BAB V

PENGGUNAAN TURUNAN

5.1 Untuk Menggambar Grafik Fungsi

Informasi yang dibutuhkan untuk menggambar grafik fungsi adalah

A.Titik potong dengan sumbu x dan sumbu y

B.Asimtot fungsi

Definisi 5.1 Asimtot fungsi adalah garis lurus yang didekati grafik fungsinya .

Ada Tiga asimtot fungsi, yakni

- asimtot tegak

  Garis $x = c$ disebut asimtot tegak grafik fungsi $y = f(x)$ jika

  $$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

- asimtot datar

  Garis $y = b$ disebut asimtot datar grafik fungsi $y = f(x)$ jika $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

- asimtot miring

  Ggaris $y = ax + b$ disebut asimtot miring jika

  $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ dan } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$$

Perlu dicatat, bahwa grafik fungsi tidak akan mempunyai asimtot datar sekaligus miring. Dapat dilihat, jika $a \neq 0$, maka grafik fungsi tersebut tidak punya asimtot datar, tetapi ia punya asimtot miring.

Contoh 5.1 Tentukan semua asimtot dari $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

Jawab : (i) asimtot tegak : $x = 0$, karena $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{(x+1)^2}{x} = -\infty$

(ii) asimtot miring / datar :

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x} - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x+1-x^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$$

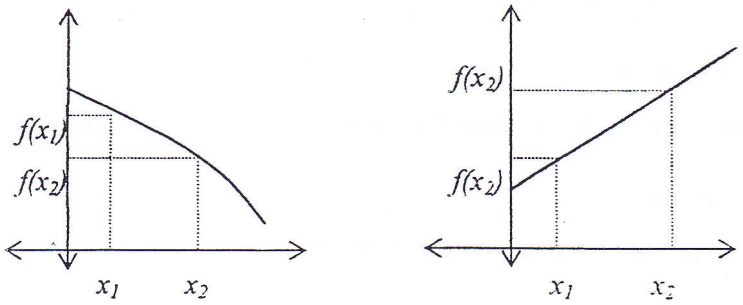
Jadi asimtot miring : $y = x + 2$, asimtot datar tidak ada.

C. Kemonotonan Fungsi

Definisi 5.2 Grafik fungsi *f(x)* dikatakan

- **monoton naik** pada interval I jika untuk
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in I$
- **monoton turun** pada interval I jika untuk
  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in I$.

Fungsi naik atau turun disebut **fungsi monoton.**



(a) (b)

Gambar 5.1 fungsi monoton

Gambar 5.1(a) merupakan grafik fungsi yang monoton turun pada selang I dan gambar 5.1 (b) merupakan grafik fungsi yang monoton naik pada selang I. Dari gambar (a) terlihat bahwa sudut yang dibentuk antara garis singgung dan sumbu x positif adalah sudut tumpul, atau dengan kata lain gradient (kemiringan) garis singgung bernilai negatif. Dari gambar (b) terlihat bahwa sudut yang dibentuk oleh garis singgung dan sumbu x positif adalah sudut lancip, dengan kata lain gradient garis singgung bernilai positif. Sebelumnya sudah diketahui bahwa arti geometris dari turunan pertama adalah gradien garis singgung.

Teorema 5.1 Andaikan f diferensiabel di selang I, maka

i. Fungsi $f(x)$ monoton naik pada I jika $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in I$

ii. Fungsi $f(x)$ monoton turun pada I jika $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$

Contoh 5.2 Tentukan selang kemonotonan dari $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

Jawab : $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x} = \dfrac{x^2+2x+1}{x} = x+2+\dfrac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$



$f(x)$ monoton naik pada $f'(x) > 0$, yaitu pada $(-\infty,-1)$ dan $(1,+\infty)$

$f(x)$ monoton turun pada $f'(x) < 0$, yaitu pada (-1,0) dan (0,1)

D. Ekstrim Fungsi

Ekstrim fungsi adalah nilai maksimum atau minimum fungsi di daerah definisinya.

Definisi 5.3 Misalkan $f(x)$ kontinu pada selang I dan $c \in I$.

