwa $f''(x) < 0$ untuk $x < 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$. Jadi, kecekungan berubah arah di $(0, 0)$. Grafik diperlihatkan dalam Gambar 14. ■

CONTOH 6 Cari semua titik balik untuk $F(x) = x^{1/3} + 2$.

Penyelesaian



GAMBAR 15

$$F'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad F''(x) = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

Turunan kedua, $F''(x)$, tidak pernah 0; tetapi gagal untuk ada di $x = 0$. Titik $(0,2)$ adalah titik balik karena $F''(x) > 0$ untuk $x < 0$ dan $F''(x) < 0$ untuk $x > 0$. Grafik disketsakan dalam Gambar 15. ■

SOAL-SOAL 4.2

Dalam Soal-soal 1-10, gunakan Teorema Kemonotonan untuk mencari di mana fungsi yang diberikan naik dan di mana turun.

1. $f(x) = x^2 - 4x + 2$
2. $f(x) = 2x - x^2$
3. $F(x) = x^3 - 1$
4. $F(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$
5. $g(t) = t^4 + 4t$
6. $g(t) = \dfrac{t^4}{2} - \dfrac{4t^3}{3}$
7. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$
8. $f(x) = \dfrac{2 - x}{x^2}$

9. $H(t) = \sin^2 2t, 0 \le t \le \pi$

10. $H(t) = \cos t + \sin t, 0 \le t \le 2\pi$

Dalam Soal-soal 11-18, gunakan Teorema Kecekungan untuk menentukan di mana fungsi yang diberikan cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah. Cari juga semua titik baliknya.

11. $f(x) = (x - 3)^2$

12. $f(x) = 4 - x^2$

13. $F(x) = x^3 - 12x$

14. $F(x) = (x - 3)^3 + 4$

15. $g(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

16. $g(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + x + 2$

17. $g(x) = 2x^6 + 15x^4 + 90x^2 + 120x - 4$

18. $g(x) = 2x^2 + \cos^2 x$

Dalam Soal-soal 19-28, tentukan di mana grafik dari fungsi yang diberikan naik, turun, cekung ke atas, dan cekung ke bawah. Kemudian skets grafiknya (lihat Contoh 4).

19. $f(x) = x^3 - 3x - 1$

20. $g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$

21. $g(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$

22. $F(x) = x^6 - 3x^4$

23. $G(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

24. $H(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

25. $f(x) = \sqrt{\sin x}$ pada $[0, \pi]$

26. $g(x) = x\sqrt{x - 2}$

27. $f(x) = x^{2/3}(1 - x)$

28. $g(x) = 8x^{1/3} + x^{4/3}$

Dalam Soal-soal 29-32, pada selang [0,6] sketsakan grafik suatu fungsi f yang memenuhi semua kondisi yang dinyatakan.

29. $f(0) = 3; f(3) = 0; f(6) = 4;$
$f'(x) < 0$ pada $(0, 3); f'(x) > 0$ pada $(3, 6);$
$f''(x) > 0$ pada $(0, 5); f''(x) < 0$ pada $(5, 6)$.

30. $f(0) = 3; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) < 0$ pada $(0, 2) \cup (2, 6);$
$f'(2) = 0;$
$f''(x) < 0$ pada $(0, 1) \cup (2, 6);$
$f''(x) > 0$ pada $(1, 2)$.

31. $f(0) = f(4) = 1; f(2) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ pada $(0, 2); f'(x) < 0$ pada $(2, 4) \cup (4, 6);$
$f'(2) = f'(4) = 0; f''(x) > 0$ pada $(0, 1) \cup (3, 4);$
$f''(x) < 0$ pada $(1, 3) \cup (4, 6)$

32. $f(0) = f(3) = 3; f(2) = 4;$
$f(4) = 2; f(6) = 0;$
$f'(x) > 0$ pada $(0, 2); f'(x) < 0$ pada $(2, 4) \cup (4, 5);$
$f'(2) = f'(4) = 0; f'(x) = -1$ pada $(5, 6);$
$f''(x) < 0$ pada $(0, 3) \cup (4, 5);$
$f''(x) > 0$ pada $(3, 4)$

33. Buktikan bahwa fungsi kuadrat tidak mempunyai titik balik.

34. Buktikan bahwa fungsi kubik mempunyai tepat satu titik balik.

35. Buktikan bahwa jika $f'(x)$ ada dan kontinu pada selang I dan jika $f'(x) \neq 0$ untuk semua titik-titik dalam dari I, maka atau f naik sepanjang I atau turun sepanjang I. *Petunjuk:* Gunakan Teorema Nilai Antara untuk memperlihatkan bahwa tidak terdapat dua titik x_1 dan x_2 dari I di mana f' berlawanan tanda.

36. Andaikan f fungsi yang turunannya adalah $f'(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)$. Gunakan Soal 35 untuk membuktikan bahwa f naik di mana-mana.

37. Gunakan Teorema Kemonotonan untuk membuktikan tiap pernyataan jika $0 < x < y$.

(a) $x^2 < y^2$ (b) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$

(c) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$

38. Dengan syarat a, b, dan c yang bagaimanakah akan membuat $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ selalu naik?

39. Tentukan a dan b sedemikian rupa sehingga $f(x) = a\sqrt{x} + b/\sqrt{x}$ mempunyai titik (4,13) sebagai titik belok.

40. Bentuk umum fungsi kubik $f(x)$ mempunyai tiga harga nol r_1, r_2 dan r_3. Tunjukkanlah bahwa titik beloknya berabsis $(r_1 + r_2 + r_3)/3$. *Petunjuk:* $f(x) = a(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$.

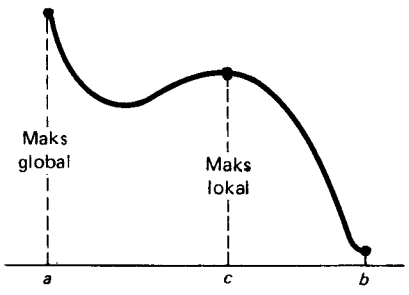
41. Andaikan bahwa $f'(x) > 0$ dan $g'(x) > 0$ untuk setiap x. Tambahan prasyarat apakah (apabila ada) yang diperlukan untuk menjamin bahwa:

(a) $f(x) + g(x)$ naik untuk setiap x.
(b) $f(x) \cdot g(x)$ naik untuk setiap x.
(c) $f(g(x))$ naik untuk setiap x.

42. Andaikan bahwa $f''(x) > 0$ dan $g''(x) > 0$ untuk setiap x. Tambahan prasyarat apakah (apabila ada) yang diperlukan untuk menjamin bahwa:

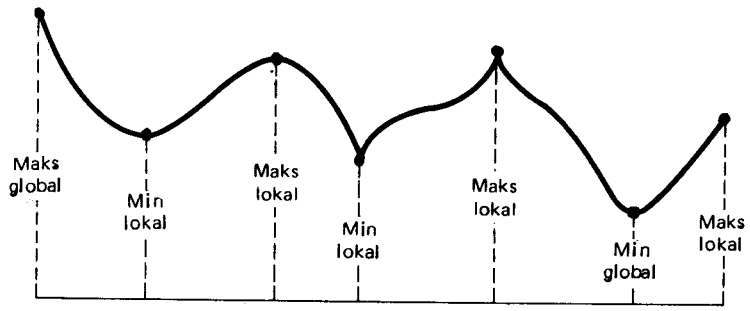
(a) $f(x) + g(x)$ membuka ke atas untuk setiap x.
(b) $f(x) \cdot g(x)$ membuka ke atas untuk setiap x.
(c) $f(g(x))$ membuka ke atas untuk setiap x.

4.3 Maksimum dan Minimum Lokal



GAMBAR 1

Kita ingat kembali dari Pasal 4.1 bahwa nilai maksimum (jika ada) suatu fungsi f pada himpunan S adalah nilai f terbesar yang dicapai pada keseluruhan himpunan S. Kadang-kadang diacu sebagai **nilai maksimum global**, atau *nilai maksimum absolut* dari f. Jadi untuk fungsi f dengan daerah asal $S = [a, b]$ yang grafiknya diskets dalam Gambar 1, $f(a)$ adalah nilai maksimum global. Tetapi bagaimana tentang $f(c)$? Mungkin saja ia bukan raja dari negara, tetapi paling sedikit ia adalah kepala dari lingkungan sekitarnya. Kita sebut $f(c)$ suatu **nilai maksimum lokal**, atau *nilai maksimum relatif*. Tentu saja nilai maksimum global otomatis juga nilai maksimum lokal. Gambar 2 melukiskan sejumlah kemungkinan. Perhatikan bahwa nilai maksimum global (jika ada) hanyalah yang terbesar di antara nilai-nilai maksimum lokal. Serupa, nilai minimum global adalah yang terkecil di antara nilai-nilai minimum lokal.



GAMBAR 2

Berikut definisi formal dari maksimum lokal dan minimum lokal. Ingat kembali bahwa lambang $\cap$ menyatakan irisan (bagian bersama) dari dua himpunan.

Definisi

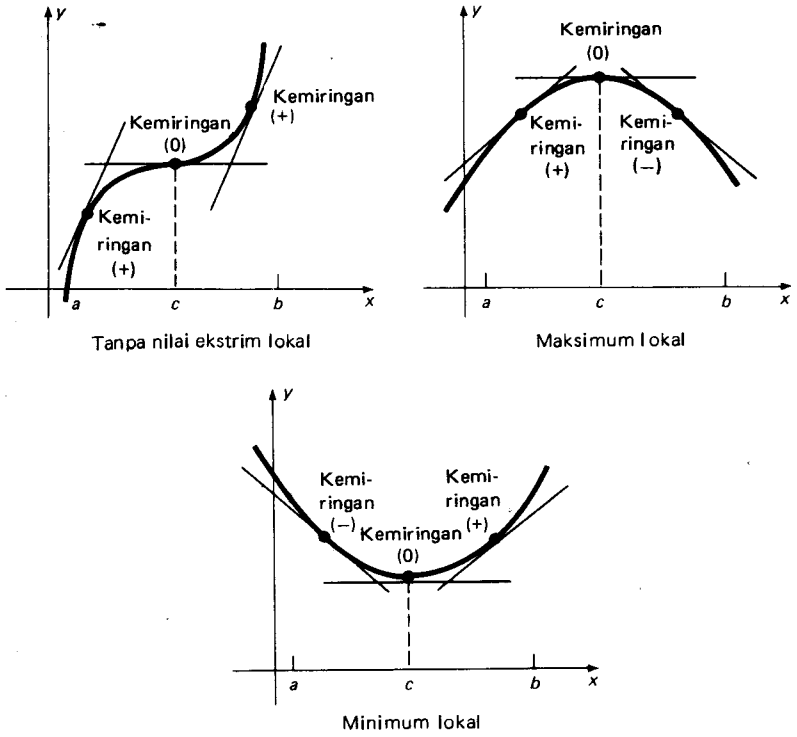
Andaikan S, daerah asal f, memuat titik c. Kita katakan bahwa:

(i) $f(c)$ **nilai maksimum lokal** f jika terdapat selang (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai maksimum f pada $(a, b) \cap S$;

(ii) $f(c)$ **nilai minimum lokal** f jika terdapat selang (a, b) yang memuat c sedemikian sehingga $f(c)$ adalah nilai minimum f pada $(a, b) \cap S$;

(iii) $f(c)$ **nilai ekstrim lokal** f jika ia berupa nilai maksimum lokal atau minimum lokal.

DI MANA NILAI-NILAI EKSTRIM LOKAL TERJADI? Teorema Titik Kritis (Teorema 4.1B) berlaku sebagaimana dinyatakan, dengan ungkapan *nilai ekstrim* diganti oleh *nilai ekstrim lokal*, bukti pada dasarnya sama. Jadi titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, dan titik singular) adalah calon untuk titik tempat kemungkinan terjadinya ekstrim lokal. Kita katakan *calon* karena kita tidak menuntut bahwa setiap titik kritis harus merupakan ekstrim lokal. Bagian kiri grafik dalam Gambar 3 membuat ini jelas. Tetapi, jika turunan adalah positif pada salah satu pihak dari titik kritis dan negatif pada pihak lainnya, maka kita mempunyai ekstrim lokal.

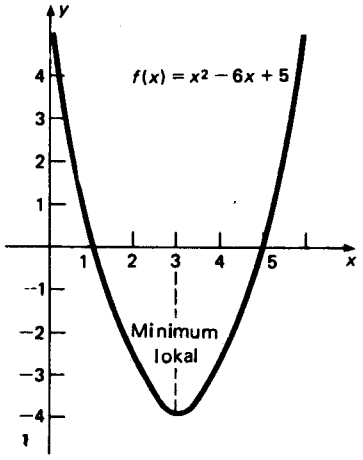


GAMBAR 3

Teorema A

(Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Lokal). Andaikan f kontinu pada selang terbuka (a, b) yang memuat titik kritis c.

(i) Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
(ii) Jika $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam (a, c) dan $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (c, b), maka $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.
(iii) Jika $f'(x)$ bertanda sama pada kedua pihak c, maka $f(c)$ bukan nilai ekstrim lokal f.



GAMBAR 4

Bukti (i) Karena $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam (a, c), maka menurut Teorema Kemonotonan f naik pada $(a, c]$. Menurut teorema yang sama, karena $f'(x) < 0$ untuk semua x dalam $[c, b)$, maka f turun pada $[c, b)$. Sehingga, $f(x) < f(c)$ untuk semua x dalam (a, b), kecuali tentu saja di $x = c$. Kita simpulkan bahwa $f(c)$ adalah maksimum lokal.

Bukti-bukti (ii) dan (iii) serupa. ■

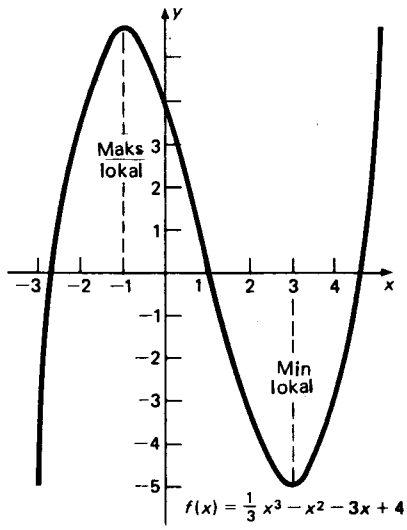
CONTOH 1 Cari nilai ekstrim lokal dari fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 5$. pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian Fungsi polinom f kontinu di mana-mana, dan turunannya, $f'(x) = 2x - 6$, ada untuk semua x. Jadi satu-satunya titik kritis untuk f adalah penyelesaian tunggal dari $f'(x) = 0$. yakni $x = 3$.

Karena $f'(x) = 2(x - 3) < 0$ untuk $x < 3$, f turun pada $(-\infty, 3]$; dan karena $2(x - 3) > 0$ untuk $x > 3$, f naik pada $[3, \infty)$. Karena itu, menurut Uji Turunan Pertama, $f(3) = -4$ adalah nilai minimum lokal f. Karena 3 adalah satu-satunya bilangan kritis, tidak terdapat nilai ekstrim lain. Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 4. Perhatikan bahwa dalam kasus ini $f(3)$ sebenarnya adalah nilai minimum (global). ■

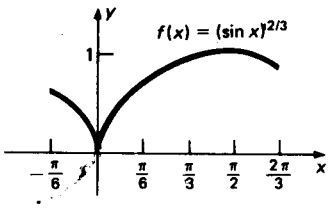
CONTOH 2 Cari nilai ekstrim lokal dari $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian



Karena $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$, titik kritis f hanyalah -1 dan 3. Bilamana kita gunakan titik-titik uji -2, 0, dan 4, kita pahami bahwa $(x + 1)(x - 3) > 0$ pada $(-\infty, -1)$ dan $(3, \infty)$ dan $(x + 1)(x - 3) < 0$ pada $(-1, 3)$. Menurut Uji Turunan Pertama, kita simpulkan bahwa $f(-1) = \frac{17}{3}$ adalah nilai maksimum lokal dan bahwa $f(3) = -5$ adalah nilai minimum lokal (Gambar 5). ■

GAMBAR 5



GAMBAR 6

CONTOH 3 Cari nilai ekstrim lokal dari $f(x) = (\sin x)^{2/3}$ pada $(-\pi/6, 2\pi/3)$.

Penyelesaian

$$f'(x) = \frac{2 \cos x}{3(\sin x)^{1/3}}, \qquad x \neq 0$$

Titik 0 dan $\pi/2$ adalah titik-titik kritis, karena $f'(0)$ tidak ada dan $f'(\pi/2) = 0$. Sekarang $f'(x) < 0$ pada $(-\pi/6, 0)$ dan pada $(\pi/2, 2\pi/3)$, sedangkan $f'(x) > 0$ pada $(0, \pi/2)$. Menurut Uji Turunan Pertama kita simpulkan bahwa $f(0) = 0$ adalah nilai minimum lokal dan bahwa $f(\pi/2) = 1$ adalah nilai maksimum lokal. Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 6. ■

UJI TURUNAN KEDUA Terdapat uji lain untuk maksimum dan minimum lokal yang kadang-kadang lebih mudah diterapkan daripada Uji Turunan Pertama. Ia menyangkut penghitungan turunan kedua pada titik-titik stasioner. Ia tidak berlaku pada titik singular.

