Bagian 3 Pemodelan Sistem

SISTEM PENGUKURAN

Disusun oleh:
Dr. Yeffry Handoko Putra, S.T, M.T

Perhitungan Presisi, akurasi, bias dan error pada input (harga benar) konstan

True pressure = 10.000 ± .001 kPa
Acceleration = 0
Vibration level = 0
Ambient temperature = 20 ± 1°C

Trial number	Scale reading, kPa
1	10.02
2	10.20
3	10.26
4	10.20
5	10.22
6	10.13
7	9.97
8	10.12
9	10.09
10	9.90
11	10.05
12	10.17
13	10.42
14	10.21
15	10.23
16	10.11
17	9.98
18	10.10
19	10.04
20	9.81

- Harga rata-rata = 10,11 kPa

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

- Variansi: 0,14 kPa

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2}{N-1}}$$

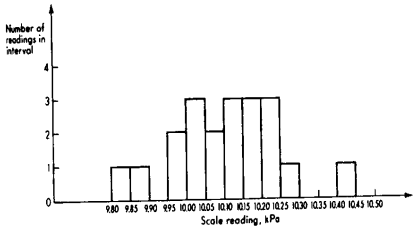
- Normalisasi data:

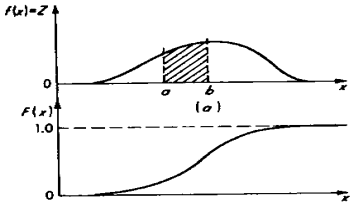
$$Z_i = \frac{X_i - \overline{X}}{s}$$

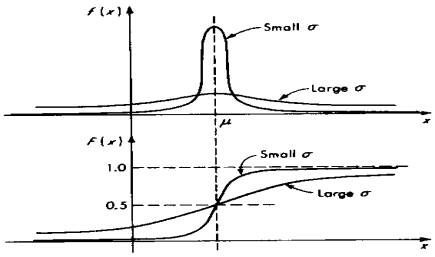
SISTEM PENGUKURAN

Normalisasi data dilakukan untuk mencari probabilitas harga data pengukuran

- Ploting data Sebelum dilakukan normalisasi





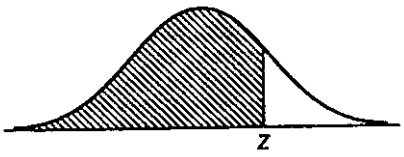


$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

SISTEM PENGUKURAN

Setelah dilakukan Normalisasi



$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-z^2/2}$$

$$F(z) = \int_{-\infty}^{x} f(z)dx$$

- Pada $x = \bar{x}$
- Maka z = 0 dan skala z tidak berdimensi
- Sehingga kurva distribusi normal berlaku untuk semua data normal → dibuat tabel distribusi normal f(z) dan F(z)
- F(z) menyatakan probabilitas bahwa data mempunyai harga

  –z s/d +z

- Dari Tabel Distribusi Normal dapat dicari bahwa jika data dinyatakan berada dalam suatu daerah harga tertentu, maka kepercayaan dalam menyatakan harga berubah

$x = \bar{x} \pm 1\sigma$ kepercayaannya 68%

$x = \bar{x} \pm 2\sigma$ kepercayaannya 95%

$x = \bar{x} \pm 3\sigma$ kepercayaannya 99,7%

- Error 3σ disebut juga **limit error**
- Error $0{,}68\sigma$ disebut **probable error**, dengan kepercayaan 50%

Data yang diberikan mempunyai harga rata-rata = 10,11 kPa dan variansi 0,14 kPa, sehingga jika dinyatakan bahwa harga tekanan yang diukur adalah:

- 9,97 s/d 10,25 kPa kepercayaannya 67%
- 9,83 s/d 10,39 kPa kepercayaannya 95%
- 9,69 s/d 10,53 kPa kepercayaannya 99,7%
- Dengan menggunakan alat ukur tekanan tersebut jika diinginkan kepercayaan yang tinggi, maka harga tekanan terukur adalah dalam daerah 9,69 kPa s/d 10,53 kPa

Presisi

$$\Pr esisi = 100\%\left(1 - \frac{3\sigma}{\bar{x}}\right)$$

Bias

$$bias = x_{benar} - \bar{x}$$

Akurasi

$$akurasi = 100\%\left(1 - \frac{bias + 3\sigma}{x_{benar}}\right)$$

Error dari input tertentu

$$error = 100\%\left(\frac{bias + 3\sigma}{x_{benar}}\right)$$

Error yang dicantumkan pada manual alat dicari dari berbagai hasil kalibrasi yang memberikan harga terbesar.