- $f(c)$ disebut nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ global dari f pada I jika $\dfrac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)} \ \forall x \in I$
- $f(c)$ disebut nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal dari f pada I jika terdapat selang buka yang memuat c sehingga $\dfrac{f(c) \geq f(x)}{f(c) \leq f(x)}$ untuk setiap x pada selang buka tadi.

Teorema 5.2 (Teorema Eksistensi maksimum-minimum)

Jika f kontinu pada selang tutup $[a,b]$, maka f mencapai nilai maksimum dan minimum.

Titik pada daerah definisi dimana kemungkinan terjadinya ekstrim fungsi disebut **titik kritis**.

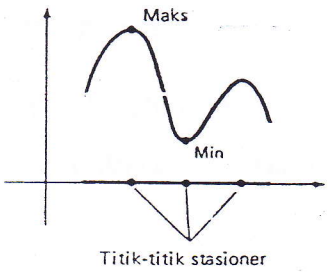
Teorema 5.3 (Teorema titik kritis). Misalkan f terdefinisi pada selang I yang memuat c. Jika $f(c)$ nilai ekstrim, maka c adalah titik kritis, yakni salah satu :

1. Titik ujung selang I

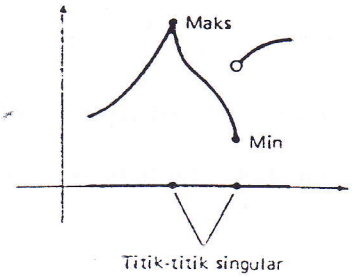
2. Titik stasioner (yaitu $x = c$ dimana $f'(c) = 0$) , secara geometris : garis singgung mendatar dititik *(c,f(c))*
3. Titik singular ($x = c$ dimana $f'(c)$ tidak ada), secara geometris: terjadi patahan pada grafik *f* di titik *(c,f(c))*

Ketiga jenis titik kritis ini (titik ujung, titik stasioner, titik singular) merupakan titik-titik kunci teori maksimum-minimum.

Untuk jelasnya, perhatikan gambar 5.2 berikut .



Gambar 5.2(a)



Gambar 5.2(b)

Teorema 5.4 Uji turunan pertama untuk ekstrim lokal

Jika $\dfrac{f'(x) > 0}{f'(x) < 0}$ pada selang *(b,c)* dan $\dfrac{f'(x) < 0}{f'(x) > 0}$ pada selang *(c,d)*, maka

f(c) merupakan nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal *f*.

Teorema 5.5 Uji turunan kedua untuk ekstrim lokal

Misalkan $f'(c) = 0$,

Jika $\dfrac{f''(c) < 0}{f''(c) > 0}$ maka *f(c)* merupakan nilai $\dfrac{\text{maksimum}}{\text{minimum}}$ lokal dari *f*.

Contoh 5.3 Tentukan nilai ekstrim fungsi $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

Jawab : dari contoh 5.2 diperoleh

(a) $f'(x) > 0$ pada $(-\infty,-1)$ dan $f'(x) < 0$ pada $(-1,0)$,

maka $f(-1) = \dfrac{(-1+1)^2}{-1} = 0$ adalah nilai maksimum lokal.

(b) $f'(x) < 0$ pada $(0,1)$ dan $f'(x) > 0$ pada $(1,+\infty)$,

maka $f(1) = \dfrac{(1+1)^2}{1} = 4$ adalah nilai minimum lokal.

Teorema 5.6 Misalkan $f(x)$ kontinu pada selang I dan $c \in I$. Jika $f'(c)$ ada, dan f mencapai ekstrim lokal di c, maka $f'(c) = 0$.

Bukti :

Misalkan f mencapai maksimum lokal di c, maka $f(c) \geq f(x)$ di sekitar c

Karena $f'(c)$ ada, maka

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \text{ dan } f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

Ini menunjukkan bahwa $f'_-(c) \geq 0$ dan $f'_+(c) \leq 0$, maka haruslah $f'(c) = 0$.

Teorema ini tidak berlaku sebaliknya, artinya jika $f'(c) = 0$, belum tentu $f(c)$ nilai ekstrim.

Contoh 5.4 $f(x) = x^3 \rightarrow f'(c) = 0$ tetapi $f(0) = 0$ bukan nilai ekstrim.