Teorema B

(Uji Turunan Kedua Untuk Ekstrim Lokal). Andaikan f' dan f'' ada pada setiap titik dalam selang terbuka (a, b) yang memuat c, dan andaikan $f'(c) = 0$.

(i). Jika $f''(c) < 0$, $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal f.
(ii) Jika $f''(c) > 0$, $f(c)$ adalah nilai minimum lokal f.

Bukti (i) Adalah menggoda untuk mengatakan bahwa karena $f''(c) < 0$, f adalah cekung ke bawah dekat c dan menyatakan bahwa ini membuktikan (i). Tetapi, agar yakin bahwa f

cekung ke bawah di lingkungan c, kita memerlukan $f''(x) < 0$ di lingkungan tersebut (tidak hanya di c), dan tidak ada dalam hipotesis kita yang menjamin itu. Kita ambil taktik lain.

Dari definisi dan hipotesis,

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - 0}{x - c} < 0$$

sehingga kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat selang (α, β) (mungkin pendek) di sekitar c di mana

$$\frac{f'(x)}{x - c} < 0, \qquad x \neq c$$

Kedua ketaksamaan ini menunjukkan bahwa $f'(x) > 0$ untuk $\alpha < x < c$ dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x < \beta$. Jadi, menurut Uji Turunan Pertama, $f(c)$ adalah nilai maksimum lokal.

Bukti (ii) serupa. ■

CONTOH 4 Untuk $f(x) = x^2 - 6x + 5$, gunakan Uji Turunan Kedua untuk mengenali ekstrim lokal.

Penyelesaian Ini adalah fungsi dari Contoh 1. Perhatikan bahwa

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$
$$f''(x) = 2$$

Jadi $f'(3) = 0$ dan $f''(3) > 0$. Karena itu, menurut Uji Turunan Kedua, $f(3)$ adalah nilai minimum lokal. ■

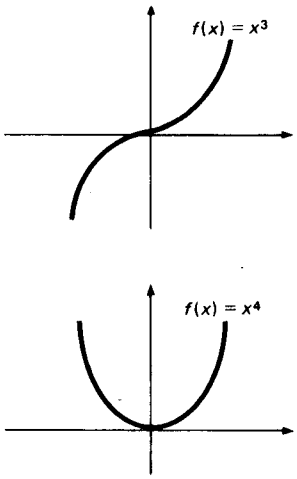
CONTOH 5 Untuk $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$, gunakan Uji Turunan Kedua untuk mengenali ekstrim lokal.

Penyelesaian

Ini adalah fungsi dari Contoh 2.

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$
$$f''(x) = 2x - 2$$

Titik-titik kritis adalah -1 dan 3 ($f'(-1) = f'(3) = 0$). Karena $f''(-1) = -4$ dan $f''(3) = 4$, kita simpulkan menurut Uji Turunan Kedua – bahwa $f(-1)$ adalah nilai maksimum lokal dan bahwa $f(3)$ adalah nilai minimum lokal. ■



GAMBAR 7

Sayang, Uji Turunan Kedua kadang-kadang gagal, karena $f''(x)$ mungkin 0 pada titik stasioner. Untuk $f(x) = x^3$ dan $f(x) = x^4$, $f'(0) = 0$ dan $f''(0) = 0$ (lihat Gambar 7). Yang pertama tidak mempunyai nilai maksimum atau minimum lokal di 0; yang kedua mempunyai minimum lokal di sana. Ini memperlihatkan bahwa jika $f''(x) = 0$ di titik stasioner, kita tidak mampu menarik kesimpulan tentang maksimum atau minimum tanpa informasi tambahan.

SOAL-SOAL 4.3

Dalam Soal-soal 1-6, kenali titik-titik kritis. Kemudian gunakan (a) Uji Turunan Pertama, dan (jika mungkin) Uji Turunan Kedua untuk memutuskan titik-titik kritis mana yang memberikan nilai maksimum lokal dan mana yang memberikan nilai minimum lokal.

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
2. $f(x) = x^3 - 3x + 4$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, 0 < x < 2\pi$
4. $f(x) = \cos^2 x, -\pi/2 < x < 3\pi/2$
5. $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$
6. $g(x) = 3x^4 - 4x^3$

Dalam Soal-soal 7-16, cari titik-titik kritis dan gunakan uji yang anda lebih senangi untuk memutuskan mana yang memberikan nilai maksimum lokal dan mana yang memberikan nilai minimum lokal. Apa saja nilai-nilai maksimum dan minimum lokal ini?

7. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x - 1$
8. $g(x) = x^4 - 2x^2 + 3$
9. $h(x) = x^4 + 2x^3$
10. $f(x) = (x - 1)^5$
11. $g(t) = 2 - (t - 1)^{2/3}$
12. $h(t) = 2t + t^{2/3}$
13. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, x \neq 0$
14. $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$
15. $f(t) = \dfrac{\sin t}{2 + \cos t}, 0 < t < 2\pi$
16. $g(t) = |\cos t|, 0 < t < 2\pi$

17. Cari nilai-nilai maksimum dan minimum (global) dari $F(x) = 6\sqrt{x} - 3x$ pada $[0, 9]$.

18. Kerjakan Soal 17 pada selang $[0, \infty)$.

19. Cari (jika mungkin) nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = \frac{64}{\sin x} + \frac{27}{\cos x}$$

pada $(0, \pi/2)$.

20. Cari (jika mungkin) nilai-nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

pada $(0, \infty)$.

C 21. Cari nilai minimum dari

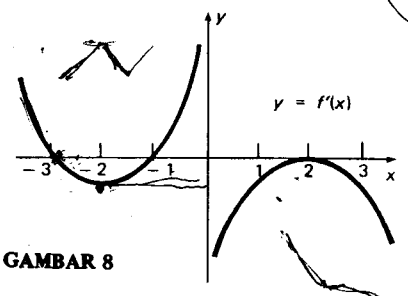
$$g(x) = x^2 + \frac{16x^2}{(8 - x)^2}, \qquad x > 8$$

22. Pandang $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ dengan $A > 0$. Buktikan bahwa $f(x) \geq 0$ untuk semua x jika dan hanya jika $B^2 - 4AC \leq 0$.

23. Diketahui $f'(x) = 2(x + 2)(x + 1)^2(x-2)^4(x-3)^3$, pada harga x berapakah yang menjadi $f(x)$ sebagai maksimum lokal? Sebagai minimum lokal?

24. Kesimpulan apakah yang dapat Anda peroleh mengenai f dari informasi bahwa $f'(c) = f''(c) = 0$ dan $f'''(c) > 0$?

25. Diketahui f merupakan suatu fungsi kontinu dan grafik f' seperti tampak dalam Gambar 8. Cobalah gambarkan grafik f dan jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut:
(a) Di manakah f naik? Turun?
(b) Di manakah f membuka ke atas? Ke bawah?
(c) Di manakah f mencapai maksimum lokal? Minimum lokal?
(d) Di manakah titik belok f?



GAMBAR 8

26. Andaikan f dan g adalah fungsi-fungsi positif dengan minimum lokal di C. Tunjukkanlah bahwa $f \cdot g$ pasti memiliki minimum lokal di C.

4.4 Lebih Banyak Masalah Maks-Min

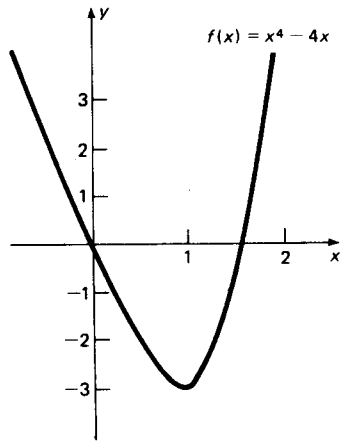
Masalah yang kita pelajari dalam Pasal 4.1 biasanya menganggap bahwa himpunan pada mana kita ingin memaksimumkan atau meminimumkan suatu fungsi berupa selang tertutup. Tetapi, selang-selang yang muncul dalam praktek tidak selalu tertutup; kadang-kadang terbuka atau bahkan setengah terbuka, setengah tertutup. Kita masih tetap menangani masalah ini jika kita menerapkan secara benar teori yang dikembangkan dalam Pasal 4.3. Ingat dalam hati bahwa maksimum (minimum) tanpa kata sifat tambahan berarti maksimum (minimum) global.

EKSTRIM PADA SELANG TERBUKA Kita berikan dua contoh untuk melukiskan prosedur yang sesuai untuk selang terbuka atau setengah terbuka.

CONTOH 1 Cari (jika mungkin) nilai maksimum dan minimum dari $f(x) = x^4 - 4x$ pada $(-\infty, \infty)$.

Penyelesaian

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1) = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$$



GAMBAR 1

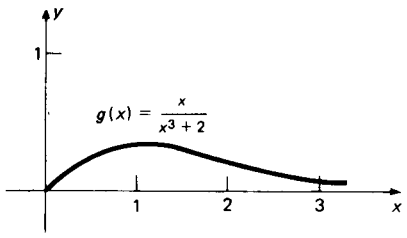
Karena $x^2 + x + 1 = 0$ tidak mempunyai penyelesaian bilangan riil (rumus kuadrat), hanya terdapat satu titik kritis, yaitu, $x = 1$. Untuk $x < 1, f'(x) < 0$, sedang untuk $x > 1, f'(x) > 0$. Kita simpulkan bahwa $f(1) = -3$ adalah nilai minimum lokal untuk f; dan karena f turun di sebelah kiri 1 dan naik di sebelah kanan 1, memang benar merupakan nilai minimum dari f.

Fakta-fakta yang dinyatakan di atas menunjukkan bahwa f tidak dapat mempunyai nilai maksimum. Grafik f diperlihatkan dalam Gambar 1. ■

CONTOH 2 Cari (jika mungkin) nilai maksimum dan minimum dari $g(x) = x/(x^3+2)$ pada $[0, \infty)$.

Penyelesaian

$$g'(x) = \frac{x^3 + 2 - x(3x^2)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2 - 2x^3}{(x^3 + 2)^2} = \frac{2(1 - x)(1 + x + x^2)}{(x^3 + 2)^2}$$



GAMBAR 2

Pada $[0, \infty)$, terdapat dua titik kritis, titik ujung 0 dan titik stasioner 1. Untuk $0 < x < 1$, $g'(x) > 0$, sedangkan untuk $x > 1$, $g'(x) < 0$. jadi, $g(1) = \frac{1}{3}$ adalah nilai maksimum g pada $[0, \infty)$.

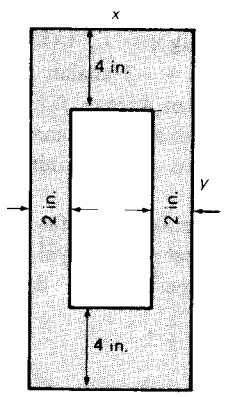
Jika g mempunyai nilai minimum, harus terjadi pada titik kritis yang lainnya, yakni $x = 0$. Sekarang $g(0) = 0$ dan $g(x) > 0$ untuk $x > 0$, sehingga $g(0) = 0$ adalah nilai minimum g pada $[0, \infty)$. Grafik diperlihatkan dalam Gambar 2. ■

MASALAH-MASALAH PRAKTIS Tiap contoh berikut berlainan; namun dalam prosedur terdapat elemen bersama yang kita pakai untuk menyelesaikannya. Pada akhir pasal ini, kita akan menyarankan serangkaian langkah yang dipakai menyelesaikan masalah maks-min apapun.

CONTOH 3 Sebuah surat selebaran memuat 50 cm persegi bahan cetak. Jalur bebas cetak di atas dan di bawah selebar 4 cm dan di samping kiri dan kanan selebar 2 cm. Berapa ukuran surat selebaran tersebut yang memerlukan kertas sesedikit mungkin?

Penyelesaian Andaikan surat edaran mempunyai lebar x dan tinggi y (Gambar 3). Luasnya adalah

$$A = xy$$



GAMBAR 3

Kita bermaksud meminimumkan A.

Seperti terlihat, A diungkapkan dalam bentuk dua variabel, situasi yang tidak kita ketahui bagaimana menanganinya. Tetapi, kita akan mencari sebuah persamaan yang mengaitkan x dan y sehingga salah satu dari variabel ini dapat dihilangkan dari ungkapan untuk A. Ukuran bahan cetakan adalah $x - 4$ dan $y - 8$ dan luasnya adalah 50 inci persegi; sehingga $(x - 4)(y - 8) = 50$. Bilamana kita selesaikan persamaan ini untuk y, kita peroleh

$$y = \frac{50}{x - 4} + 8$$

Dengan penggantian ungkapan ini untuk y dalam $A = xy$ memberikan

$$A = \frac{50x}{x - 4} + 8x$$

Nilai-nilai x yang diperbolehkan adalah $4 < x < \infty$; kita ingin meminimumkan A pada selang terbuka $(4, \infty)$.

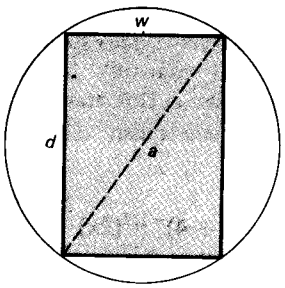
Sekarang

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(x - 4)50 - 50x}{(x - 4)^2} + 8 = \frac{8x^2 - 64x - 72}{(x - 4)^2} = \frac{8(x + 1)(x - 9)}{(x - 4)^2}$$

Titik-titik kritis hanya diperoleh dengan menyelesaikan $dA/dx = 0$; ini menghasilkan $x = 9$ dan $x = -1$. Kita tolak $x = -1$ karena ia tidak dalam selang $(4, \infty)$. Karena $dA/dx < 0$ untuk x dalam $(4, 9)$ dan $dA/dx > 0$ untuk x dalam $(9, \infty)$, kita simpulkan bahwa A mencapai nilai minimumnya pada $x = 9$. Nilai ini membuat $y = 18$ (diperoleh dengan menggantikannya dalam persamaan yang mengaitkan x dan y). Sehingga ukuran surat edaran yang akan memakai kertas paling sedikit adalah 9 cm kali 18 cm. ■

CONTOH 4 Sebuah balok kayu persegi-panjang harus dipotong dari sebuah gelondongan dengan penampang yang berbentuk lingkaran. Jika kekuatan balok sebanding dengan hasil kali lebar dan kuadrat tebalnya, tentukan ukuran penampang yang memberikan balok yang paling kuat.

Penyelesaian Nyatakan garis tengah gelondongan dengan a (konstanta) dan lebar dan tebal balok masing-masing dengan w dan d (Gambar 4). Kita bermaksud memaksimumkan S, kekuatan balok.



GAMBAR 4

Dari persyaratan masalah,

$$S = kwd^2$$

dengan k adalah konstanta kesebandingan. Kekuatan S tergantung pada dua variabel w dan d, tetapi terdapat hubungan sederhana di antara mereka,

$$d^2 + w^2 = a^2$$

Bilamana kita menyelesaikan persamaan ini untuk d^2 dan menggantikan ke dalam rumus untuk S, kita peroleh

$$S = kw(a^2 - w^2) = ka^2w - kw^3$$

Kita tinjau nilai-nilai yang diperbolehkan untuk w adalah $0 < w < a$, sebuah selang terbuka.

Untuk mencari titik kritis, kita hitung dS/dw, menetapkannya sama dengan 0, dan menyelesaikan untuk w,

$$\frac{dS}{dw} = ka^2 - 3kw^2 = k(a^2 - 3w^2)$$

$$k(a^2 - 3w^2) = 0$$

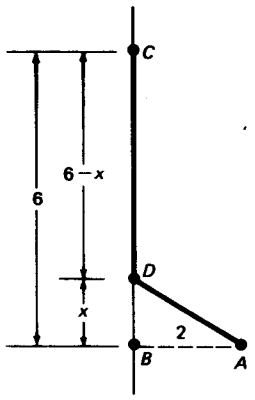
$$w = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Karena $a/\sqrt{3}$ adalah titik kritis satu-satunya dalam $(0, a)$, kelihatannya akan memberikan nilai maksimum S. Pemeriksaan pada tanda dS/dw di kiri dan di kanan $a/\sqrt{3}$ akan menegaskan hal ini.

Bilamana kita menggantikan $w = a/\sqrt{3}$ dalam $d^2 + w^2 = a^2$, kita pahami bahwa $d = \sqrt{2}a/\sqrt{3}$. Ukuran yang diinginkan adalah $w = a/\sqrt{3}$ dan $d = \sqrt{2}a/\sqrt{3}$. Perhatikan bahwa $d = \sqrt{2}w$. ■

CONTOH 5 Anton berada di perahu dayung 2 mil dari titik terdekat B pada sebuah pantai yang lurus melihat asap mengepul dari rumahnya di pantai, yang berjarak 6 mil dari B. Ia membayangkan dapat mendayung dengan laju 6 mil/jam dan lari 10 mil/jam. Bagaimana ia harus bertindak agar mencapai rumah secepatnya?