Akurasi, presisi, bias & kesalahan

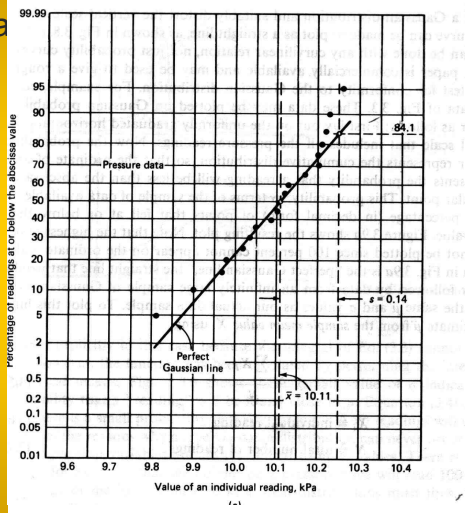
- data pressure-gage, harga rata^2, $\underline{x}$ = 10,11
- Dan standard deviasi, σ = 0,14
- Harga benar, x = 10,00
- Presisi = 3 σ = 3 x 0,14 = 0,42
- Presisi relatif = 0,42/10,11 x100%=4,1%
- Bias = 10,11 – 10 = 0,11
- Akurasi = ketelitian = bias + 3σ = 0,53
- Akurasi relatif = 0,53/10 x 100% = 5,3%
- Kesalahan = 5,3%

- Harga akurasi, presisi, dan error yang dibahas sebelumnya berdasarkan asumsi bahwa data pengukuran terdistribusi normal. Hal ini berarti bahwa output instrumen ukur terutama disebabkan oleh harga input yang ingin diukur, sinyal gangguan yang mempengaruhi output instrumen tidak ada atau hanya kecil.

- Untuk mentes apakah benar bahwa data terdistribusi normal atau tidak, perlu dilakukan "tes normal", yaitu dengan
  - Tes linier pada harga $x = \bar{x}$ atau z = 0
  - Tes Chi-Square (χ^2)

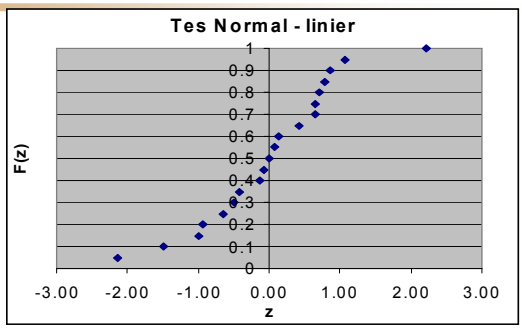
1. Tes linier pada sekitar z = 0 atau $x = \bar{x}$

- a

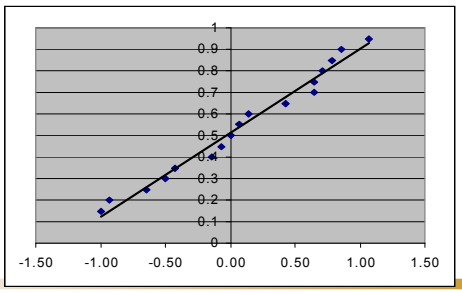


- Pertama data diurutkan dari harga paling kecil ke harga yang besar.
- Kemudian F(z) atau F(x) diplot pada suatu x tertentu di sekitar z = 0 atau $x = \bar{x}$
- Jika diperoleh plot yang mendekati garis lurus, dan perpotongan dengan F(x) pada sekitar harga 0,5, maka distribusi data adalah normal.

x	z	F(z)
9.81	-2.14	0.05
9.9	-1.50	0.1
9.97	-1.00	0.15
9.98	-0.93	0.2
10.02	-0.64	0.25
10.04	-0.50	0.3
10.05	-0.43	0.35
10.09	-0.14	0.4
10.1	-0.07	0.45
10.11	0.00	0.5
10.12	0.07	0.55
10.13	0.14	0.6
10.17	0.43	0.65
10.2	0.64	0.7
10.2	0.64	0.75
10.21	0.71	0.8
10.22	0.79	0.85
10.23	0.86	0.9
10.26	1.07	0.95
10.42	2.21	1