E. Kecekungan fungsi

Secara geometris, grafik fungsi $y = f(x)$ akan cekung ke bawah di suatu titik bila kurva terletak di bawah garis singgung kurva di titik tersebut. Sedangkan grafik fungsi $y = f(x)$ akan cekung ke atas di suatu titik bila kurva terletak di atas garis singgung kurva di titik tersebut.

Fungsi $f(x)$ dikatakan **cekung ke atas** pada interval I bila $f'(x)$ naik pada interval I, sedang $f(x)$ dikatakan **cekung ke bawah** bila $f'(x)$ turun pada interval I. Oleh karena itu dapat disimpulkan :

Teorema 5.7 Uji turunan kedua untuk kecekungan

1. Jika $f''(x) > 0, \forall x \in I$ maka $f(x)$ cekung ke atas pada I
2. Jika $f''(x) < 0, \forall x \in I$ maka $f(x)$ cekung ke bawah pada I.

Contoh 5.5 Tentukan selang kecekungan dari $f(x) = x^3$

Jawab : $f'(x) = 3x^2$ dan $f''(x) = 6x$, maka f cekung ke atas pada $(0,+\infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty,0)$.

F. **Titik belok**

Definisi 5.4 Misal $f(x)$ kontinu di $x = b$. Maka $(b, f(b))$ disebut **titik belok** dari kurva $f(x)$ jika :

- terjadi perubahan kecekungan di $x = b$, yaitu di sebelah kiri $x=b$ cekung ke atas dan di sebelah kanan $x=b$ cekung ke bawah atau sebaliknya.
- terdapat garis singgung pada titik $(b,f(b))$ tersebut.

Syarat perlu $x = b$ merupakan absis dari titik belok bila berlaku $f''(b) = 0$ atau $f(x)$ tidak diferensiabel dua kali di $x = b$ ($f''(b)$ tidak ada).

Contoh 5.6 Carilah titik belok (bila ada) dari fungsi berikut :

a. $f(x) = 2x^3 - 1$

b. $f(x) = x^4$

c. $f(x) = x^{1/3} + 1$

Jawab :

a. Dari $f(x) = 2x^3 - 1$ maka $f''(x) = 12x$.

Bila $f''(x) = 0$ maka $x = 0$ merupakan calon dari titik belok.

Fungsi f kontinu di $x = 0$ dan $f'(0) = 0$, jadi terdapat garis singgung di (0,-1).

Untuk $x < 0$ maka $f''(x) < 0$, sedangkan untuk $x > 0$ maka $f''(x) > 0$. Oleh karena itu, di $x = 0$ terjadi perubahan kecekungan. Jadi **(0,-1)** merupakan **titik belok.**

b. Dari $f(x) = x^4$ maka $f''(x) = 12x^2$.

Bila $f''(x) = 0$ maka $x = 0$ merupakan calon dari titik belok, sehingga untuk menguji apakah $x = 0$ merupakan titik belok dilakukan hal berikut.

Untuk $x < 0$ dan $x > 0$ maka $f''(x) > 0$. Oleh karena itu, di $x = 0$ tidak terjadi perubahan kecekungan. Jadi **(0,0) bukan** merupakan **titik belok.**

c. Dari $f(x) = x^{1/3} + 1$ maka $f''(x) = \dfrac{-2}{9x^{5/3}}$. Terlihat bahwa $f(x)$ tidak dapat diturunkan dua kali di $x = 0$. Fungsi f kontinu di $x = 0$ dan $f'(0) = \infty$, jadi terdapat garis singgung yang tegak lurus pada sumbu x di titik $(0,1)$. Untuk

$x < 0$ maka $f''(x) > 0$, sedangkan untuk $x > 0$ maka $f''(x) < 0$ .Oleh karena itu, di $x = 0$ terjadi perubahan kecekungan. Jadi (0,1) merupakan **titik belok.**

Grafik Fungsi

Dari informasi yang didapat dari point A sampai dengan F, kita dapat menggambarkan suatu grafik fungsi *f(x)*.