Penyelesaian Kita tafsirkan persoalan itu dengan arti bahwa menentukan x dalam Gambar 5 akan membuat waktu perjalanan Anton minimum. Jelas bahwa kita harus membatasi x pada selang tertutup $[0, 6]$.



GAMBAR 5

Jarak AD adalah $\sqrt{x^2 + 4}$ mil dan waktu untuk mendayung adalah $\sqrt{x^2 + 4}/6$ jam. Jarak DC adalah $6 - x$ mil dan waktu untuk menempuhnya dengan lari adalah $(6 - x)/10$ jam. Jadi waktu total T dalam jam adalah

$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{6} + \frac{6 - x}{10}$$

Kita ingin meminimumkan T pada $[0, 6]$.

Kali ini terdapat tiga titik kritis, titik ujung 0 dan 6 dan sebuah titik stasioner yang diperoleh dengan menetapkan dT/dx sama dengan nol.

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}(2x) - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{10x - 6\sqrt{x^2 + 4}}{60\sqrt{x^2 + 4}}$$

Bilamana kita tetapkan ini sama dengan 0 dan menyelesaikannya, secara beruntun kita peroleh,

$$10x - 6\sqrt{x^2 + 4} = 0$$

$$5x = 3\sqrt{x^2 + 4}$$

$$25x^2 = 9(x^2 + 4)$$

$$16x^2 = 36$$

$$x^2 = \tfrac{36}{16}$$

$$x = \tfrac{3}{2}$$

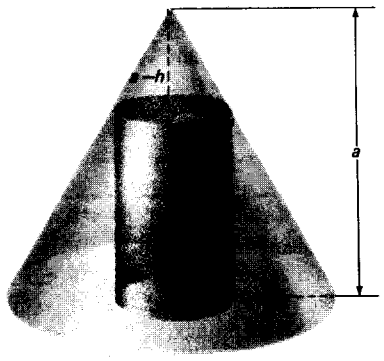
x	T
0	0,93
1,5	0,87
6	1,05

GAMBAR 6

Karena daerah asal untuk T adalah selang tertutup, maka T mempunyai minimum (Teorema 4,1A), dan minimum ini harus terjadi di sebuah titik kritis (Teorema 4.1B). Setelah memperhatikan tabel dalam Gambar 6, kita simpulkan bahwa Anton harus mendayung ke titik 1,5 mil di pantai dan kemudian menempuh sisanya dengan berlari. Itu akan memakan waktu sekitar 0,87 jam, atau 52 menit. Untuk masalah yang serupa di mana salah satu titik ujung menghasilkan waktu minimum, lihat Soal 15. ■

CONTOH 6 Cari ukuran tabung lingkaran tegak yang volumenya sebesar mungkin yang dapat ditempatkan di dalam sebuah kerucut lingkaran tegak.

Penyelesaian



GAMBAR 7

Andaikan a tinggi dan b jari-jari dari alas kerucut yang diketahui (dua-duanya konstanta). Nyatakan dengan h, r, dan V masing-masing tinggi, jari-jari, dan volume dari tabung yang dimasukkan (lihat Gambar 7).

Volume tabung adalah

$$V = \pi r^2 h$$

Dari segitiga-segitiga yang serupa,

$$\frac{a-h}{r} = \frac{a}{b}$$

yang memberikan

$$h = a - \frac{a}{b}r$$

Bilamana kita gantikan ungkapan untuk h ini dalam rumus untuk V, kita peroleh

$$V = \pi r^2\left(a - \frac{a}{b}r\right) = \pi a r^2 - \pi\frac{a}{b}r^3$$

Kita ingin memaksimumkan V untuk r dalam selang $[0, b]$. (Seseorang secara yakin menganjurkan — dan dengan alasan yang benar — bahwa selang yang sesuai adalah $(0, b)$. Sebenarnya, jawabnya sama saja, walaupun kita harus menerapkan Uji Turunan Pertama jika kita lakukan dengan menggunakan $(0, b)$ sebagai daerah asal).

Sekarang

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi a r - 3\pi\frac{a}{b}r^2 = \pi a r\left(2 - \frac{3}{b}r\right)$$

Ini menghasilkan titik stasioner $r = 2b/3$, yang memberikan tiga titik kritis yang harus ditinjau: 0, $2b/3$, dan b. Dengan melihat pada gambar terlihat bahwa $r = 0$ dan $r = b$ keduanya memberikan volume 0. Jadi $r = 2b/3$ harus memberikan nilai maksimum itu. Bilamana kita gantikan nilai ini untuk r dalam persamaan yang menghubungkan r dan h, kita temukan bahwa $h = a/3$. ■

RINGKASAN METODE Berdasarkan contoh-contoh di atas, kita menyarankan sebuah metode langkah demi langkah untuk dipakai dalam masalah maks-min terapan. Jangan mengikutinya secara membabi buta: kadang-kadang akal sehat menyarankan alternatif lain atau penghilangan beberapa langkah.

Langkah 1 Buat sebuah gambar untuk masalah dan berikan variabel-variabel yang sesuai untuk besaran-besaran kunci.

Langkah 2 Tuliskan rumus untuk besaran Q yang harus dimaksimumkan (diminimumkan) dalam bentuk variabel-variabel tersebut.

Langkah 3 Gunakan kondisi-kondisi masalah untuk menghilangkan semua kecuali satu dari variabel-variabel ini dan karenanya menyatakan Q sebagai fungsi dari satu variabel, misalnya x.

Langkah 4 Tentukan himpunan nilai-nilai x yang mungkin, biasanya sebuah selang.

Langkah 5 Tentukan titik-titik kritis (titik ujung, titik stasioner, titik singular). Paling sering, titik-titik kritis kunci berupa titik-titik stasioner di mana $dQ/dx = 0$.

Langkah 6 Gunakan teori bab ini untuk memutuskan titik kritis mana yang memberikan maksimum (minimum).

SOAL-SOAL 4.4

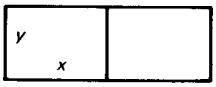
1. Cari dua bilangan yang hasilkalinya -12 dan jumlah kuadratnya minimum.

2. Bilangan manakah yang akar pangkat empatnya melebihi dua kalinya sebesar mungkin?

3. Cari titik-titik pada parabol $x = 2y^2$ yang terdekat ke titik $(10, 0)$. *Petunjuk:* Minimumkan kuadrat dari jarak antara (x, y) dan $(10, 0)$.

4. Cari titik-titik pada hiperbol $x^2/4 - y^2 = 1$ yang terdekat ke titik $(5, 0)$.

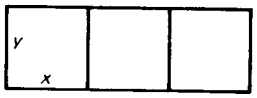
5. Seorang petani bermaksud memagari dua kandang persegi-panjang berdampingan yang identik, masing-masing seluas 900 kaki persegi, seperti diperlihatkan dalam Gambar 8. Berapa x dan y agar pagar kawat yang diperlukan sesedikit mungkin?



GAMBAR 8

6. Andaikan batas luar kandang Soal 5 memerlukan kawat tebal yang biayanya Rp 200 tiap kaki, tetapi bagian tengah hanya memerlukan biaya Rp 100 tiap kaki. Berapa ukuran x dan y agar menghasilkan biaya kawat termurah?

7. Andaikan petani pada Soal 5 memilih untuk membuat tiga kandang berdampingan masing-masing seluas 900 kaki persegi, seperti diperlihatkan pada Gambar 9. Berapa x dan y sehingga kawat yang diperlukan sesedikit mungkin?



GAMBAR 9

8. Pelajari penyelesaian Soal 5 dan 7 untuk melihat apakah anda dapat membuat suatu dugaan tentang perbandingan banyak kawat yang diperlukan pada arah-x dan banyak yang diperlukan pada arah-y dalam semua masalah sejenis ini. Kemudian, jika anda berambisi, coba buktikan dugaan anda.

9. Sebuah bak air dengan alas berbentuk bujur sangkar harus dibangun untuk menampung air 12.000 kaki kubik. Jika logam untuk tutup atas memerlukan biaya dua kali biaya untuk sisi dan alas beton tiap kaki persegi, berapa ukuran bak yang paling hemat?

10. Diperlukan sebuah kotak terbuka dengan kapasitas 36.000 inci kubik. Jika panjang kotak harus dua kali lebarnya, berapa ukuran kotak agar bahan yang diperlukan sesedikit mungkin?

11. Jika kekuatan sebuah balok persegi-panjang sebanding dengan hasil kali lebar dan kuadrat tebalnya, cari ukuran

...k yang terkuat yang dapat dipotong ...ri sebuah gelombang yang penampang-...ya berbentuk elips $9x^2 + 8y^2 = 72$. Lihat Contoh 4.

12. Penerangan pada sebuah titik berbanding terbalik terhadap jarak titik tersebut dari sumber cahaya dan berbanding lurus terhadap intensitas sumber cahaya. Jika dua sumber cahaya berjarak s kaki dan masing-masing mempunyai intensitas I_1 dan I_2, pada titik mana di antara mereka jumlah penyinaran mereka akan minimum?

13. Sebuah pulau kecil letaknya 2 mil dari titik terdekat P pada sebuah pantai lurus suatu danau besar. Jika seorang di pulau dapat mendayung perahunya dengan laju 3 mil/jam dan dapat berjalan 4 mil/jam, di mana dia harus mendaratkan perahunya agar sampai di sebuah kota di pantai sejauh 10 mil dari P secepat mungkin? Lihat Contoh 5.

14. Dalam Soal 13, andaikan orang itu pada waktu mendarat akan dijemput sebuah kendaraan yang mempunyai kecepatan rata-rata 50 mil/jam. Di mana ia harus mendarat?

15. Dalam Soal 13, andaikan orang itu memakai perahu motor dengan laju 20 mil/jam. Di mana ia harus mendarat?

16. Sebuah pembangkit tenaga listrik terletak di tepi sebuah sungai lurus yang lebarnya w kaki. Sebuah pabrik terletak di seberang sungai, L kaki ke arah hilir dari titik A yang berseberangan langsung dengan pabrik. Jalur mana yang paling hemat untuk pemasangan sebuah kabel yang menghubungkan pembangkit dengan pabrik jika biaya pemasangan kabel di bawah air a rupiah tiap kaki dan b rupiah di darat ($a > b$)?

17. Pada pukul 7.00 sebuah kapal berada pada jarak 60 mil di timur sebuah kapal kedua. Jika kapal pertama berlayar ke barat dengan laju 20 mil/jam dan kapal kedua berlayar ke tenggara dengan laju 30 mil/jam, bilakah kedua kapal tersebut pada jarak terdekat?

18. Cari persamaan garis yang menyinggung elips $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ di kuadran pertama dan yang dengan sumbu-sumbu membentuk segitiga yang luasnya sekecil mungkin (a dan b konstanta positif).

19. Cari volume terbesar yang dapat dipunyai oleh sebuah tabung lingkaran tegak jika ia diletakkan di dalam sebuah bola dengan jari-jari r.

20. Perlihatkan bahwa persegi-panjang dengan keliling maksimum yang dapat dilukis di dalam sebuah lingkaran adalah bujur sangkar.

21. Berapa ukuran relatif dari tabung lingkaran tegak dengan luas selimut terbesar yang dapat dibuat di dalam sebuah bola yang diketahui?

22. Sebuah kerucut lingkaran tegak dibuat di dalam kerucut lingkaran tegak lain yang volumenya diketahui, dengan sumbu sama dan puncak kerucut dalam menyentuh alas kerucut luar. Berapa harus perbandingan tinggi-tingginya agar kerucut dalam mempunyai volume maksimum?

23. Sepotong kawat panjang 100 sentimeter dipotong menjadi dua bagian; satu potong ditekuk membentuk bujur sangkar, yang lainnya ditekuk membentuk segitiga sama sisi. Di tempat manakah seharusnya pemotongan dilakukan jika (a) jumlah luas-luas harus minimum; (b) maksimum? (Perbolehkan kemungkinan tidak memotong).

24. Sebuah peti berbentuk balok dengan alas bujur sangkar volumenya diketahui. Jika bahan yang dipakai alas memerlukan biaya tiap inci persegi 20% lebih mahal daripada bahan sisi-sisi tegak dan bahan bidang atas tiap inci persegi 50% lebih mahal daripada sisi-sisi tegak, cari perbandingan ukuran peti yang paling hemat?

25. Sebuah observatorium harus berbentuk tabung lingkaran tegak yang diatapi sebuah kubah setengah bola. Jika biaya kubah atap tiap kaki persegi lebih mahal dua kali daripada biaya dinding silinder, berapa perbandingan ukuran yang paling hemat untuk suatu volume yang diketahui?

26. Sebuah beban yang dihubungkan ke sebuah pegas bergerak sepanjang sumbu-

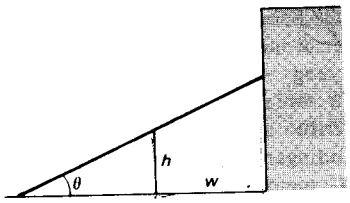
x. sehingga koordinat-x nya pada saat t adalah

$$x = \sin 2t + \sqrt{3}\cos 2t$$

Berapa jarak terjauh beban dari titik asal?

27. Benda berbentuk sebuah sektor lingkaran (daerah bentuk kue) dengan jari-jari r dan sudut puncak θ. Cari r dan θ jika luasnya adalah suatu konstanta A dan kelilingnya minimum.

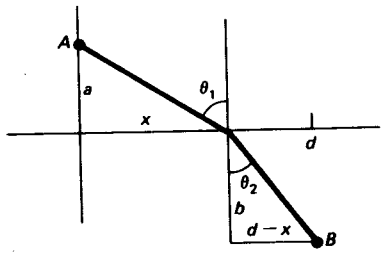
28. Pagar setinggi h kaki berdiri sejajar sebuah gedung tinggi dan sejauh w kaki darinya (Gambar 10). Cari panjang tangga terpendek yang dapat dicapai dari tanah di sebarang puncak pagar ke dinding bangunan.



GAMBAR 10

29. (Hukum Snell) Prinsip Fermat dalam optik mengatakan bahwa cahaya melintas dari titik A ke titik B sepanjang jalur yang memerlukan waktu tersingkat. Andaikan bahwa cahaya melintas dari satu medium dengan kecepatan c_1 dan dalam medium kedua dengan kecepatan c_2. Jika A dalam medium 1 dan B dalam medium 2 dan sumbu-x memisahkan kedua media tersebut, seperti diperlihatkan dalam Gambar 11, perlihatkan bahwa

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$



GAMBAR 11

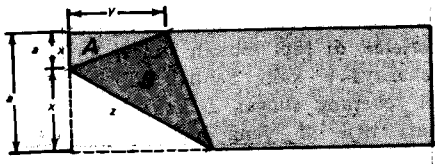
30. Sinar dari A dipantulkan ke B oleh sebuah cermin datar. Gunakan Prinsip Fermat (Soal 29) untuk memperlihatkan bahwa sudut datang sama dengan sudut pantul.

31. Salah satu ujung sebuah tangga yang tingginya 27 kaki berada di tanah dan di sandarkan pada dinding yang tinginya 8 kaki. Dengan menggeser bagian bawahnya ke arah dinding, bagian atasnya akan semakin menonjol keluar di atas dinding tadi. Tentukan tonjolan horisontal maksimum dari bagian atas tangga tersebut.

32. Saya memiliki perak murni yang cukup untuk dapat melapisi suatu luas permukaan 1 meter persegi. Saya merencanakan akan melapis sebuah bola dan sebuah kubus. Dengan dimensi yang bagaimanakah agar volume total benda yang terlapisi itu maksimum? Minimum? (Dapat dimungkinkan seluruh perak yang ada hanya dapat melapisi sebuah benda saja).

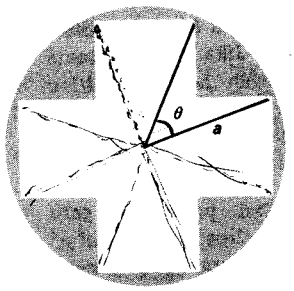
33. Satu sudut dari secarik kertas dilipat ke atas sehingga menyentuh sisi yang dihadapannya seperti tampak dalam Gambar 12. Dengan penamaan bagian-bagiannya seperti tertera, tentukanlah x dalam rangka:

(a) Memaksimumkan luas segitiga A.
(b) Meminimumkan luas segitiga B.
(c) Meminimumkan panjang z.



GAMBAR 12

34. Tentukan θ agar luas dari tanda palang simetris seperti tampak dalam Gambar 13 menjadi maksimum. Kemudian tentukan luas maksimum tersebut.



GAMBAR 13

Terapan Ekonomik

Tiap bidang ilmu mempunyai bahasanya sendiri-sendiri. Tentu saja ini benar untuk ekonomi, yang mempunyai kosakata yang dikembangkan sangat khusus. Sekali kita memahami kosakata ini, kita akan menemukan bahwa banyak masalah ekonomi sebenarnya merupakan masalah kalkulus biasa yang dikenakan baju baru.