- Pada daerah z = 0



Disusun oleh:
Dr.Ir.farida

Tes Chi Square (χ^2)

Tes χ^2 dilakukan dengan mengumpulkan data menjadi beberapa kelompok, dan untuk masing kelompok dicari harga

$$\frac{(n_o - n_e)^2}{n_e}$$

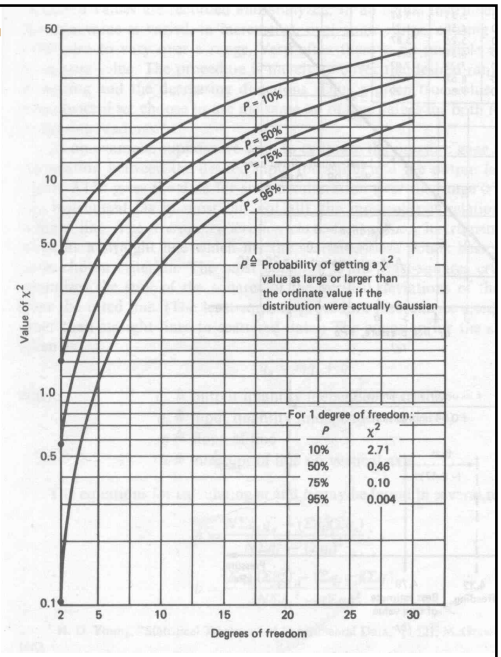
- n_o = jumlah data yang diamati secara aktual
- n_e = jumlah data yang akan diamati jika data terdistribusi normal
- n = jumlah kelompok

Chi-Square (χ^2) adalah:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n_o - n_e)^2}{n_e}$$

Harga χ^2 dibanding dg tabel χ^2 untuk derajat kebebasan (df) kelompok data. df = n-3

- Jika harga χ^2 data berada pada daerah dg tingkat kepercayaan tinggi, maka distribusi data normal,
- Jika harga χ^2 data berada pada daerah dg tingkat kepercayaan rendah, maka distribusi data tidak bisa dikatakan normal.
- Jika harga χ^2 data berada diantara daerah dg tingkat kepercayaan rendah dan tinggi, maka distribusi data tidak bisa dikatakan normal, tetapi juga tidak bisa dikatakan tidak normal



Penerapan tes χ^2 pada data pressure gage

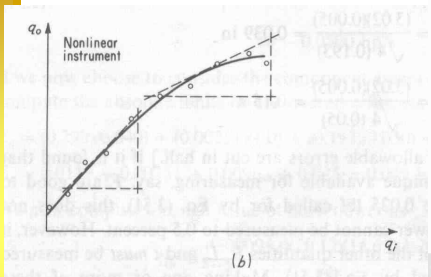
Range z		$F(z_1<z<z_2)$	n_e	n_o	$(n_o-n_e)^2/n_e$
z_1	z_2				
$-\infty$	-0.786	0.220	4.390	4	0.03
-0.785	-0.107	0.240	4.790	4	0.13
-0.107	0.286	0.154	3.072	4	0.28
0.286	0.750	0.161	3.216	4	0.19
0.750	∞	0.225	4.505	4	0.06
				χ^2	0.69

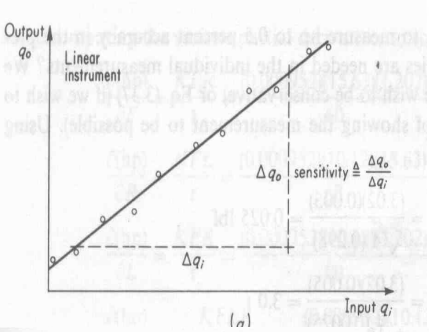
- Dari tabel χ^2 dan kurva χ^2, maka data ini mempunyai kepercayaan bahwa data terdistribusi normal sebesar 80%
- Distribusi data dapat dikatakan mendekati distribusi normal