Contoh 5.7 Diketahui $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$

a. Asimtot tegak *f(x)* adalah $x = 0$

   Asimtot miring *f(x)* adalah $y = x + 2$

b. *f(x)* monoton naik pada $(-\infty,-1)$ dan $(1,+\infty)$

   f(x) monoton turun pada (-1,0) dan (0,1)

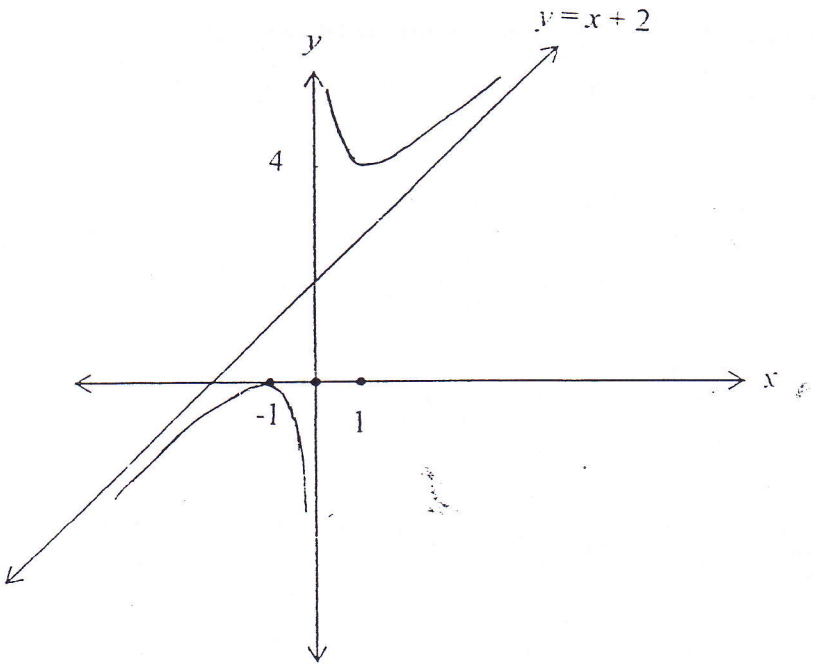
c. $f(-1) = 0$ adalah nilai maksimum lokal

   $f(1) = 4$ adalah nilai minimum lokal

d. $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, maka *f(x)* cekung ke atas pada $(0,\infty)$ dan cekung ke bawah pada $(-\infty,0)$.

e. Terjadi perubahan kecekungan di 0, tetapi *f(0)* tidak ada, berarti titik belok fungsi *f(x)* tidak ada.

f. Grafik *f(x)* adalah sebagai berikut :



5.2 Menghitung limit fungsi dengan Aturan L'Hôpital

Dalam perhitungan limit fungsi seringkali dijumpai bentuk tak tentu dari limit yaitu : $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0$, dan 1^∞. Empat bentuk pertama dapat diselesaikan dengan menggunakan cara yang dikenalkan oleh **L'Hôpital.**

(i) Aturan L'Hôpital untuk bentuk $\frac{0}{0}$.

Teorema 5.8 Andaikan $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$. Jika $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty, -\infty$,

maka $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(ii) Aturan L'Hôpital untuk bentuk $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 5.9 Andaikan $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$. Jika $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, +\infty$, atau $-\infty$,

maka $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Akibat dari aturan ini akan didapat : $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots .$

sehingga didapat nilai yang bukan bentuk tak tentu lagi.

Penulisan lim mengandung maksud $\lim_{x \to a}, \lim_{x \to a^+}, \lim_{x \to a^-}, \lim_{x \to -\infty}$ atau $\lim_{x \to \infty}$.

Contoh 5.8 Hitung limit berikut :

a. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ (bentuk $\frac{0}{0}$)

b. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 1}$ (bentuk $\frac{\infty}{\infty}$)

Jawab :

a. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$

b. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{x^4+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{4x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{12x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{24x} = 0$

(iii) Bentuk $0 . \infty$

Misalkan $\lim f(x) = 0$ dan $\lim g(x) = \infty$. Maka $\lim f(x)g(x)$ merupakan bentuk $0.\infty$. Untuk menyelesaikannya kita ubah menjadi bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$ yaitu : $\lim f(x)\, g(x) = \lim \frac{f(x)}{1/g(x)} = \lim \frac{g(x)}{1/f(x)}$. Selanjutnya solusi dari limit tersebut diselesaikan dengan menggunakan aturan L'Hôpital.