Pandang sebuah perusahaan khas, PT ABC. Untuk memudahkan anggap bahwa ABC menghasilkan dan memasarkan sebuah barang; mungkin berupa televisi, aki kendaraan, atau sabun dalam peti. Jika ABC menjual x satuan barang tahun ini, ABC akan mampu membebankan **harga**, $p(x)$ untuk tiap satuan. Kita tunjukkan bahwa p tergantung pada x karena bilamana ABC memperbesar keluarannya, kemungkinan ABC akan perlu mengurangi harga tiap satuan agar dapat menjual seluruh hasil keluarannya. **Pendapatan total** yang dapat diharapkan ABC diberikan oleh $R(x) = xp(x)$, banyak satuan kali harga tiap satuan.

Untuk memproduksi dan memasarkan x satuan, ABC akan mempunyai **biaya total**, $C(x)$. Ini biasanya jumlah dari **biaya tetap** (keperluan kantor, pajak bangunan dan sebagainya) ditambah biaya variabel, yang secara langsung tergantung pada banyaknya satuan yang diproduksi.

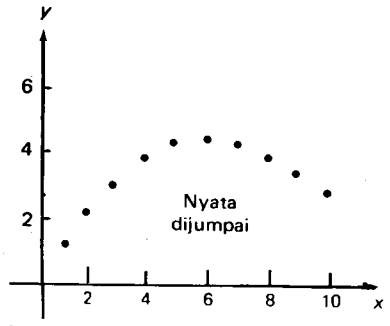
Konsep dasar untuk sebuah perusahaan adalah total laba $P(x)$, yakni selisih antara pendapatan dan biaya.

$$P(x) = R(x) - C(x) = xp(x) - C(x)$$

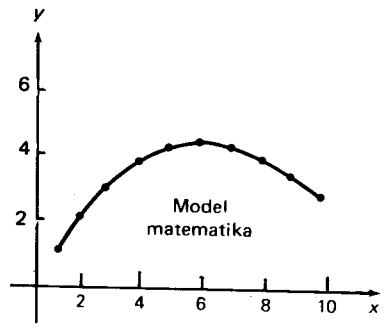
Umumnya, sebuah perusahaan berusaha memaksimumkan total labanya.

MATEMATIKA DISKRIT

Ada dua kejadian yang dapat menyebabkan perubahan dalam kurikulum matematika. Pertama, hampir semua masalah dalam ilmu-ilmu sosial dipandang mempunyai sifat-sifat diskrit. Kedua, komputer-digital dipergunakan sebagai mesin diskrit. Orang-orang bertanya "Mengapa tidak mempelajari masalah-masalah diskrit dengan menggunakan matematika diskrit daripada membuat modelnya terlebih dahulu dengan kurva-kurvanya kontinu agar kalkulus dapat dipergunakan?" Bacalah lebih banyak buku dan ikuti lebih banyak kuliah mengenai *Matematika Diskrit*.



GAMBAR 1



GAMBAR 2

Hal yang harus diperhatikan adalah perlunya membedakan masalah ekonomi dengan masalah fisika. Pada dasarnya, suatu produk akan berupa satuan-satuan diskrit (Anda tidak dapat membuat atau

menjual 0,23 pesawat televisi atau 3,14 accu mobil). Jadi, fungsi $R(x)$, $C(x)$ dan $P(x)$ pada umumnya didefinisikan hanya untuk $x = 0, 1, 2, \ldots$ dan sebagai akibatnya, grafiknya akan terdiri dari titik-titik diskrit (Gambar 1). Agar kita dapat mempergunakan kalkulus, titik-titik ini kita hubungkan satu sama lain sehingga membentuk kurva (Gambar 2), dengan demikian R, C, dan P dapat dianggap sebagai fungsi yang dapat didiferensialkan. Hal ini menggambarkan salah satu aspek dari *Model Matematika* yang hampir selalu diperlukan, terutama dalam ilmu ekonomi. Untuk membuat model dari suatu masalah yang nyata dijumpai, kita harus menyederhanakan beberapa asumsi. Ini berarti bahwa jawaban yang kita peroleh hanya merupakan jawaban pendekatan – salah satu alasan bahwa ilmu ekonomi sedikit kurang sempurna.

Suatu masalah yang berkaitan dengan seorang pakar ekonomi adalah bagaimana mendapatkan rumus untuk fungsi-fungsi $C(x)$ dan $p(x)$. Dalam hal yang sederhana, $C(x)$ dapat berbentuk:

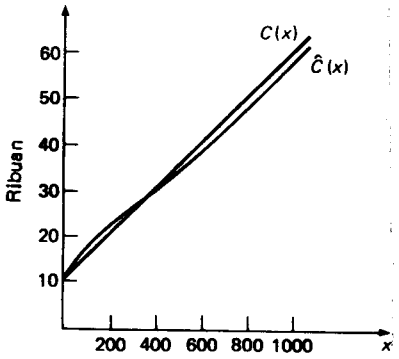
$$C(x) = 10{,}000 + 50x$$

Jika demikian, \$10,000 merupakan biaya tetap dan \$50 merupakan biaya langsung dari setiap unit yang diproduksi. Barangkali contoh yang lebih dapat menggambarkan masalahnya adalah:

$$\hat{C}(x) = 10{,}000 + 45x + 100\sqrt{x}$$

dalam hal ini biaya variabel rata-rata per unit adalah:

$$\frac{45x\ 100\sqrt{x}}{x} = 45 = \frac{100}{\sqrt{x}}$$



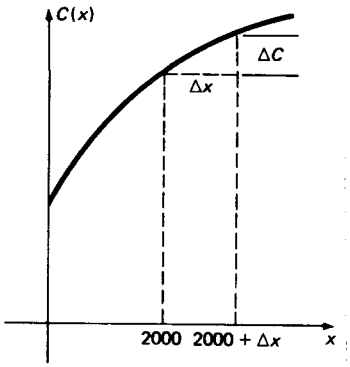
GAMBAR 3

suatu nilai yang berkurang apabila x bertambah (efisiensi dari besarnya produksi). Fungsi-fungsi biaya $C(x)$ dan $\hat{C}(x)$ digambar menjadi satu pada Gambar 3.

Pemilihan fungsi-fungsi biaya dan harga yang sesuai merupakan tugas yang sulit. Kadangkala keduanya dapat ditentukan dari asumsi dasar, dan dalam hal-hal tertentu belajar dari pengalaman perusahaan akan banyak membantu. Kadang-kadang kita harus melakukannya hanya dengan prakiraan saja.

PENGGUNAAN KATA MARJINAL Andaikan ABC mengetahui fungsi biayanya $C(x)$ dan untuk sementara direncanakan memproduksi 2000 satuan tahun ini. Direktur Utama Badirun ingin menetapkan biaya tambahan tiap satuan jika ABC memperbesar produksinya sedikit. Misalnya, apakah itu akan lebih sedikit dari pendapatan tambahan tiap satuan? Jika demikian, akan merupakan pertimbangan ekonomi yang baik untuk memperbesar produksinya.

Jika fungsi biaya adalah seperti yang diperlihatkan dalam Gambar 2, Direktur Utama Badirun menanyakan nilai $\Delta C/\Delta x$ pada saat



GAMBAR 4

$\Delta x = 1$. Tetapi kita mengharapkan bahwa ini akan sangat dekat terhadap nilai

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

... $x = 2000$. Ini disebut **biaya marjinal**. Kita para matematikawan mengenalinya ... dC/dx, turunan C terhadap x.

Dengan nafas serupa, kita definisikan **harga marjinal** sebagai dp/dx, **pendapatan marjinal** sebagai dR/dx, dan **keuntungan marjinal** sebagai dP/dx.

CONTOH-CONTOH Sekarang kita gambarkan bagaimana menyelesaikan aneka ragam masalah ekonomi.

CONTOH 1 Andaikan $C(x) = 8300 + 3{,}25x + 40\sqrt[3]{x}$ rupiah. Cari biaya rata-rata tiap satuan dan biaya marjinal dan hitung mereka bilamana $x = 1000$.

Penyelesaian

$$\text{Biaya rata-rata: } \frac{C(x)}{x} = \frac{8300 + 3{,}25x + 40x^{1/3}}{x}$$

$$\text{Biaya marjinal: } \frac{dC}{dx} = 3{,}25 + \frac{40}{3}x^{-2/3}$$

Pada $x = 1000$, ini masing-masing mempunyai nilai-nilai 11,95 dan 3,38. Ini berarti bahwa rata-rata biaya tiap satuan adalah Rp. 11.950 untuk memproduksi 1000 satuan yang pertama; untuk memproduksi satu satuan tambahan di atas 1000 hanya memerlukan biaya Rp. 3.380. ■

CONTOH 2 Sebuah perusahaan memperkirakan bahwa akan dapat menjual 1000 satuan tiap minggu jika menetapkan harga satuan sebesar Rp. 3.000, tetapi bahwa penjualan mingguannya akan meningkat 100 satuan dengan tiap penurunan harga sebesar Rp. 100. Jika x banyaknya satuan yang terjual tiap minggu ($x \geq 1000$), cari:

(a) fungsi harga, $p(x)$;

(b) banyaknya satuan dan harga yang berpadanan yang akan memaksimumkan pendapatan mingguan;

(c) pendapatan mingguan maksimum.

Penyelesaian

(a) Kita mengetahui bahwa

$$x = 1000 + \frac{3{,}00 - p(x)}{0{,}10}\ (100)$$

atau, ekivalennya $p(x) = 3{,}00 - (0{,}10)\dfrac{(x - 1000)}{100} = 4 - 0{,}001x$

(b) $R(x) = xp(x) = 4x - 0{,}001x^2$

$$\frac{dR}{dx} = 4 - 0{,}002x$$

Titik-titik kritis hanyalah titik ujung 1000 dan titik stasioner 2000, yang diperoleh dengan menetapkan $dR/dx = 0$. Uji Turunan Pertama ($R'(x) > 0$ untuk $1000 \leq x < 2000$ dan $R'(x) < 0$ untuk $x > 2000$) memperlihatkan bahwa $x = 2000$ memberikan pendapatan maksimum. Ini berpadanan terhadap harga satuan $p(2000) =$ Rp. 2.000.

(c) Pendapatan mingguan maksimum adalah $R(2000) =$ Rp. 4.000.000. ■

CONTOH 3 Dalam memproduksi dan menjual x satuan komoditi tertentu, fungsi harga p dan fungsi biaya C (dalam ribuan rupiah) diberikan oleh

$$p(x) = 5{,}00 - 0{,}002x$$
$$C(x) = 3{,}00 + 1{,}10x$$

Cari ungkapan untuk pendapatan marjinal, biaya marjinal, dan keuntungan marjinal; tentukan tingkat produksi yang akan menghasilkan keuntungan total maksimum.

Penyelesaian

$$R(x) = xp(x) = 5{,}00x - 0{,}002x^2$$
$$P(x) = R(x) - C(x) = -3{,}00 + 3{,}90x - 0{,}002x^2$$

Jadi, kita mempunyai turunan-turunan berikut.

Pendapatan marjinal: $\dfrac{dR}{dx} = 5 - 0{,}004x$

Biaya marjinal: $\dfrac{dC}{dx} = 1{,}1$

Laba marjinal: $\dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dR}{dx} - \dfrac{dC}{dx} = 3{,}9 - 0{,}004x$

Untuk memaksimumkan laba, kita tetapkan $dP/dx = 0$ dan selesaikan. Ini memberikan $x = 975$ sebagai satu-satunya bilangan kritis yang ditinjau. Ia memang menyediakan suatu maksimum, seperti bila diperiksa dengan Uji Turunan Pertama. Laba maksimum adalah $P(975)$ = Rp. 1.898,25 (ribu) = Rp. 1.898.250,–. ■

Perhatikan bahwa di $x = 975$, pendapatan marjinal dan biaya marjinal dua-duanya adalah Rp. 1.100,–. Secara umum, sebuah perusahaan harus mengharapkan berada pada tingkat laba maksimum bila biaya produksi sebuah satuan tambahan tepat sama dengan pendapatan dari satuan tersebut.

Pernyataan yang baru dibuat menganggap bahwa fungsi biaya dan fungsi pendapatan adalah fungsi yang baik, fungsinya dapat didiferensialkan dan bahwa titik ujungnya tidak penting. Dalam beberapa situasi, fungsi biaya sebenarnya melompat, seperti bila ditambahkan seorang karyawan baru atau sebuah peralatan baru; juga sebuah pabrik mungkin mempunyai kapasitas maksimum, sehingga memperkenalkan titik ujung penting. Kita lukiskan kemungkinan-kemungkinan ini dalam dua contoh berikut.

CONTOH 4 Perusahaan XYZ menghasilkan kursi rotan. Dengan mesinnya yang sekarang, mempunyai keluaran tahunan maksimum sebanyak 500 satuan. Jika ia membuat x kursi, dapat menetapkan harga $p(x) = 200 - 0{,}15x$ (ribu) rupiah per buahnya dan akan mempunyai total biaya tahunan $C(x) = 4000 + 6x - (0{,}001)x^2$ (ribu) rupiah. Beberapa tingkat produksi yang memaksimumkan total laba tahunan?

Penyelesaian

$$R(x) = xp(x) = x(200 - 0{,}15x) = 200x - 0{,}15x^2$$

sehingga

$$P(x) = 200x - 0{,}15x^2 - (4000 + 6x - 0{,}001x^2)$$
$$= -4000 + 194x - 0{,}149x^2$$

Jadi,

$$\frac{dP}{dx} = 194 - 0{,}298x$$

yang menghasilkan titik stasioner 651. Tetapi 651 tidak pada selang [0,500], sehingga titik-titik kritis yang diperiksa hanyalah kedua titik-titik ujung, 0 dan 500. Jika maksimumnya di 0, perusahaan akan cepat bangkrut. Tetapi tidak. Maksimumnya terjadi di 500, dan keuntungan maksimum adalah $P(500)$ = Rp. 55.750.000. ■

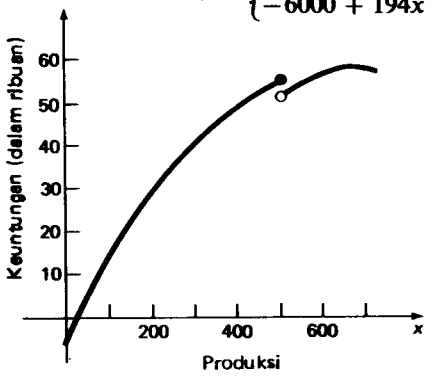
CONTOH 5 Dengan tambahan sebuah mesin baru, perusahaan XYZ pada Contoh 4 dapat menaikkan produksi tahunannya sebanyak 750 kursi. Tetapi fungsi biayanya menjadi berbentuk

$$C(x) = \begin{cases} 4000 + 6x - (0{,}001)x^2 & \text{jika } 0 \le x \le 500 \\ 6000 + 6x - (0{,}003)x^2 & \text{jika } 500 < x \le 750 \end{cases}$$

Berapa tingkat produksi yang memaksimumkan total keuntungan tahunan di bawah situasi ini?

Penyelesaian Fungsi biaya baru menghasilkan fungsi keuntungan baru

$$P(x) = \begin{cases} -4000 + 194x - 0{,}149x^2 & \text{jika } 0 \le x \le 500 \\ -6000 + 194x - 0{,}147x^2 & \text{jika } 500 < x \le 750 \end{cases}$$



GAMBAR 3

Pada selang $500 < x < 750$,

$$\frac{dP}{dx} = 194 - 0{,}294x$$

yang memberikan titik stasioner 660. Terdapat empat titik kritis, yakni: 0, 500, 660, dan 750. Nilai-nilai P yang berpadanan adalah −4000, 55.750, 58.007, dan 56.813. Kita simpulkan bahwa suatu tingkat produksi 660 satuan memberikan keuntungan maksimum. Grafik dalam Gambar 3 memperjelas contoh ini. ■

SOAL-SOAL 4.5

1. Biaya tetap bulanan untuk mengoperasikan pabrik yang membuat kompor adalah Rp 8.000.000,- dan terdapat biaya langsung sebesar Rp 110.000,- untuk tiap satuan yang diproduksi. Tuliskan sebuah ekspresi untuk $C(x)$, biaya total pembuatan x kompor dalam sebulan.

2. Pengusaha dari Soal 1 memperkirakan bahwa setiap bulan dapat dijual 100 satuan jika harga satuan adalah Rp 250.000,- dan penjualan tersebut akan meningkat sebanyak 20 satuan tiap penurunan harga Rp 10.000,-. Tuliskan ekspresi untuk harga $p(x)$ dan pendapatan $R(x)$ jika x satuan terjual dalam 1 bulan, $x \geqslant 100$ (lihat Contoh 2).