Parameter Instrumen yang dicari dari input berubah

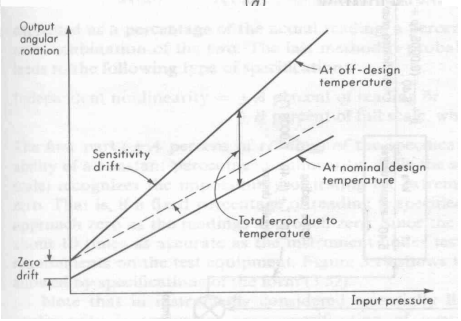
- ***Sensitivitas:*** perbandingan output alat ukur dengan inputnya. Sensitivitas alat yang baik = 1, jika dimensi (satuan) input-output sama.
- ***Threshold****:* input terkecil yg terdeteksi oleh alat ukur
- ***Resolusi****:* perubahan input terkecil yang dapat dideteksi alat
- ***Histeresis****:* kurva perbandingan output-input untuk perubahan input naik dan turun. Histeresis maksimum adalah range harga input terbesar yang kemungkinan memberikan output sama.
- ***Offset*****:** range harga output yang kemungkinan berasal dari input sama.
- ***Range*****:** selisih span pengukuran minimum-maksimum

Sensitifitas & linieritas

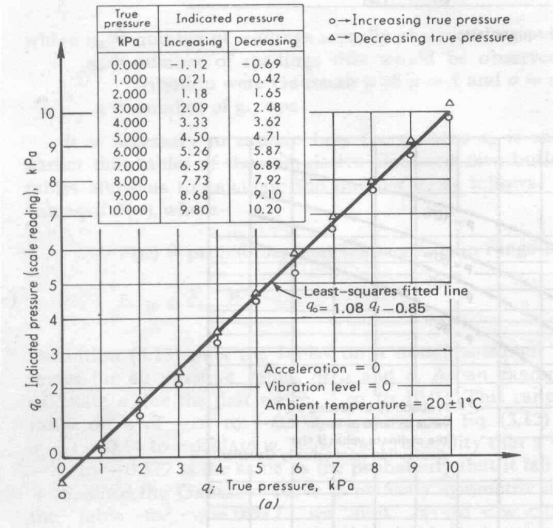




Sensitivitas instrumen berlaku pada suatu daerah harga input tertentu, yaitu dinyatakan dalam daerah liniernya



Sensitivitas alat ukur dicari dari data kalibrasi alat, dengan input berubah



.jika hubungan output-input linier:

$$e_o = m e_i + b$$

$$m = \frac{N\sum e_o e_i - \left(\sum e_i\right)\left(\sum e_o\right)}{N\sum e_i^2 - \left(\sum e_i\right)^2}$$

$$b = \frac{N\left(\sum e_o\right)\left(\sum e_i\right)^2 - \left(\sum e_i e_o\right)\left(\sum e_i\right)}{N\sum e_i^2 - \left(\sum e_i\right)^2}$$

126

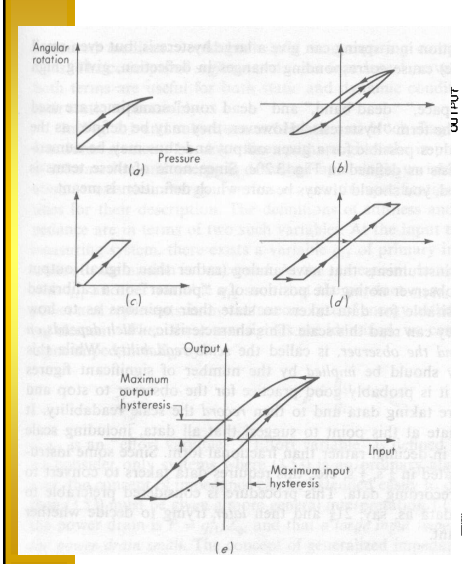
SISTEM PENGUKURAN

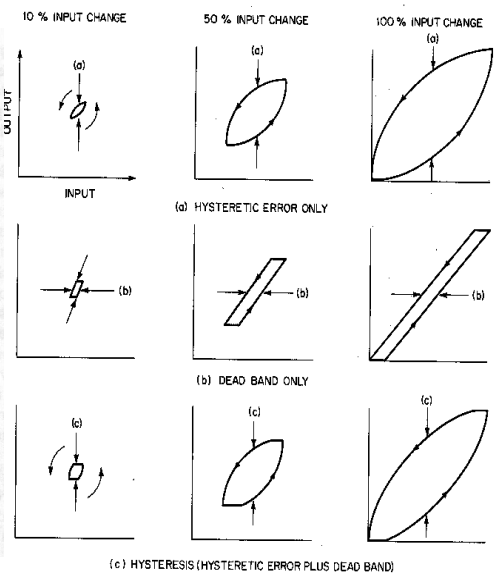
.		output (eo)		$e_o\ e_i$	
input (ei)	ei^2	naik	turun	naik	turun
0	0	-1.12	-0.69	0	0
1	1	0.21	0.42	0.21	0.42
2	4	1.18	1.65	2.36	3.3
3	9	2.09	2.48	6.27	7.44
4	16	3.33	3.62	13.32	14.48
5	25	4.5	4.71	22.5	23.55
6	36	5.26	5.87	31.56	35.22
7	49	6.59	6.89	46.13	48.23
8	64	7.73	7.92	61.84	63.36
9	81	8.68	9.1	78.12	81.9
10	100	9.8	10.2	98	102
55	***385***	***48.25***	***52.17***	***360.3***	***379.9***