Contoh 5.9 Hitung limit berikut :

a. $\lim_{x\to\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x$

b. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc x$

Jawab :

a. $\lim_{x\to\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sec x = \lim_{x\to\pi/2} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1}{-\sin x} = -1$

b. $\lim_{x\to 0} x^2 \csc x = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$

(iv) Bentuk $\infty - \infty$

Misalkan $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$. Maka untuk menyelesaikan bentuk $\lim [f(x) - g(x)]$ dilakukan dengan menyederhanakan bentuk $[f(x) - g(x)]$ sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya.

Contoh 5.10 Hitung $\lim_{x\to 0} \left(\csc x - \cot x\right)$

Jawab :

$\lim_{x\to 0} \left(\csc x - \cot x\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$

Perlu dicatat bahwa, tidak semua bentuk limit tak tentu dapat diselesaikan menggunakan aturan L'Hôpital. Hal ini seringkali terjadi di dalam menyelesaikan limit fungsi $f(x)$ dengan $f(x)$ bukan merupakan fungsi rasional. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 5.11 Hitung limit berikut :

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \dfrac{1}{x}}{\sin x}$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right)$

Jawab:

a. Kalau dengan aturan L'Hôpital , maka didapat

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

Terlihat di sini bahwa limit pembilang tidak ada. Jadi aturan L'Hôpital tidak dapat digunakan. Untuk itu digunakan cara berikut :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = 0 .$$

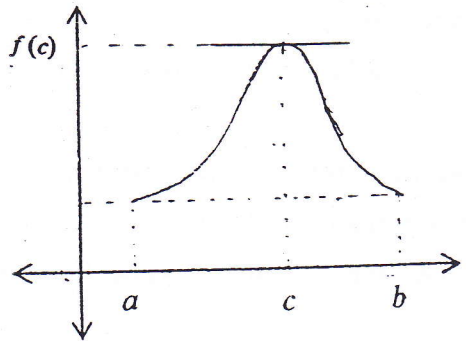
b. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+1}} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \dfrac{1}{2}$

Seperti telah dikemukakan di awal , bahwa ada tujuh bentuk tak tentu dalam perhitungan limit. Untuk tiga bentuk tak tentu lainnya akan diselesaikan dengan bantuan fungsi transenden yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

5.3 Teorema Rolle

Teorema 5.10 Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan diferensiabel pada (a,b), dan $f(a) = f(b)$, maka terdapat $c \in (a,b) \ni f'(c) = 0$.

Perhatikan gambar 5.3 berikut.



Gambar 5.3 teorema Roole

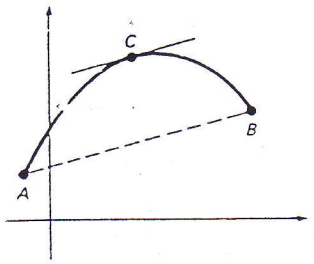
Teorema ini menunjukkan eksistensi $c \in D_f$ sehingga garis singgung fungsi f di titik $(c,f(c))$ mendatar.

5.4 Teorema Nilai Rata-rata

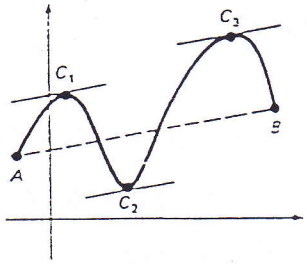
Teorema 5.11 Misalkan $f(x)$ kontinu pada $[a,b]$ dan diferensiabel pada (a,b), maka terdapat paling sedikit satu $c \in (a,b) \ni f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ atau

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Perhatikan gambar 5.4(a) dan (b).