3. Gunakan informasi dalam Soal 1 dan 2 untuk menuliskan ekspresi untuk total keuntungan bulanan $P(x)$, $x \geq 100$.

4. Sketsakan grafik $P(x)$ dari Soal

3, dan darinya taksir nilai x yang memaksimumkan P. Kemudian cari x ini secara eksak memakai metode kalkulus.

C 5. Total biaya memproduksi dan menjual x satuan komoditi tertentu tiap bulan adalah $C(x) = 1200 + 3{,}25x - 0{,}0002x^2$. Jika tingkat produksi adalah 1800 satuan tiap bulan, cari biaya rata-rata, yaitu $C(x)/x$ dari tiap satuan dan biaya marjinal.

6. Total biaya memproduksi dan menjual x satuan komoditi tertentu tiap minggu adalah $C(x) = 1100 + x^2/1200$. Cari biaya rata-rata $C(x)/x$ tiap satuan dan biaya marjinal pada tingkat produksi 900 satuan tiap minggu.

7. Total biaya untuk memproduksi dan memasarkan x satuan komoditi tertentu diberikan oleh

$$C(x) = \frac{80.000x - 400x^2 + x^3}{40.000}$$

Untuk nilai x berapakah biaya rata-rata menjadi minimum?

8. Total biaya untuk memproduksi dan menjual $100x$ satuan barang tertentu tiap minggu adalah

$$C(x) = 1000 + 33x - 9x^2 + x^3$$

Cari (a) tingkat produksi yang membuat biaya marjinal minimum, dan (b) biaya marjinal minimum.

9. Suatu fungsi harga p, didefinisikan oleh

$$p(x) = 20 + 4x - \frac{x^2}{3}$$

dengan $x \geqslant 0$ adalah banyaknya satuan.
(a) Cari fungsi total pendapatan dan fungsi pendapatan marjinal.
(b) Pada selang manakah total pendapatan naik?
(c) Untuk bilangan x manakah pendapatan marjinal mencapai maksimum?

C 10. Untuk fungsi harga yang didefinisikan oleh $p(x) = (182 - x/36)^{1/2}$ cari banyaknya satuan x_1 yang membuat total pendapatan maksimum dan nyatakan pendapatan maksimum yang mungkin. Berapa pendapatan marjinal bilamana terjual sebanyak x_1 satuan yang optimal?

11. Untuk fungsi harga yang diberikan oleh $p(x) = 800/(x + 3) - 3$, cari banyaknya satuan x_1 yang membuat total pendapatan maksimum dan nyatakan pendapatan maksimum yang mungkin. Berapa pendapatan marjinal bilamana terjual sebanyak x_1 satuan yang optimal?

12. Perusahaan perahu sungai menawarkan pesiar kepada organisasi kekeluargaan dengan pengertian bahwa akan terdapat paling sedikit 400 peserta. Harga tiap tiket akan sebesar Rp 1.200,- dan perusahaan bersedia memberi potongan Rp. 200 pada tiap peserta untuk tiap 10 peserta yang melebihi 400. Tulislah ekspresi untuk fungsi harga $p(x)$ dan cari banyaknya peserta x_1 yang membuat total pendapatan menjadi maksimum.

13. Seorang saudagar merasa bahwa ia dapat menjual tiap bulan 4000 yard tekstil tertentu apabila ia menjualnya dengan harga Rp 6.000,- tiap yard, dan bahwa penjualan bulanannya akan naik sebanyak 250 yard untuk tiap potongan harga Rp 150,- tiap yard. Tuliskan ekspresi untuk $p(x)$ dan cari harga tiap yard yang akan menghasilkan pendapatan maksimum.

14. Seorang pemilik pabrik memperkirakan bahwa dia dapat menjual 500 barang tiap minggu jika harga satuannya adalah Rp. 20.000 dan bahwa penjualan mingguannya akan meningkat dengan 50 satuan apabila memberikan potongan Rp. 500 tiap satuan. Biaya produksi dan penjualan x barang seminggu adalah $C(x) = 4200 + 5{,}10x + 0{,}0001x^2$. Cari masing-masing yang berikut.
(a) Fungsi harga.
(b) Tingkat produksi mingguan untuk keuntungan maksimum.
(c) Harga tiap barang pada tingkat produksi optimum.
(d) Harga marjinal pada tingkat produksi tersebut.

15. Biaya eksploitasi bulanan sebuah pabrik barang tertentu adalah Rp 6.000.000,- dan biaya bahan sebesar Rp 1.000,- tiap satuan. Jika produksi tiap bulan tidak lebih dari 4500, gaji karyawan Rp 400,- tiap satuan; tetapi untuk tiap satuan di atas 4500 pemilik pabrik harus membayar karyawan satu-setengah-

yang biasa. Pemilik pabrik dapat men- **satuan** tiap bulan dengan **7.000,-** dan memperkira- penjualan bulanan akan me- sebesar 100 satuan untuk tiap **urangan** harga sebesar Rp 100,-. **ri** (a) fungsi biaya total, (b) fungsi **a,** dan (c) banyaknya satuan yang **rus** diproduksi tiap bulan agar diperoleh **ntungan** maksimum.

16. Perusahaan PXR membuat mebel, **dipasarkan** seharga $p(x) = 10 - 0{,}001x$ **uan** rupiah), dengan x banyaknya **oduksi** tiap bulan. Total biaya bulan- adalah $C(x) = 200 + 4x - 0{,}01x$. Pada **ncak** produksi ia dapat membuat 300 **tuan**. Berapa keuntungan bulanan maksi- **mumnya** dan berapa tingkat produksi yang memberikan keuntungan ini?

C **17.** Jika perusahaan dari Soal 16 memperluas fasilitasnya sehingga ia dapat menghasilkan sampai 450 satuan tiap bulan, fungsi biaya bulanannya berbentuk $C(x) = 800 + 3x - 0{,}01x^2$ untuk $300 < x \leqslant 450$. Cari tingkat produksi yang memaksimumkan keuntungan bulanan dan hitung keuntungan ini. Sketsakan grafik dari fungsi keuntungan bulanan $P(x)$ pada $0 \leqslant x \leqslant 450$. (Lihat Contoh 5).

18. Andaikan bahwa seorang pengusaha mempunyai m karyawan, yang menghasilkan sejumlah x satuan barang tiap minggu. Ini dijual seharga $p = p(x)$. Maka total pendapatan mingguan $R(x) = x \cdot p$ dapat dipikirkan sebagai tergantung pada m. Turunan dR/dm disebut hasilkali pendapatan marjinal. Ia adalah (secara hampiran) perubahan dalam pendapatan bilamana pengusaha menambah seorang karyawan. Perlihatkan bahwa

$$\frac{dR}{dm} = \frac{dx}{dm}\left(p + x\frac{dp}{dx}\right)$$

Petunjuk: Gunakan Aturan Hasilkali dan kemudian Aturan Rantai.

C **19.** Acu ke Soal 18. Seorang pengusaha telah memutuskan bahwa m karyawan dapat menghasilkan $x = 5m^2/\sqrt{m^2 + 13}$ satuan dalam seminggu, yang kemudian dapat ia jual seharga $p = 10x - 0{,}1x^2$ rupiah. Tentukan hasilkali pendapatan marjinal bilamana $m = 6$.

20. Agar menguntungkan, suatu toko eceran harus mengendalikan barang persediaannya. Terlalu banyak persediaan mengakibatkan biaya bunga pinjaman yang terlalu besar, biaya sewa ekstra untuk gudang, dan risiko kadaluwarsa. Persediaan yang terlalu sedikit, lebih merepotkan pekerjaan administrasi dalam pemesanan ulang, biaya ekstra untuk pengangkutan dan besar kemungkinan kehabisan persediaan. Seorang penjual perkakas masak memperkirakan bahwa diperlukan \$20 untuk memiliki sebuah oven micro wave sebagai persediaan per tahun. Untuk pemesanan ulang sejumlah oven memerlukan \$200 ditambah \$3 untuk setiap oven. Berapa banyakkah persediaan yang mengakibatkan biaya persediaan terkecil? Dimisalkan perusahaan tersebut menjual 1000 oven tiap tahun dan dengan jumlah pemesanan x berarti rata-rata $x/2$ oven harus dalam persediaan.

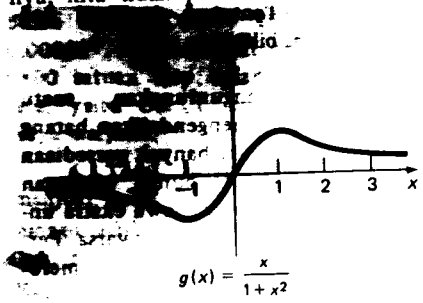
21. Andaikan suatu toko mengharapkan dapat menjual sejumlah N dari suatu jenis barang tertentu per tahun yang memerlukan biaya A dollar untuk menyimpan 1 unit sebagai persediaan per tahun, dan untuk melakukan pemesanan ulang sejumlah x perlu biaya $(F + Bx)$ dollar. Tunjukkan $x = \sqrt{2FN/A}$ adalah suatu jumlah yang meminimumkan biaya persediaan. Lihat Soal 20.

22. Bila target penjualan dari suatu jenis bahang empat kali lipat, bagaimana dengan jumlah persediaan yang ideal? Lihat Soal 21.

4.6 Limit di Ketakhinggaan, Limit Tak Terhingga

Konsep "tak-terhingga" telah mengilhami dan menggoda para matematikawan sejak jaman dahulu. Masalah yang paling dalam dan paradoks besar dari matematika seringkali jalin-menjalin dengan pemakaian perkataan ini. Kemajuan matematika sebagian dapat

diukur dalam bentuk pemahaman peranan dari ketakhinggaan. Kita telah memakai lambang-lambang ∞ dan $-\infty$ dalam notasi kita untuk selang-selang tertentu. Jadi $(3, \infty)$ adalah cara untuk menyatakan himpunan bilangan riil yang lebih besar daripada 3. Silahkan mencatat bahwa kita tidak pernah mengacu ∞ sebagai sebuah bilangan. Misalnya, kita tidak pernah menambahkannya pada suatu bilangan atau membaginya oleh suatu bilangan. Kita akan memakai lambang ∞ dan $-\infty$ dalam suatu cara baru dalam pasal ini, tetapi tetap tidak akan mewakili bilangan-bilangan.



GAMBAR 1

x	$\frac{x}{1+x^2}$
10	0,099
100	0,010
1000	0,001
10000	0,0001
↓	↓
∞	?

GAMBAR 2

SEBUAH CONTOH Pandang fungsi $g(x) = x/(1 + x^2)$. Digrafikkan secara agak cermat dalam Pasal 4.2; sebuah versi grafik itu yang lebih kecil diperlihatkan dalam Gambar 1. Kita menanyakan pertanyaan ini: Apa yang terjadi pada $g(x)$ bila x menjadi semakin lama semakin besar? Dalam lambang, kita menanyakan nilai $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

Bilamana kita menuliskan $x \to \infty$, kita tidak mengatakan bahwa pada suatu tempat jauh, jauh di arah kanan pada sumbu x, terdapat sebuah bilangan – lebih besar daripada semua bilangan lain – yang didekati oleh x. Melainkan, kita memakai $x \to \infty$ sebagai cara singkat untuk mengatakan bahwa x menjadi semakin besar tanpa batas.

Dalam tabel dalam Gambar 2, kita telah mendaftarkan nilai-nilai $g(x) = x/(1 + x^2)$ untuk beberapa nilai x. Kelihatan bahwa $g(x)$ menjadi semakin kecil bilamana x menjadi semakin besar. Kita tuliskan

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

Dari pengalaman dengan bilangan-bilangan negatif besar akan mengantar kita untuk menuliskan

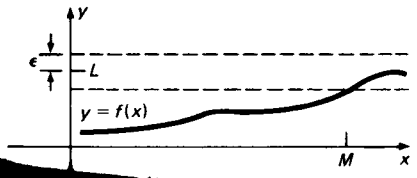
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$

DEFINISI-DEFINISI CERMAT LIMIT BILA $x \to \pm\infty$ Dalam analogi dengan definisi, kita untuk limit-limit biasa, kita membuat definisi berikut.

Definisi

(Limit bila $x \to \infty$). Andaikan f terdefinisi pada $[c, \infty)$ untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ jika untuk masing-masing $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan M yang berpadanan sedemikian sehingga

$$x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Anda akan memperhatikan bahwa M dapat tergantung pada ε. Umumnya, semakin kecil ε, maka M harus semakin besar. Grafik dalam Gambar 3 mungkin membantu anda memahami apa-apa yang telah kita katakan.

Definisi

(Limit bila $x \to -\infty$). Andaikan f terdefinisi pada $(-\infty, c]$ untuk suatu bilangan c. Kita katakan bahwa $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ jika untuk tiap-tiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan M yang berpadanan sedemikian sehingga

$$x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

CONTOH 1 Buktikan bahwa jika k bilangan bulat positif, maka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \text{ dan } \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Penyelesaian Andaikan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih $M = \sqrt[k]{1/\varepsilon}$. Maka $x > M$ memenuhi

$$\left| \frac{1}{x^k} - 0 \right| = \frac{1}{x^k} < \frac{1}{M^k} = \varepsilon$$

Bukti pernyataan yang kedua adalah serupa.

Dengan telah diberikannya definisi-definisi dari limit-limit yang baru ini, kita harus menghadapi pertanyaan apakah Teorema Limit Utama (Teorema 2.6A) berlaku untuk mereka. Jawabnya adalah ya, dan pembuktian serupa dengan yang asli. Perhatikan bagaimana kita memakai teorema ini dalam contoh-contoh berikut.

CONTOH 2 Buktikan bahwa $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{1 + x^2} = 0$.

Penyelesaian Di sini kita memakai akal baku: membagi pembilang dan penyebut dengan pangkat x tertinggi yang muncul di penyebut, yakni x^2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{1 + x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x}{x^2}}{\dfrac{1 + x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x^2} + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x}}{\lim_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2} + \lim_{x \to \infty} 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0$$

■

CONTOH 3 Cari $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2 - 3x + x^2}{7 + 4x - 5x^2}$.

Penyelesaian Lagi-lagi, kita bagi pembilang dan penyebut dengan x^2

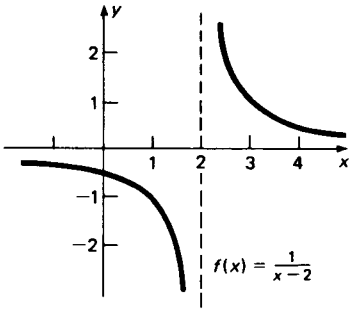
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2 - 3x + x^2}{7 + 4x - 5x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2 - 3/x + 1}{7/x^2 + 4/x - 5}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} (2/x^2 - 3/x + 1)}{\lim_{x\to\infty} (7/x^2 + 4/x - 5)} = \frac{0 - 0 + 1}{0 + 0 - 5} = -\frac{1}{5}$$ ■

CONTOH 4 Cari $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3}{1 + x^3}$.

Penyelesaian Bagi pembilang dan penyebut dengan x^3

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{1 + x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1/x^3 + 1} = \frac{2}{0 + 1} = 2$$ ■



GAMBAR 4

LIMIT-LIMIT TAK TERHINGGA Pandang grafik $f(x) = 1/(x - 2)$, yang diperlihatkan dalam Gambar 4. Adalah tidak masuk akal untuk menanyakan $\lim_{x\to2} 1/(x - 2)$ tetapi kita pikir adalah beralasan menulis

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$

Berikut adalah definisi yang berkaitan terhadap situasi ini.

Definisi

(Limit-limit tak-terhingga). Kita katakan bahwa $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ jika untuk tiap bilangan positif M, berpadanan suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga

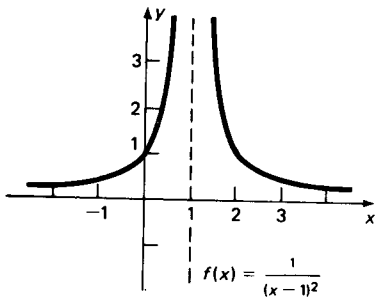
$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Terdapat definisi-definisi yang berpadanan dari

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \infty, \text{ dan } \lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty.$$

CONTOH 5 Cari $\lim_{x\to1^-} \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ dan $\lim_{x\to1^+} \dfrac{1}{(x - 1)^2}$.

Penyelesaian



Grafik $f(x) = 1/(x-1)^2$ diperlihatkan dalam Gambar 5. Kita pikirkan adalah cukup jelas bahwa

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

Karena kedua limit adalah ∞, kita dapat juga menuliskan

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$$

■

GAMBAR 5

CONTOH 6 Cari $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-5x+6}$

Penyelesaian

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)}$$

Sehingga $x \to 2^+$, kita lihat bahwa $x+1 \to 3$, $x-3 \to -1$, dan $x-2 \to 0^+$; jadi, pembilang mendekati 3, tetapi penyebut adalah negatif dan mendekati 0. Kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(x-3)(x-2)} = -\infty$$

■

HUBUNGAN TERHADAP ASIMTOT Asimtot-asimtot dibahas secara ringkas dalam Pasal 2.1, tetapi sekarang kita dapat mengatakan lebih banyak tentang mereka. Garis $x = c$ adalah **asimtot vertikal** dari grafik $y = f(x)$ jika salah satu dari pernyataan-pernyataan berikut benar.