- Persamaan sensitivitas: $e_o = 1.0823\ e_i - 0{,}847$

127

Histerisis





Persamaan naik: $e_o = 1{,}08236\ e_i - 1{,}025$

Persamaan turun: $e_o = 1{,}08227\ e_i - 0{,}669$

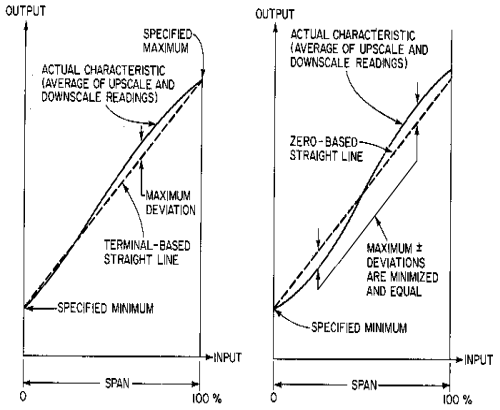
Histerisis: 0,33 kPa

Dead space: 0,37 kPa

- Mencari histerisis:
  - Kurva naik: pada $e_o = 0 \rightarrow e_i = 0{,}9474$
  - Kurva turun: pada $e_o = 0 \rightarrow e_i = 0{,}6178$
  - Histerisis = 0,9474 – 0,6178 = 0,33 kPa
- Mencari dead space:
  - Kurva naik: pada $e_i = 0 \rightarrow e_o = -1{,}025$
  - Kurva turun: pada $e_i = 0 \rightarrow e_o = -0{,}669$
  - Dead space: -0,669 – (-1,025) = 0,37 kPa

Non-linieritas: pada umumnya alat ukur mempunyai sensitivitas yg tidak konstan, hubungan output-input tidak linier. Perlu linierisasi pada range tertentu.

Ketidaklinieran instrumen dinyatakan sbg harga *non-linieritas*, yang menyatakan selisih maksimum dari harga linier dibandingkan dengan harga nonlinier.



Kombinasi komponen error pada perhitungan akurasi sistem

- Sistem pengukuran seringkali tersusun dari rantai komponen, yang masing-masing mempunyai ketidak akurasi. Jika akurasi setiap komponen diketahui, maka akurasi dari sistem dapat dihitung.
- Misalkan bahwa besaran sistem yang diukur N merupakan fungsi dari berbagai variabel u_1, u_2, u_3, ...u_n.

$$N = f(u_1, u_2, u_3, ...u_n)$$

Jika setiap variabel mempunyai kesalahan:

$$\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, ... \Delta u_n$$

Dimana Δu_i dianggap sebagai batas error absolut, seperti e_p atau batas 3σ.

$N \pm \Delta N = f(u_1 \pm \Delta u_1, u_2 \pm \Delta u_2, \ldots\ldots u_n \pm \Delta u_n)$

$$E_a = \Delta N = \left|\Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}\right| + \left|\Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}\right| + \cdots\cdots + \left|\Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n}\right|$$

Tetapi jika error Δu_i dianggap bukan error absolut, tetapi error statistik, seperti limit error $\pm 3\sigma$, maka digunakan error root mean square (E_{rss})

$$E_a = \Delta N = \sqrt{\left|\Delta u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1}\right|^2 + \left|\Delta u_2 \frac{\partial f}{\partial u_2}\right|^2 + \cdots\cdots + \left|\Delta u_n \frac{\partial f}{\partial u_n}\right|^2}$$

Jika akurasi total absolut diketahui dan diinginkan akurasi absolut dari setiap komponen yang diperlukan untuk mencapai harga akurasi total absolut, maka

$$\Delta u_i = \frac{\Delta N}{n\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)} \quad i = 1,2,3\cdots\cdots n$$

Jika error total adalah harga statistik

$$\Delta u_i = \frac{\Delta N}{\sqrt{n}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)} \quad i = 1,2,3\cdots\cdots n$$

Efek Pembebanan Instrumen ukur pada Medium

- Instrumen Ukur dapat membebani medium yang diukur sehingga harga hasil pengukuran yang terbaca pada alat ukur tidak sama dengan harga variabel pengukuran jika alat ukur tidak dipasang.