Gambar 5.4(a)



Gambar 5.4(b)

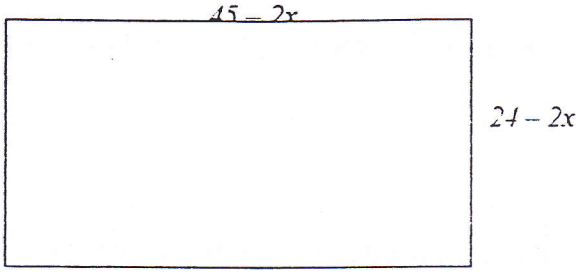
Teorema ini menunjukkan eksistensi $c \in D_f$ sedemikian sehingga garis singgung fungsi f di titik $(c,f(c))$ sejajar dengan garis yang menghubungkan titik $(a,f(a))$ dan $(b,f(b))$.

5.5 Masalah maksimum minimum lainnya

Turunan dapat juga dipergunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari.

Contoh 5.12 Sehelai karton berbentuk persegipanjang dengan ukuran 45 x 24 cm. Karton ini akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong keempat bujur sangkar di pojoknya dan melipatnya. Tentukan ukuran kotak agar volume kotak maksimum.

Jawab :



Misalkan pojok yang dipotong adalah x, sehingga kita punya ukuran kotak : x, $24 - 2x$, dan $45 - 2x$. Jadi kita punya model matematika untuk volume kotak sebagai

$$V = x(24 - 2x)(45 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 138x^2 + 1080x \quad , \ 0 < x < 12$$

$$V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080$$

$$V''(x) = 24x - 276$$

Titik kritis : $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 276x + 1080 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 23x + 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 5) = 0$$

$$x = 18 \text{ atau } x = 5$$

Di sini tidak mungkin $x = 18$, karena melebihi ukuran karton, jadi yang mungkin adalah $x = 5$. Dan $V''(5) = -156 < 0$, berarti tercapai nilai maksimum. Jadi agar volume kotak maksimum, maka ukuran kotak adalah 5 x 14 x 35 cm.

Contoh 5.13 Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva dengan persamaan

$$s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1 \ , \ t \geq 0$$

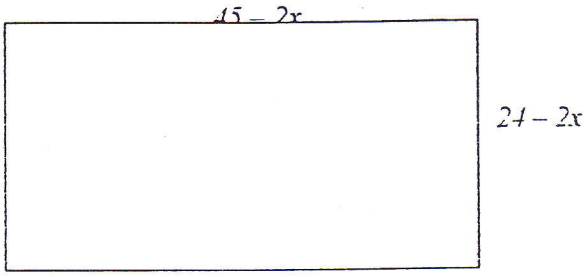
a. Tentukan saat partikel bergerak ke kanan dan bergerak ke kiri

5.5 Masalah maksimum minimum lainnya

Turunan dapat juga dipergunakan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari.

Contoh 5.12 Sehelai karton berbentuk persegipanjang dengan ukuran 45 x 24 cm. Karton ini akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara memotong keempat bujur sangkar di pojoknya dan melipatnya. Tentukan ukuran kotak agar volume kotak maksimum.

Jawab :



Misalkan pojok yang dipotong adalah x, sehingga kita punya ukuran kotak : x, $24 - 2x$, dan $45 - 2x$. Jadi kita punya model matematika untuk volume kotak sebagai

$$V = x\,(24 - 2x)(45 - 2x)$$
$$= 4x^3 - 138x^2 + 1080x \quad , \; 0 < x < 12$$

$$V'(x) = 12x^2 - 276x + 1080$$

$$V''(x) = 24x - 276$$

Titik kritis : $V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 276x + 1080 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 23x + 90 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 5) = 0$$

$$x = 18 \text{ atau } x = 5$$

Di sini tidak mungkin $x = 18$, karena melebihi ukuran karton, jadi yang mungkin adalah $x = 5$. Dan $V''(5) = -156 < 0$, berarti tercapai nilai maksimum. Jadi agar volume kotak maksimum, maka ukuran kotak adalah 5 x 14 x 35 cm.

Contoh 5.13 Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva dengan persamaan

$$s(t) = t^3 - \frac{15}{2}t^2 + 18t - 1 \,, \; t \geq 0$$

a. Tentukan saat partikel bergerak ke kanan dan bergerak ke kiri

b. Tentukan saat partikel berhenti.