1. $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$
2. $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
3. $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

Jadi dalam Contoh 5, garis $x = 1$ adalah asimtot tegak. Sama halnya, garis-garis $x = 2$ dan $x = 3$ adalah asimtot vertikal dalam Contoh 6.

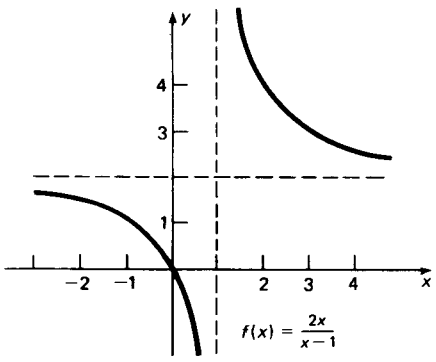
Dalam nafas yang serupa, garis $y = b$ adalah **asimtot horisontal** dari grafik $y = f(x)$ jika

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{atau} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

Garis $y = 0$ adalah asimtot horisontal dalam Contoh 5.

CONTOH 7 Cari asimtot-asimtot vertikal dan horisontal dari grafik $y = f(x)$ jika

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}$$



GAMBAR 6

Penyelesaian

Kita harapkan sebuah asimtot vertikal pada titik yang penyebutnya nol, dan kita benar karena

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x-1} = \infty$$

dan

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

Sebaliknya

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x} = 2 \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

sehingga $y = 2$ adalah asimtot horisontal. Grafik $y = 2x/(x-1)$ diperlihatkan dalam Gambar 6. ■

SOAL-SOAL 4.6

Dalam Soal-soal 1-32, cari limit.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-2x}{x+5}$

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x+1}{x-1}$

3. $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x+5}{5x^2+6x-1}$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+7}{x^2-x}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-3x^2+1}{5x^3-4x+7}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{(3x-2)(2x+4)}{(2x+1)(x+2)}$

7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^3-4x+1}{(x^2+1)(x^2-1)}$

8. $\lim_{x\to\infty} \frac{3x\sqrt{x}+3x+1}{x^2-x+11}$

9. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

10. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+3}}$. *Petunjuk:* Bagi pembilang dan penyebut oleh x. Perhatikan bahwa untuk $x > 0$, $\sqrt{x^2+3}/x = \sqrt{(x^2+3)/x^2}$.

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x+1}}{x+4}$

13. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{2x^2+3} - \sqrt{2x^2-5})$.
Petunjuk: Kalikan dan bagi dengan $\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{2x^2-5}$.

14. $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+2x} - x)$

15. $\lim_{y\to-\infty} \frac{9y^3+1}{y^2-2y+2}$. *Petunjuk:* Bagi pembilang dan penyebut dengan y^2.

16. $\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n}$,
dengan $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, dan n anggota.

17. $\lim_{t\to 3^+} \frac{3+t}{3-t}$

18. $\lim_{t\to 3^-} \frac{3+t}{3-t}$

19. $\lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x^2-4}$

20. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2}{x^2-9}$

21. $\lim_{x\to(3/2)^-} \dfrac{4x+1}{2x-3}$

22. $\lim_{x\to(3/2)^+} \dfrac{2x+1}{2x^2-x-3}$

23. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x}{x^2-6x+9}$

24. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x}{x-3}$

25. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

26. $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4}$

27. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$

28. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{[\![x]\!]}{x}$

29. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x}$

30. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x}$

31. $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

32. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

Dalam Soal-soal 33-38, cari asimtot-asimtot horisontal dan vertikal untuk grafik-grafik dari fungsi yang ditunjuk. Kemudian sketsakan grafik-grafiknya.

33. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ **34.** $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

35. $F(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **36.** $F(x) = \dfrac{3}{9-x^2}$

37. $g(x) = \dfrac{14}{2x^2+7}$ **38.** $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

39. Garis $y = ax + b$ disebut **asimtot miring** terhadap grafik $y = f(x)$ jika $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$ atau $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (ax+b)] = 0$. Cari asimtot miring untuk

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 - 2x - 4}{x^3 - 1}$$

Petunjuk: Mulai dengan membagi penyebut ke dalam pembilang.

40. Cari asimtot miring untuk

$$f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}.$$

41. Memakai lambang-lambang M dan δ, berikan definisi yang persis dari tiap ekspresi.

(a) $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ (b) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \infty$

42. Memakai lambang-lambang M dan N, berikan definisi yang persis dari tiap ekspresi.

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

43. Berikan sebuah bukti yang cermat bahwa jika $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ dan $\lim_{x\to\infty} g(x) = B$, maka

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) + g(x)] = A + B$$

44. Kita telah memberi arti kepada $\lim_{x\to A} f(x)$ untuk $A = a, a^-, a^+, -\infty, \infty$. Lebih lanjut dalam tiap kasus, limit ini mungkin L (berhingga), $-\infty$, ∞, atau mungkin tidak ada. Buat sebuah tabel yang melukiskan tiap hal dari 20 kasus yang mungkin.

45. Carilah setiap limit berikut ini atau tunjukkan bahwa limit tersebut tidak ada walaupun dalam pengertian takterhingga.

(a) $\lim_{x\to\infty} \sin x$ (b) $\lim_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{x}$

(c) $\lim_{x\to\infty} x \sin\dfrac{1}{x}$ (d) $\lim_{x\to\infty} x^{3/2} \sin\dfrac{1}{x}$

(e) $\lim_{x\to\infty} x^{-1/2} \sin x$ (f) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{1}{x}\right)$

(g) $\lim_{x\to\infty} \sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

(h) $\lim_{x\to\infty}\left[\sin\left(x + \dfrac{1}{x}\right) - \sin x\right]$

46. Misalkan f dapat didiferensiasikan untuk $x > a$. Buktikan atau sangkallah:

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$

(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to a^+} f'(x) = -\infty$

4.7 Penggambaran Grafik Canggih

Dalam Pasal 1.7 kita telah memperlakukan penggambaran grafik secara sederhana. Kita mengusulkan untuk merajah titik cukup banyak sehingga ciri dasar dari grafik jelas. Kita menyebutkan bahwa kesimetrian grafik dapat mengurangi usaha yang tercakup. Kita sarankan agar hati-hati terhadap asimtot-asimtot yang mungkin. Tetapi jika persamaan yang harus digambar grafiknya rumit atau jika kita ingin grafik yang sangat cermat, teknik-teknik pada Bab 1 tidak memadai.

Kalkulus menyediakan alat ampuh untuk menganalisis struktur grafik secara baik, khususnya dalam mengenali titik-titik tempat terjadinya perubahan ciri-ciri grafik. Kita dapat menempatkan titik-titik maksimum lokal, titik-titik minimum lokal, dan titik-titik balik; kita dapat menentukan secara persis di mana grafik naik atau di mana cekung ke atas. Pengikutsertaan gagasan-gagasan ini dalam prosedur penggambaran grafik kita adalah program untuk pasal ini.

POLINOM Polinom derajat 1 atau 2 jelas untuk digambar grafiknya; yang berderajat 50 hampir mustahil. Jika derajatnya cukup ukurannya, misalnya 3 sampai 6, kita dapat memakai alat-alat dari kalkulus dengan manfaat besar.

CONTOH 1 Sketsakan grafik $f(x) = \dfrac{3x^5 - 20x^3}{32}$.

Penyelesaian Karena $f(-x) = -f(x)$, f adalah fungsi ganjil, oleh karena itu grafiknya simetri terhadap titik asal. Dengan menetapkan $f(x) = 0$, kita temukan perpotongan sumbu x adalah 0 dan $\pm\sqrt{20/3} \approx \pm 2{,}6$. Kita dapat melangkah sejauh ini tanpa kalkulus.

Bilamana kita diferensialkan f, kita peroleh

$$f'(x) = \frac{15x^4 - 60x^2}{32} = \frac{15x^2(x-2)(x+2)}{32}$$

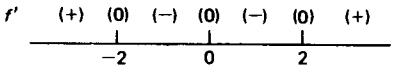
Jadi titik-titik kritis adalah -2, 0, dan 2; secara cepat kita temukan (Gambar 1) bahwa $f'(x) > 0$ pada $(-\infty, -2)$ dan $(2, \infty)$ dan bahwa $f'(x) < 0$ pada $(-2, 0)$ dan $(0, 2)$. Fakta-fakta ini memberitahu kita di mana f' naik dan di mana turun; juga ditegaskan bahwa $f(-2) = 2$ adalah nilai maksimum lokal dan bahwa $f(2) = -2$ adalah nilai minimum lokal.

Dengan mendiferensialkan kembali, kita peroleh

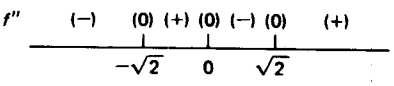
$$f''(x) = \frac{60x^3 - 120x}{32}$$

$$= \frac{15x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{8}$$

Dengan mempelajari tanda $f''(x)$ (Gambar 2), kita simpulkan bahwa f cekung ke atas pada $(-\sqrt{2}, 0)$ dan $(\sqrt{2}, \infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty, -\sqrt{2})$ dan $(0, \sqrt{2})$. Jadi terdapat tiga titik balik, yaitu $(-\sqrt{2}; 7\sqrt{2}/8) \approx (-1, 4; 1, 2)$, $(0, 0)$ dan $(\sqrt{2}, -7\sqrt{2}/8) \approx (1{,}4; -1{,}2)$.

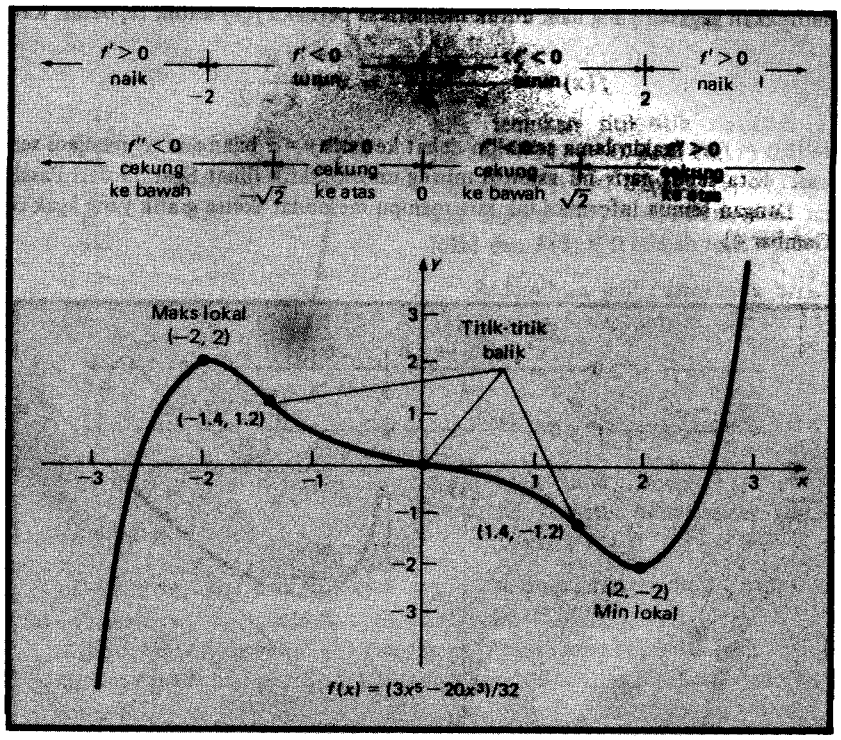


GAMBAR 1



GAMBAR 2

Banyak dari informasi ini dikumpulkan dalam diagram dari Gambar 3, yang kita gunakan mensketsakan grafik secara langsung di bawahnya.



GAMBAR 3

FUNGSI RASIONAL Fungsi rasional, merupakan hasil bagi dua fungsi polinom, lebih rumit untuk digrafikkan dibanding polinom. Khususnya, kita dapat mengharapkan perilaku yang dramatis di mana pun penyebut nol.

CONTOH 2 Sketsakan grafik $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$

Penyelesaian Fungsi ini bukan ganjil ataupun genap, sehingga tidak diharapkan simetri yang biasa. Tidak terdapat perpotongan dengan sumbu x, karena penyelesaian dari $x^2 - 2x + 4 = 0$ bukan bilangan riil. Perpotongan sumbu y adalah -2. Kita mengharapkan asimtot vertikal di $x = 2$. Kenyataannya,

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = -\infty \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = \infty$$

Pendiferensialan dua kali memberikan

$$f'(x) = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2} \qquad f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$$

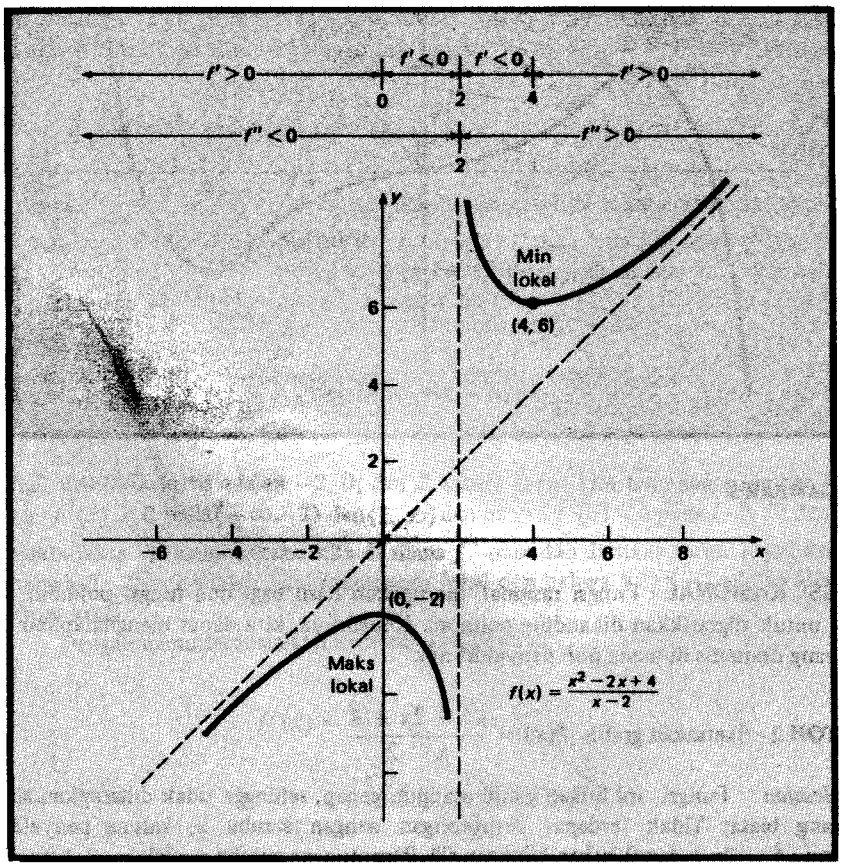
Jadi, $f'(x) > 0$ pada $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ dan $f'(x) < 0$ pada $(0,2) \cup (2, 4)$. Juga $f''(x) > 0$ pada $(2, \infty)$ dan $f''(x) < 0$ pada $(-\infty, 2)$. Perhatikan bahwa $f''(x)$ tidak pernah 0, tidak terdapat titik balik. Sebaliknya, $f(0) = -2$ dan $f(4) = 6$ masing-masing memberikan maksimum lokal dan minimum lokal.

Merupakan gagasan yang baik untuk memeriksa perilaku $f(x)$ untuk $|x|$ besar. Karena

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$$

grafik $y = f(x)$ makin lama semakin dekat ke garis $y = x$ bilamana $|x|$ menjadi semakin besar. Kita sebut garis ini **asimtot miring** untuk grafik (lihat Soal 39 dari Pasal 4.6).

Dengan semua informasi ini, kita mampu membuat sketsa grafik yang agak cermat (Gambar 4). ■



GAMBAR 4

FUNGSI ALJABAR Jenis fungsi aljabar tak ada akhirnya. Berikut sebuah contoh.

CONTOH 3 Analisis fungsi berikut:

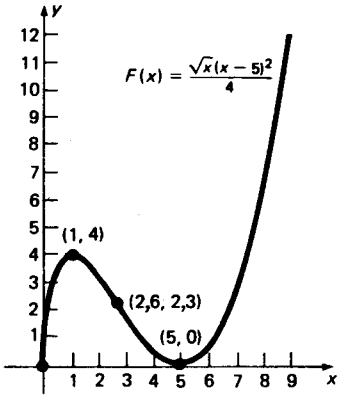
$$F(x) = \frac{\sqrt{x}(x-5)^2}{4}$$

dan sketsakan grafiknya.

Penyelesaian Daerah asal F adalah $[0, \infty)$ dan daerah hasil adalah $[0, \infty)$, sehingga grafik F terbatas di kuadran pertama. Perpotongan sumbu x adalah 0 dan 5; perpotongan sumbu y adalah 0.