Contoh:

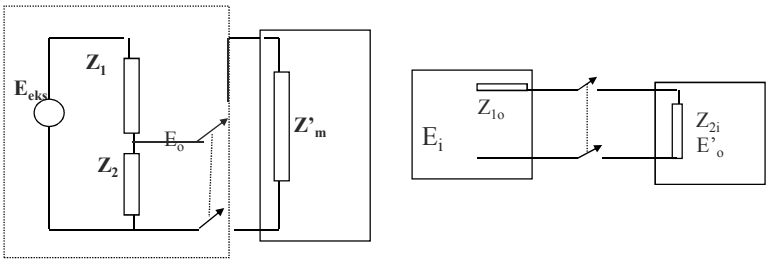
- Termometer yg membebani medium pengukuran
- Voltmeter atau ameter yang membebani rangkaian pengukuran.

Efek Pembebanan Alat Ukur Pada Medium

- Alat ukur atau sistem yang dipasang pada medium dapat menerima transfer variabel tegangan, variabel arus atau variabel daya dari medium, tergantung pada alat ukur/sistem.
  - Alat ukur tegangan menerima transfer variabel tegangan dari medium
  - Alat ukur arus menerima transfer variabel arus dari medium
  - Alat ukur daya menerima transfer daya dari medium

- Besarnya harga variabel tegangan, arus atau daya yang ditransfer dari medium ke alat ukur menyebabkan kesalahan penunjukan harga pengukuran.

Rangkaian pembagi tegangan & rangkaian pengganti



Impedansi output medium (rangkaian yang diukur)
$Zo = R_1//R_2 = R_1R_2/(R_1+R_2)$

Tegangan output rangkaian tanpa beban = e_o

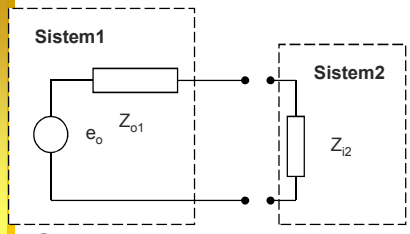
$$e_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_{eks}$$

Tegangan output rangkaian setelah ada impedansi input metger $Z_{in} = R_m$, sehingga tegangan output menjadi e_o'

$$\acute{e}_o' = \frac{(R_m // R_2)}{(R_m // R_2) + R_1} e_{eks} = \frac{\left(R_m R_2 / \left(R_m + R_2\right)\right)}{\left(R_m R_2 / \left(R_m + R_2\right)\right) + R_1} e_{eks}$$

$$= \frac{R_m R_2}{R_m R_2 + R_1\left(R_m + R_2\right)} \frac{R_1 + R_2}{R_2} e_o = \frac{R_m\left(R_1 + R_2\right)}{R_m R_2 + R_1 R_m + R_1 R_2} e_o$$

$$= \frac{R_m\left(R_1 + R_2\right)}{R_m\left(R_1 + R_2\right) + R_1 R_2} eo = \frac{R_m}{R_m + R_1 R_2 / \left(R_1 + R_2\right)} e_o = \frac{Z_{i2}}{Z_{i2} + Z_{o1}} e_o$$



- Output sistem 1 setelah dipasang sistem 2, menjadi: $e_o^1 = \frac{Z_{i2}}{Z_{i2} + Z_{o1}} e_o$
- Supaya tidak terjadi efek pembebanan maka

$$Z_{i2} >> Z_{o1}$$

Sehingga $e_o' \simeq e_o$

- Persamaan ini berlaku jika variabel yang ditransfer (diukur) adalah variabel tegangan (across quantity).
- Jika yang diukur variabel arus (flow quantity), maka $Z_{i2} << Z_{o1}$ atau $Y_{i2} >> Y_{o1}$