Jawab :

a. $s'(t) = v(t) = 3t^2 - 15t + 18 = 3(t-3)(t-2)$

partikel bergerak ke kanan, jika $v(t) > 0$, yaitu pada $0 < t < 2$ atau $t > 3$

dan partikel bergerak ke kiri , jika $v(t) < 0$, yaitu pada $2 < t < 3$

b. Partikel berhenti, jika $v(t) = 0$, yaitu saat t = 2 atau t = 3.

Soal Latihan 5

A.

1. Tentukan selang kemonotonan dan selang kecekungan dari fungsi berikut :

   a. $f(x) = 2x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 6$

   b. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3}$

   c. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

2. Tentukan semua asimtot dari fungsi berikut :

   a. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

   b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x - 3}$

   c. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1}$

   d. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$

3. Gambarkan grafik fungsi berikut dengan melengkapinya dengan selang kemonotonan, kecekungan, ekstrim fungsi, titik belok, dan asimtot

   a. $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

   b. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

   c. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - x^2 + 1$

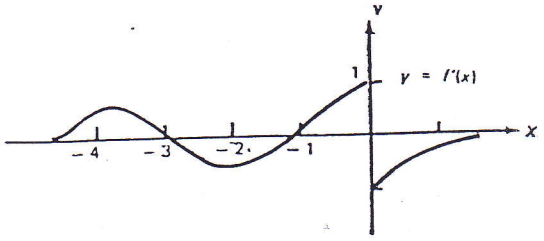
   d. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

   e. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

4. Sketsa grafik fungsi $f(x)$ mempunyai sifat berikut :

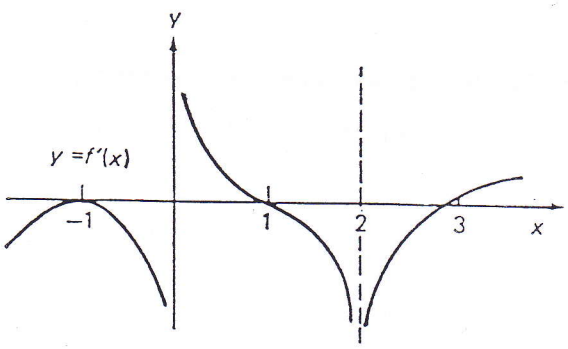
   - f kontinu di mana-mana
   - $f(-3) = 1$
   - $f'(x) < 0$ *untuk* $x < -3, f'(x) > 0$ *untuk* $x > -3, f''(x) < 0$ *untuk* $x \neq -3$

5. Misalkan f suatu fungsi kontinu dan $f(-3)=f(0)=2$. Jika grafik $y = f'(x)$ seperti gambar berikut :



a. Tentukan selang kemonotonan fungsi f
b. Tentukan selang kecekungan fungsi f
c. Sketsa grafik fungsi $f(x)$.

6. Jika f fungsi kontinu dengan $f(2)=f(0)=0$, dan grafik fungsi $y = f'(x)$ terlihat pada gambar berikut :



a. Tentukan selang kemonotonan f
b. Tentukan selang kecekungan f
c. Sketsa grafik fungsi f.

7. Kota A terletak 3 km dari garis pantai yang lurus dan kota B terletak 4 km dari titik di pantai yang terdekat dari A. Pemerintah Daerah setempat akan memasang kabel telepon dari kota A ke kota B. Jika biaya pemasangan kabel dari A ke B untuk setiap kilometer melewati jalan laut dua kali besarnya dibandingkan biaya pasang kabel lewat darat. Tentukan letak titik di pantai agar biaya pemasangan kabel telepon dari A ke B semurah mungkin.

B. Hitung limit berikut (bila ada)

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{2-5x}$

2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-x}{2x^3-1}$

3. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x^3}{x+4}$

4. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt{1+2x^2}}$

5. $\lim_{x\to0} 2x \csc x$

6. $\lim_{x\to0} \cot 2x \left(1-\cos 2x\right)$

7. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

8. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$

9. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

10. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}-\sqrt{x^2-3}\right)$

11. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+6x-5}-x\right)$

12. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin(ax)}{ax}$

13. $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan 5x}{\sin 2x}$

14. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin^2(5x)}{x^2}$

15. $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$