Dari

$$F'(x) = \frac{5(x-1)(x-5)}{8\sqrt{x}}, \qquad x > 0$$



GAMBAR 5

kita temukan titik-titik stasioner 1 dan 5. Karena $F'(x) > 0$ pada $(0, 1)$ dan $(5, \infty)$ sedangkan $F'(x) < 0$ pada $(1, 5)$, kita simpulkan bahwa $F(1) = 4$ adalah nilai maksimum lokal dan $F(5) = 0$ adalah nilai minimum lokal.

Sedemikian jauh, semuanya berjalan jelas. Tetapi pada penghitungan turunan kedua, kita peroleh

$$F''(x) = \frac{5(3x^2 - 6x - 5)}{16x^{3/2}}, \qquad x > 0$$

yang agak rumit. Tetapi $3x^2 - 6x - 5 = 0$ mempunyai satu penyelesaian dalam selang $(0, \infty)$, yaitu $1 + 2\sqrt{6}/3 \approx 2{,}6$.

Dengan memakai titik-titik uji 1 dan 3, kita simpulkan bahwa $f''(x) > 0$ pada $(2,6; \infty)$. Akibatnya titik $(2, 6; 2{,}3)$ adalah titik balik.

Bila x bertambah besar, $F(x)$ bertambah besar tanpa batas dan jauh lebih cepat daripada fungsi linear manapun; tidak terdapat asimtot-asimtot. Grafik disketsakan dalam Gambar 5. ■

RINGKASAN METODE Dalam menggambarkan grafik fungsi, tidak terdapat pengganti untuk akal sehat. Tetapi, dalam banyak hal prosedur berikut akan sangat membantu.

Langkah 1 Buat analisis pendahuluan sebagai berikut.

(a) Periksa *daerah asal* dan *daerah hasil* fungsi untuk melihat apakah ada daerah di bidang yang dikecualikan.
(b) Uji *kesimetrian* terhadap sumbu y dan titik asal. (Apakah fungsi genap atau ganjil?)
(c) Cari *perpotongan dengan sumbu-sumbu koordinat.*
(d) Gunakan turunan pertama untuk mencari titik-titik kritis dan untuk mengetahui tempat-tempat grafik *naik* dan *turun.*
(e) Uji titik-titik kritis untuk maksimum dan minimum *lokal.*
(f) Gunakan turunan kedua untuk mengetahui tempat-tempat grafik *cekung ke atas* dan *cekung ke bawah* dan untuk melokasikan *titik-titik balik.*
(g) Cari *asimtot-asimtot.*

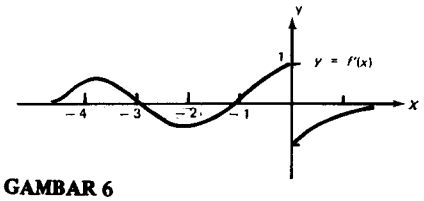
Langkah 2 Gambarkan beberapa titik (termasuk semua titik kritis dan titik balik).

Langkah 3 Sketsakan grafik.

SOAL-SOAL 4.7

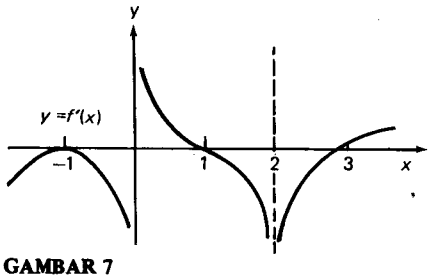
Dalam Soal-soal 1-16, buat analisis seperti yang disarankan di atas dan kemudian sketsakan grafiknya.

1. $f(x) = x^3 - 4x$
2. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
3. $F(x) = \dfrac{x^4 - 18x^2 + 20}{20}$
4. $F(x) = \dfrac{x^4(x^2 - 6)}{8}$
5. $g(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2}$
6. $g(x) = \dfrac{(x + 2)^2}{x}$
7. $h(x) = \dfrac{x}{x + 1}$
8. $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$
9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
11. $g(x) = 2x\sqrt{x + 3}$
12. $g(x) = \sqrt{4 - x} + 1$
13. $H(x) = x|x|$
14. $H(x) = x^2|x|$
15. $f(x) = |\sin x|$
16. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
17. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi f yang mempunyai semua sifat berikut:
    (a) f kontinu di mana-mana;
    (b) $f(2) = -3, f(6) = 1$;
    (c) $f'(2) = 0, f'(x) > 0$ untuk $x \neq 2, f'(6) = 3$;
    (d) $f''(6) = 0, f''(x) > 0$ untuk $2 < x < 6, f''(x) < 0$ untuk $x > 6$.
18. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi f yang mempunyai semua sifat berikut:
    (a) f kontinu di mana-mana;
    (b) $f(-3) = 1$;
    (c) $f'(x) < 0$ untuk $x < -3, f'(x) > 0$ untuk $x > -3, f''(x) < 0$ untuk $x \neq -3$.
19. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi f yang mempunyai semua sifat berikut:
    (a) f kontinu di mana-mana;
    (b) $f(-4) = -3, f(0) = 0, f(3) = 2$;
    (c) $f'(-4) = 0, f'(3) = 0, f'(x) > 0$ untuk $x < -4, f'(x) > 0$ untuk $-4 < x < 3, f'(x) < 0$ untuk $x > 3$;
    (d) $f''(-4) = 0, f''(0) = 0, f''(x) < 0$ untuk $x < -4, f''(x) > 0$ untuk $-4 < x < 0, f''(x) < 0$ untuk $x > 0$.
20. Apabila f suatu fungsi kontinu dengan $f(-3) = f(0) = 2$. Jika grafik $y = f'(x)$ adalah seperti diperlihatkan dalam Gambar 6, sketsalah grafik $y = f(x)$.



GAMBAR 6

21. Apabila f suatu fungsi kontinu dengan $f(0) = f(2) = 0$. Jika grafik $y = f'(x)$ adalah seperti tampak dalam Gambar 7, sketsalah grafik yang mungkin untuk $y = f(x)$.

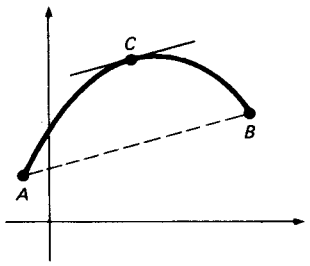


GAMBAR 7

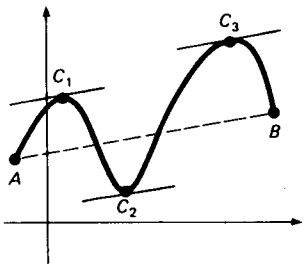
4.8 Teorema Nilai Rata-rata

Teorema Nilai Rata-rata adalah bidang kalkulus – tidak begitu penting atau mempesona bagi dia sendiri, tetapi seringkali membantu melahirkan teorema-teorema lain yang cukup berarti. Mulai saat ini, anda akan melihat ungkapan "menurut Teorema Nilai Rata-rata" agak sering, dan kemudian dalam pasal ini kita akan memakainya untuk membuktikan sebuah teorema penting yang dibiarkan menggantung pada Pasal 4.2.

Dalam bahasa geometri, Teorema Nilai Rata-rata mudah dinyatakan dan dipahami. Teorema mengatakan bahwa jika grafik sebuah fungsi kontinu mempunyai garis singgung tak vertikal pada setiap titik antara A dan B, maka terdapat paling sedikit satu titik C pada grafik antara A dan B sehingga garis singgung di titik C sejajar talibusur AB. Dalam Gambar 1, hanya terdapat satu titik C yang demikian; dalam Gambar 2, terdapat beberapa.



GAMBAR 1



GAMBAR 2

TEOREMA DIBUKTIKAN Pertama kita nyatakan teorema dalam bahasa fungsi; kemudian kita buktikan.

Teorema A

(Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan). Jika f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan terdiferensial pada titik-titik dalam dari (a, b), maka terdapat paling sedikit satu bilangan c dalam (a, b) di mana

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

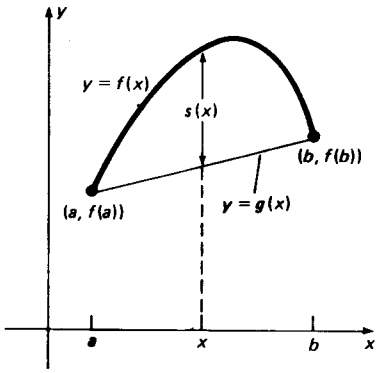
atau, secara setara, di mana

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Bukti Pembuktian kita bersandar pada analisis seksama dari fungsi $s(x) = f(x) - g(x)$, yang diperkenalkan dalam Gambar 3. Di sini $y = g(x)$ adalah persamaan garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Karena garis ini mempunyai kemiringan $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ dan melalui $(a, f(a))$, bentuk titik kemiringan untuk persamaannya adalah

$$g(x) - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$



GAMBAR 3

Kemudian ini menghasilkan rumus untuk $s(x)$, yaitu,

$$s(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Perhatikan dengan segera bahwa $s(b) = s(a) = 0$ dan bahwa untuk x dalam (a, b)

$$s'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Sekarang kita membuat suatu pengamatan penting. Jika kita ketahui bahwa terdapat suatu bilangan c dalam (a, b) yang memenuhi $s'(c) = 0$, kita akan selesai. Karena persamaan yang terakhir akan mengatakan

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

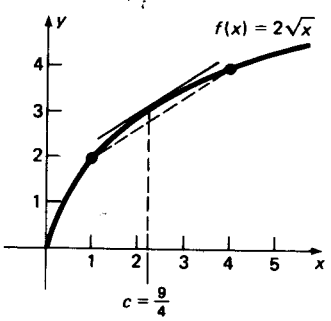
yang setara terhadap kesimpulan teorema tersebut.

Untuk melihat bahwa $s'(c) = 0$ untuk suatu c dalam (a, b), alasannya sebagai berikut. Jelas s kontinu pada $[a, b]$, karena merupakan selisih dua fungsi kontinu. Jadi menurut Teorema Eksistensi Maks-Min (Teorema 4.1.A), s harus mencapai baik nilai maksimum ataupun nilai minimum pada $[a, b]$. Jika kedua nilai ini kebetulan adalah 0, maka $s(x)$ secara identik adalah 0 pada $[a, b]$, akibatnya $s'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), jauh lebih banyak daripada yang kita perlukan.

Jika salah satu nilai maksimum atau nilai minimum berlainan dengan 0, maka nilai tersebut dicapai pada sebuah titik dalam c, karena $s(a) = s(b) = 0$. Sekarang s mempunyai turunan di setiap titik dari (a, b), sehingga menurut Teorema Titik Kritis (Teorema 4.1B), $s'(c) = 0$. Itulah semua yang kita perlukan untuk diketahui. ■

TEOREMA YANG DISERTAI GAMBAR-GAMBAR

CONTOH 1 Cari bilangan c yang dijamin oleh Teorema Nilai Rata-rata untuk $f(x) = 2\sqrt{x}$ pada $[1, 4]$.



GAMBAR 4

Penyelesaian

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dan

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4 - 2}{3} = \frac{2}{3}$$

Jadi kita harus menyelesaikan

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{3}$$

Jawab tunggal adalah $c = \frac{9}{4}$ (Gambar 4). ■

CONTOH 2 **Andaikan $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ pada $[-1, 2]$. Cari semua bilangan c yang memenuhi kesimpulan terhadap Teorema Nilai Rata-rata.**

Penyelesaian

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

dan

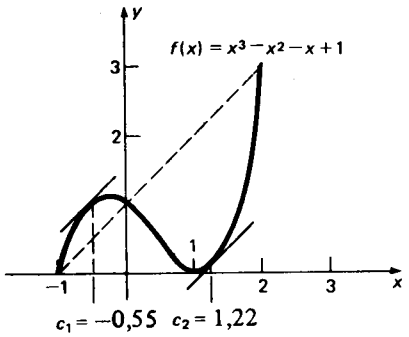
$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{3 - 0}{3} = 1$$

Karena itu, kita harus menyelesaikan

$$3c^2 - 2c - 1 = 1$$

atau secara setara,

$$3c^2 - 2c - 2 = 0$$



GAMBAR 5

Dari rumus *abc* untuk persamaan kuadrat, terdapat dua penyelesaian $(2 \pm \sqrt{4 + 24})/6$ yang berpadanan terhadap $c_1 = -0{,}55$ dan $c_2 = 1{,}22$. Kedua bilangan tersebut berada dalam selang $(-1, 2)$. Grafik diperlihatkan dalam Gambar 5. ■

CONTOH 3 Andaikan $f(x) = x^{2/3}$ pada $[-8, 27]$. Perlihatkan bahwa kesimpulan terhadap Teorema Nilai Rata-rata gagal dan pikirkan mengapa demikian.

Penyelesaian

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \qquad x \neq 0$$

dan

$$\frac{f(27) - f(-8)}{27 - (-8)} = \frac{9 - 4}{35} = \frac{1}{7}$$

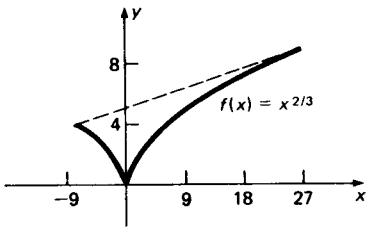
Kita harus menyelesaikan

$$\frac{2}{3}c^{-1/3} = \frac{1}{7}$$

yang memberikan

$$c = \left(\frac{14}{3}\right)^3 \approx 102$$

Tetapi $c = 102$ tidak pada selang $(-8, 27)$ seperti disyaratkan. Masalahnya tentu saja, bahwa $f(x)$ tidak terdiferensial di mana-mana pada $(-8, 27)$: $f'(0)$ gagal untuk terwujud (lihat Gambar 6). ■



GAMBAR 6

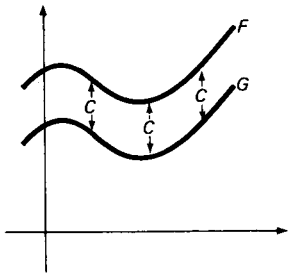
TEOREMA DIGUNAKAN Kembali dalam Pasal 4.2 kita menjanjikan pembuktian yang cermat dari Teorema Kemonotonan (Teorema 4.2A). Ini adalah teorema yang mengaitkan apakah suatu fungsi naik atau turun dengan tanda dari turunannya.

Bukti dari Teorema Kemonotonan Kita andaikan bahwa f kontinu pada I dan bahwa $f'(x) > 0$ di setiap titik x di bagian dalam I. Pandang dua titik sebarang x_1 dan x_2 dari I dengan $x_1 < x_2$. Menurut Teorema Nilai Rata-rata yang diterapkan pada selang $[x_1, x_2]$, terdapat sebuah bilangan c dalam (x_1, x_2) yang memenuhi

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Karena $f'(c) > 0$, kita lihat bahwa $f(x_2) - f(x_1) > 0$— yakni, $f(x_2) > f(x_1)$. Inilah apa yang kita maksudkan pada waktu kita mengatakan f adalah naik pada I.

Kasus $f'(x) < 0$ pada I ditangani secara serupa. ■



GAMBAR 7

Teorema kita yang berikut akan digunakan secara berulang-ulang dalam bab berikutnya. Dalam kata-kata, ia mengatakan bahwa *dua fungsi dengan turunan sama harus dibedakan oleh sebuah konstanta*, kemungkinan oleh konstanta nol (lihat Gambar 7).

Teorema B

Jika $F'(x) = G'(x)$ untuk semua x dalam (a, b), maka terdapat konstanta C sedemikian sehingga

$$F(x) = G(x) + C$$

untuk semua x dalam (a, b)

Bukti Andaikan $H(x) = F(x) - G(x)$. Maka

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$$

untuk semua x dalam (a, b). Pilih x_1 sebagai suatu titik (tetap) dalam (a, b) dan andaikan x sebarang titik lain di sana. Fungsi H memenuhi hipotesis dari Teorema Nilai Rata-rata pada selang tertutup dengan titik-titik ujung x_1 dan x. Jadi terdapat sebuah bilangan c di antara x_1 dan x sedemikian sehingga

$$H(x) - H(x_1) = H'(c)(x - x_1)$$

Tetapi menurut hipotesis $H'(c) = 0$. Karena itu, $H(x) - H(x_1) = 0$ atau secara setara $H(x) = H(x_1)$ untuk semua x dalam (a, b). Karena $H(x) = F(x) - G(x)$, kita simpulkan bahwa $F(x) - G(x) = H(x_1)$. Sekarang andaikan $C = H(x_1)$, dan kita mempunyai kesimpulan $F(x) = G(x) + C$. ■

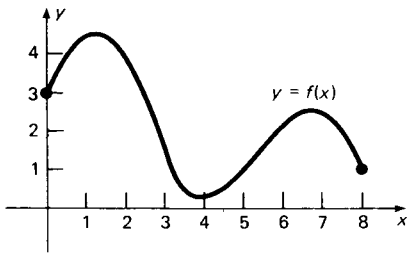
SOAL-SOAL 4.8

Dalam tiap Soal 1-10, didefinisikan sebuah fungsi dan diketahui sebuah selang tertutup Putuskan apakah Teorema Nilai Rata-rata terterapkan terhadap fungsi yang diketahui pada selang yang diberikan – jika demikian, cari semua nilai c yang mungkin. Dalam tiap soal, sketsakan grafik fungsi yang diketahui pada selang yang diberikan.