di mana

- Y_{o1} adalah admitansi output sistem 1
- Y_{i2} admitansi input sistem 2

- Efek Pembebanan tidak hanya terjadi pada sistem elektrik, tetapi pada sistem termal, sistem mekanis, dsb juga akan terjadi efek pembebanan jika suatu sistem (Instrumen) dihubungkan dengan instrumen lainnya atau suatu sistem fisis dihubungkan dengan sistem fisis lainnya
- Secara umum semua sistem fisis mempunyai dua variabel yang saling bebas. Variabel 1 adalah variabel alir (q_1) dan variabel 2 adalah variabel potensial (q_2) misal:
  - pada sistem listrik ada variabel arus (q_1=I) dan tegangan listrik (q_2 = V)
  - Pada sistem termal ada variabel temperatur (q_2 =T) dan aliran kalor (q_1 = Q)
  - Pada sistem aliran fluida ada debit aliran (q_1=Q) dan tekanan fluida (q_2 = p).

Hubungan antara variabel alir (q_1) dengan variabel potensial (q_2)

Jika perkalian q_1 dan q_2 besaran energi

- Impedansi $\frac{q_2}{q_1} = \frac{\text{var } iabel\ \ potensial}{\text{var } iabel\ \ alir} = \text{Im } pedansi = Z$
- Admitansi $\frac{q_2}{q_1} = \frac{\text{var } iabel\ alir}{\text{var } iabel\ \ potensial} = admi \tan si = Y = \frac{1}{Z}$
- Daya $q_1 q_2 = Daya$

Contoh: pada sistem elektrik q_1 = I (arus listrik) dan q_2=V (tegangan listrik), maka P = VI

Jika perkalian q_1 q_2 berupa besaran energi, maka

- Stiffness atau kekakuan sistem adalah perbandingan variabel potensial dengan variabel alir

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\text{var } iabel\ \ potensial}{\text{var } iabel\ alir} = stifness = S$$

- Compliance adalah atau kelenturan sistem adalah perbandingan variabel alir dengan variabel potensial

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\text{var } iabel\ alir}{\text{var } iabel\ \ potensial} = Compliance = C = \frac{1}{S}$$

Contoh: pada pegas F = K x, F (gaya) adalah variabel potensial dan x (defleksi pegas) adalah variabel alir. K stiffness pegas, dan C compliance pegas = 1/K

- Jika suatu sistem dihubungkan dengan sistem lainnya, dan yang ditransfer adalah variabel tertentu, maka stiffness (impedansi) input dari sistem fisis kedua dapat membebani sistem fisis pertama, jika harga stiffness (impedansi) output sistem pertama tidak sesuai dengan stiffness (impedansi) input sistem kedua.
- Apakah alat ukur (sistem fisis kedua) akan membebani medium pengukuran (sistem fisis pertama), tergantung pada macam variabel yang diukur, variabel alir atau variabel potensial atau variabel daya dan harga stiffness (impedansi) input dan output dari kedua sistem

Pada sistem yang perkalian dua variabelnya adalah besaran daya,

- maka efek pembebanan dinyatakan dalam variabel impedansi atau admitansi.
- Supaya kedua sistem tidak saling membebani:
  - Jika yang diukur atau ditransfer adalah variabel potensial (q_2) maka Impedansi input sistem kedua harus jauh lebih besar dari pada impedansi output sistem pertama ($Z_{2i} >> Z_{1o}$)
  - Jika yang diukur atau ditransfer adalah variabel alir (q_1), maka $Z_{2i} << Z_{1o}$ atau $Y_{2i} >> Y_{1o}$
  - Jika yang akan ditransfer daya, maka $Z_{2i} \simeq Z_{1o}$ (Matching Impedansi)

Pada sistem yang perkalian dua variabelnya adalah besaran energi

- maka efek pembebanan dinyatakan dalam variabel stiffness atau compliance.
- Supaya kedua sistem tidak saling membebani:
  - Jika yang diukur atau ditransfer adalah variabel potensial (q_2) maka Stiffness input sistem kedua harus jauh lebih besar dari pada stiffness output sistem pertama ($S_{2i} >> S_{1o}$)
  - Jika yang diukur atau ditransfer adalah variabel alir (q_1), maka $S_{2i} << S_{1o}$ atau $C_{2i} >> C_{1o}$
  - Jika yang akan ditransfer daya, maka $S_{2i} \simeq S_{1o}$ (Matching Stiffness)