1. $f(x) = x^2 + 2x$; $[-2, 2]$
2. $f(x) = x^2 + 3x - 1$; $[-3, 1]$
3. $g(x) = \dfrac{x^3}{3}$; $[-2, 2]$
4. $g(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x - 4)$; $[-1, 2]$
5. $F(t) = \dfrac{t+3}{t-3}$; $[-1, 4]$
6. $F(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $[\frac{3}{2}, 5]$
7. $h(x) = x^{2/3}$; $[0, 2]$
8. $h(x) = x^{2/3}$; $[-2, 2]$
9. $\phi(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $[-1, \frac{1}{2}]$
10. $\phi(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

11. Dono menempuh 112 km dalam 2 jam dan menegaskan bahwa ia tidak pernah melampaui 55 km/jam. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa ia bohong. *Petunjuk:* Andaikan $f(t)$ adalah jarak yang ditempuh dalam waktu t.

12. Untuk fungsi yang digrafikkan pada $[0, 8]$ dalam gambar, cari (secara hampiran) semua titik c yang memenuhi kesimpulan terhadap Teorema Nilai Rata-rata.



GAMBAR 8

13. **(Teorema Rolle)** *Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) dan jika $f(a) = f(b)$, maka terdapat paling sedikit sebuah bilangan c dalam (a, b) sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.* Perlihatkan bahwa Teorema Rolle hanyalah suatu kasus khusus dari Teorema Nilai Rata-rata (Michel Rolle (1652-1719) adalah seorang matematikawan Perancis).

14. Perlihatkan bahwa jika f adalah fungsi kuadrat yang didefinisikan oleh $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, maka bilangan c dari Teorema Nilai Rata-rata selalu berupa titik tengah dari selang $[a, b]$ yang diketahui.

15. Buktikan: Jika f kontinu pada (a, b) dan jika $f'(x)$ adalah memenuhi $f'(x) > 0$ kecuali pada satu titik x_0 dalam (a, b), maka f naik pada (a, b). *Petunjuk:* Pandang f pada tiap selang $(a, x_0]$ dan $[x_0, b)$ secara terpisah.

16. Gunakan Soal 15 untuk memperlihatkan bahwa tiap masing-masing yang berikut adalah naik pada $(-\infty, \infty)$.

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = x^5$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

17. Buktikan bahwa jika $F'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka terdapat sebuah konstanta C sedemikian sehingga $F(x) = C$ untuk semua x dalam (a, b). *Petunjuk:* Andaikan $G(x) = 0$ dan terapkan Teorema B.

18. Andaikan anda tahu bahwa $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, $D_x \cos x = -\sin x$, dan $D_x \sin x = \cos x$, tetapi tidak ada yang lain lagi tentang fungsi sinus dan cosinus. Perlihatkan bahwa $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. *Petunjuk:* Andaikan $F(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$ dan gunakan Soal 17.

19. Buktikan bahwa jika $F'(x) = D$ untuk semua x dalam (a, b), maka terdapat sebuah konstanta C sedemikian sehingga $F(x) = Dx + C$ untuk semua x dalam (a, b). *Petunjuk:* Andaikan $G(x) = Dx$ dan terapkan Teorema B.

20. Andaikan $F'(x) = 5$ dan $F(0) = 4$. Cari sebuah rumus untuk $F(x)$. *Petunjuk:* Lihat Soal 19.

21. Buktikan: Andaikan f **mempunyai** turunan pada $[a, b]$. **Jika** $f(a)$ **dan** $f(b)$ berlawanan tanda dan **jika** $f'(x) \neq 0$ untuk semua x dalam (a, b), **maka** persamaan $f(x) = 0$ **hanya mempunyai** satu dan hanya **satu-satunya penyelesaian** di antara a dan b. ***Petunjuk*: Gunakan** Teorema Nilai **Antara dan Teorema** Rolle (Soal 13).

22. Perlihatkan bahwa $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 1 = 0$ tepat mempunyai satu penyelesaian pada tiap-tiap selang $(-1, 0)$, $(0, 1)$, dan $(4, 5)$. *Petunjuk:* Terapkan Soal 21.

23. Buktikan: Andaikan f mempunyai turunan pada selang I. Di antara titik-titik nol berlainan yang berturutan dari f', hanya terdapat paling banyak satu titik nol dari f. *Petunjuk:* Coba sebuah bukti dengan kontradiksi dan gunakan Teorema Rolle (Soal 13).

24. Buktikan: andaikan g kontinu pada selang $[a, b]$ dan andaikan $g''(x)$ ada untuk semua x dalam (a, b). Jika terdapat tiga nilai x dalam $[a, b]$ untuk mana $g(x) = 0$, maka terdapat paling sedikit satu nilai x dalam (a, b) sedemikian sehingga $g''(x) = 0$.

25. Buktikan bahwa jika $|f'(x)| \leq M$ untuk semua x dalam (a, b) dan jika x_1 dan x_2 dua titik sebarang dalam (a, b), maka

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$$

Catatan: Fungsi yang memenuhi ketaksamaan di atas disebut memenuhi syarat Lipschitz dengan konstanta M. (Rudolph Lipschitz (1832-1903) adalah matematikawan Jerman).

26. Perlihatkan bahwa $f(x) = \sin 2x$ memenuhi syarat Lipschitz dengan konstanta 2 pada selang $(-\infty, \infty)$.. Lihat Soal 25.

27. Sebuah fungsi disebut **tak-turun** pada selang I jika $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ untuk x_1 dan x_2 dalam I. Secara serupa, f adalah **tak-naik** pada I jika $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ untuk x_1 dan x_2 dalam I.

(a) Sketsakan grafik sebuah fungsi yang tak-turun tetapi tidak naik.

(b) Sketsakan grafik sebuah fungsi yang tak-naik tetapi tidak turun.

28. Buktikan bahwa jika f kontinu pada I dan jika $f'(x)$ ada dan memenuhi $f'(x) \geq 0$ pada titik sebelah dalam dari I, maka f adalah tak-turun pada I. Secara serupa, jika $f'(x) \leq 0$, maka f adalah tak-naik pada I.

29. Buktikan bahwa jika $f(x) \geq 0$ dan $f'(x) \geq 0$ pada I, maka f^2 adalah tak-turun pada I.

30. Buktikan bahwa jika $g'(x) \leq h'(x)$ untuk semua x dalam (a, b), maka

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) \leq h(x_2) - h(x_1)$$

untuk semua x_1 dan x_2 dalam (a, b). *Petunjuk:* Terapkan Soal 28 dengan $f(x) = h(x) - g(x)$.

31. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) = 0$$

32. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk membuktikan bahwa

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

33. Misalkan dalam suatu balapan, kuda A dan kuda B mencapai garis akhir dalam waktu yang bersamaan. Buktikan bahwa kecepatan mereka adalah sama pada beberapa saat selama balapan tersebut.

34. Pada Soal 33, andaikan kedua kuda itu melewati garis akhir bersama pada kecepatan yang sama, tunjukkan bahwa mereka mempunyai percepatan yang sama pada beberapa saat.

35. Gunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk menunjukkan bahwa grafik suatu fungsi f yang membuka ke atas selalu berada di atas garis singgungnya, artinya, tunjukkan bahwa

$$f(x) > f(c) + f'(c)(x-c), \quad x \neq c.$$

36. Buktikan bahwa bila $|f(y)-f(x)| \leq M(y-x)^2$ untuk setiap x dan y, maka f merupakan suatu fungsi yang konstan (tetap).

SOAL-SOAL ULANGAN BAB

KUIS BENAR-SALAH

Tiap pernyataan berikut dengan benar atau salah. Bersiaplah untuk memberikan jawab anda.

1. Sebuah fungsi kontinu yang didefinisikan pada sebuah selang tertutup harus mencapai maksimum pada selang tersebut.
2. Jika sebuah fungsi terdiferensial f mencapai nilai maksimum pada sebuah titik sebelah dalam c dari daerah asalnya, maka $f'(c) = 0$.
3. Adalah mungkin untuk sebuah fungsi mempunyai tak terhingga banyaknya titik kritis.
4. Sebuah fungsi kontinu yang naik untuk semua x harus terdiferensial di mana-mana.
5. Jika $f(x) = 3x^6 + 4x^4 + 2x^2$, maka grafik f cekung ke atas pada seluruh garis riil.
6. Jika f sebuah fungsi naik yang terdiferensial pada selang I, maka $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam I.
7. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka f naik pada I.
8. Jika $f''(c) = 0$, maka f mempunyai sebuah titik balik pada $(c, f(c))$.
9. Fungsi kuadrat tidak mempunyai titik balik.
10. Jika $f'(x) > 0$ untuk semua x dalam $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum pada $[a, b]$ di b.
11. Kita menggunakan lambang ∞ untuk menyatakan sebuah bilangan yang lebih besar dari bilangan mana pun.
12. Grafik dari $y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \dfrac{(x + 2)(x - 3)}{x - 3}$ mempunyai sebuah asimtot vertikal di $x = 3$.
13. Grafik dari $y = \dfrac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ mempunyai asimtot horisontal $y = -1$.
14. Grafik dari $y = \dfrac{3x^2 + 2x + \sin x}{x}$ mempunyai asimtot miring $y = 3x + 2$.
15. Fungsi $f(x) = \sqrt{x}$ memenuhi hipotesis dari Teorema Nilai Rata-rata pada $[0, 2]$.
16. Pada selang $[-1, 1]$, hanya akan terdapat satu titik di mana garis singgung pada $y = x^3$ adalah sejajar terhadap tali busur.
17. Jika $f'(x) = 0$ untuk semua x dalam (a, b), maka f adalah konstanta (tetap) pada selang ini.
18. Jika $f'(c) = f''(c) = 0$, maka $f(c)$ bukan nilai maksimum ataupun minimum.
19. Grafik $y = \sin x$ mempunyai titik balik tak terhingga banyaknya.
20. Di antara persegi-panjang dengan luas tetap K, yang kelilingnya maksimum adalah bujur sangkar.
21. Jika grafik sebuah fungsi yang terdiferensial memotong sumbu x di tiga tempat, maka fungsi tersebut harus mempunyai paling sedikit dua titik dengan garis singgung di titik tersebut adalah mendatar.
22. Jumlah dua fungsi naik adalah sebuah fungsi naik.
23. Hasilkali dua fungsi naik adalah sebuah fungsi naik.

24. Jika $f'(0) = 0$ dan $f''(x) > 0$ untuk $x > 0$, maka f naik pada $[0,\infty)$.

25. Jika f sebuah fungsi terdiferensial, maka f tak-turun pada (a, b) jika dan hanya jika $f'(x) > 0$ pada (a, b).

26. Dua fungsi yang terdiferensial mempunyai turunan sama pada (a, b) jika dan hanya jika mereka dibedakan oleh sebuah konstanta pada (a, b).

27. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x, maka grafik $y = f(x)$ tidak dapat mempunyai sebuah asimtot horisontal.

28. Nilai maksimum global selalu merupakan nilai maksimum lokal.

29. Fungsi kubik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ dapat mempunyai paling banyak satu nilai maksimum lokal pada selang terbuka manapun.

30. Fungsi linier $f(x) = ax + b, a \neq 0$ tanpa nilai minimum pada selang terbuka manapun.

SOAL-SOAL ANEKA RAGAM

Dalam Soal-soal 1-6, diberikan fungsi f dan daerah asalnya. Tentukan titik-titik kritis, hitung f di titik-titik ini, dan cari nilai-nilai maksimum dan minimum (global).

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $[-2, -\frac{1}{2}]$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $[-2, 0)$

3. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; $[-2, 3]$

4. $f(x) = x^2(x - 2)^{1/3}$; $[-1, 3]$

5. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 7$; $[-1, 3]$

6. $f(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2$; $[-2, 2]$

Dalam Soal-soal 7-10, diberikan fungsi f dengan daerah asal $\mathbf{R}$. Tunjukkan di mana f naik dan di mana cekung ke bawah.

7. $f(x) = x^3 - 3x + 3$

8. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 1$

9. $f(x) = x^4 - 4x^5$

10. $f(x) = x^3 - \frac{6}{5}x^5$

11. Cari di mana fungsi f, yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2(x - 4)$, naik dan di mana turun. Cari nilai-nilai ekstrim lokal f. Cari titik balik. Sketsakan grafik.

12. Cari nilai-nilai maksimum dan minimum, jika ada, dari fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{4}{x^2 + 1} + 2$$

Dalam Soal-soal 13-18, sketsakan grafik dari fungsi yang diberikan f, dengan memberi pengenal semua ekstrim (lokal dan global) dan titik-titik balik dan dengan memperlihatkan semua asimtot. Yakinkan untuk memanfaatkan f' dan f''

13. $f(x) = x^4 - 32x$

14. $f(x) = (x^2 - 1)^2$

15. $f(x) = x\sqrt{x - 3}$

16. $f(x) = \frac{x - 2}{x + 1}$

17. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

18. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

19. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi F yang mempunyai semua sifat-sifat berikut:
(a) F kontinu di mana-mana;
(b) $F(-2) = 3, F(2) = -1$;
(c) $F'(x) = 0$ untuk $x > 2$;
(d) $F''(x) < 0$ untuk $x < 2$.

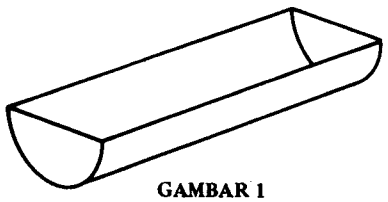
20. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi F yang mempunyai semua sifat-sifat berikut:
(a) F kontinu di mana-mana;
(b) $F(-1) = 6, F(3) = -2$;
(c) $F'(x) < 0$ untuk $x < -1, F'(-1) = F'(3) = -2, F'(7) = 0$;
(d) $F''(x) < 0$ untuk $x < -1$. $F''(x) = 0$ untuk $-1 < x < 3$, $F''(x) > 0$ untuk $x > 3$.

21. Selembar baja panjang, lebarnya 16 inci, kedua sisi panjangnya harus dilipat ke atas untuk membuat talang. Berapa inci lebar lipatan pada tiap sisi agar kapasitas maksimum?

22. Sebuah pagar tinggi 8 kaki, sejajar dengan dinding sebuah bangunan dan sejauh 1 kaki dari bangunan tersebut. Berapa panjang papan terpendek yang dapat melintasi pagar dari permukaan tanah untuk menyangga dinding itu?

23. Halaman sebuah buku harus memuat 27 inci persegi cetakan. Jika pinggir atas, bawah, dan salah satu sisi adalah 2 inci dan pinggir satu sisi lain adalah 1 inci, berapa ukuran halaman agar memakai kertas sedikit mungkin.

24. Sebuah palung air dari baja dengan ujung-ujungnya berbentuk setengah



GAMBAR 1

lingkaran dan sebelah atas terbuka harus mempunyai kapasitas 128π kaki kubik. Tentukan jari-jari r dan panjang h, jika palung tersebut disyaratkan harus dibuat dengan bahan sedikit mungkin.

25. Tentukan maksimum dan minimum fungsi yang didefinisikan pada selang tertutup $[-2, 2]$ oleh

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 8) & \text{jika } -2 \le x \le 0 \\ -\frac{1}{6}(x^2 + 4x - 12) & \text{jika } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Cari di mana grafik cekung ke atas dan di mana grafik cekung ke bawah. Sketsakan grafik.

26. Untuk tiap fungsi [redacted] kan apakah Teorema Nilai [redacted] laku pada selang I yang di[redacted] Jika demikian, cari semua nilai [redacted]ng kedua mungkin; jika tidak ceriterakan me[redacted]la. Kita Buat sketsa [redacted]i ba-

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$; $I = [-3, 3]$ [redacted]n,

(b) $F(x) = x^{3/5} + 1$; $I = [-1, 1]$

(c) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$; $I = [2, 3]$

27. Cari persamaan garis singgung di titik-titik balik dari grafik

$$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 1$$

28. Tentukan tiap limit (mungkin ∞ atau $-\infty$) atau nyatakan bahwa tidak mempunyai limit.

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 - 2x + 7}{2x^2 + 5x + 9}$ (b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 9}{\sqrt{2x^2 + 1}}$

(c) $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{\sin x}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos x$

(e) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$ (f) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

(g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{|x - 1|}{x - 1}$ (h) $\lim\limits_{x \to \infty} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

29. Sketsakan sebuah grafik yang mungkin dari fungsi G dengan semua sifat-sifat berikut:

(a) $G(x)$ kontinu dan $G''(x) > 0$ untuk semua x dalam $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$;

(b) $G(-2) = G(2) = 3$;

(c) $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to \infty} [G(x) - x] = 0$;

(d) $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} G(x) = \infty$.