BAB II
FUNGSI

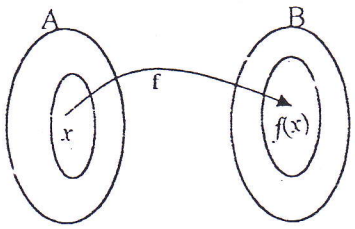
2.1 Fungsi dan Grafik

Definisi 2.1 Misalkan $A,B \subseteq R$. Fungsi $f : A \to B$ adalah suatu aturan yang mengaitkan (memadankan) setiap $x \in A$ dengan tepat satu $y \in B$.

Notasi : $f : A \longrightarrow B$

$x \longrightarrow y = f(x)$

Ilustrasi



Gb. 2.1 Gambar fungsi $y = f(x)$

Domain / daerah asal dari $f(x)$ adalah $D_f \equiv A$, yaitu $\{x \in R \mid f(x) \in R\}$. Sedangkan **daerahnilai / Range** dari fungsi f, dinotasikan dengan R_f, yaitu

$\{f(x) \in R \mid x \in D_f\} \subseteq B$.

Selanjutnya himpunan titik di bidang, $\{(x,y) \mid y = f(x), x \in D_f, y \in R_f\}$ disebut **grafik fungsi** f

Contoh 2.1 Misalkan $f(x) = x^2 + 2x + 5$ maka,

- $f(1) = 1^2 + 2.1 + 5 = 8$, $f(-2) = (-2)^2 + 2.(-2) + 5 = 5$, dan $f(h+1) = (h+1)^2 + 2(h+1) + 5 = h^2 + 4h + 8$
- Daerah asal dari $f(x)$, adalah $D_f = R$ (himpunan bilangan riil), karena untuk setiap $x \in R$, $f(x)$ terdefinisi.
- Daerah nilai dari $f(x)$ adalah $R_f = [4, \infty)$, karena $f(x) = x^2 - 2x - 5 = (x-1)^2 + 4$, maka nilai minimum dari $f(x)$ adalah 4.

Contoh 2.2 Tentukan D_f dan R_f dari $f(x) = 1+\sqrt{x}$

Jawab :

$$D_f = \{x \in R \mid 1+\sqrt{x} \in R\} = \{x \in R \mid x \geq 0\} = [0,\infty)$$

$$R_f = \{1+\sqrt{x} \mid x \in [0,\infty)\} = [1,\infty)$$

Jenis-jenis fungsi :

1. Fungsi Polinom (**suku banyak**) : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
2. Fungsi Rasional : $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan $p(x)$ dan $q(x)$ merupakan fungsi polinom , dan $q(x) \neq 0$.
3. Fungsi banyak aturan : $f(x) = \begin{cases} g_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ g_n(x) \end{cases}$

   Contoh : $f(x) = \begin{cases} 0 \; ; \; x < -1 \\ x^2 \; ; \; -1 \leq x < 3 \\ x+2 \; ; \; x \geq 3 \end{cases}$
4. Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil
   - $f(x)$ disebut fungsi genap bila $f(x) = f(-x)$ [grafik fungsi genap simetris terhadap sumbu y]
   - $f(x)$ disebut fungsi ganjil bila $f(x) = -f(-x)$ [grafik fungsi ganjil simetris terhadap titik asal koordinat]
5. Fungsi Trigonometri
   - $f(x) = \sin x$; $f(x) = \csc x$
   - $f(x) = \cos x$; $f(x) = \sec x$
   - $f(x) = \tan x$; $f(x) = \cot x$
6. Fungsi periodik

   Fungsi $f(x)$ disebut periodik dengan periode p jika $f(x+p) = f(x)$

7. Fungsi Nilai Mutlak

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

8. Fungsi Bilangan Bulat Terbesar

$f(x) = \| x \|$ yaitu bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x

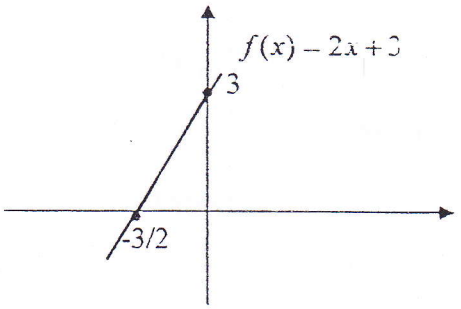
Notasi lain : $[x]$

Contoh 2.3 $\|5{,}9\| = 5$, $\|-2{,}6\| = -3$, $\|-0{,}9\| = -1$

Grafik Fungsi Sederhana :

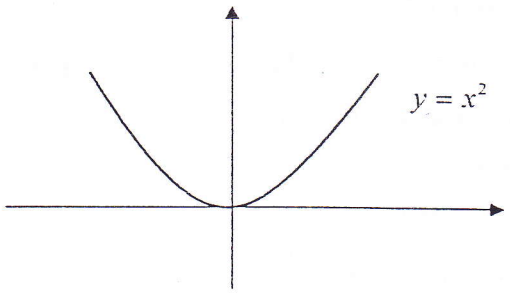
1. Fungsi Linier : $f(x) = ax + b$

   Contoh 2.4 Grafik fungsi $f(x) = 2x + 3$ adalah :

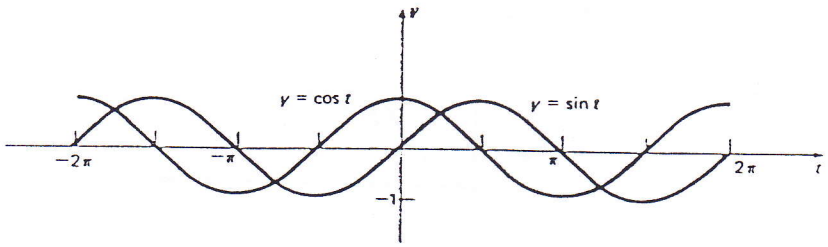


2. Fungsi Kuadrat : $F(x) = ax^2 + bx + c$

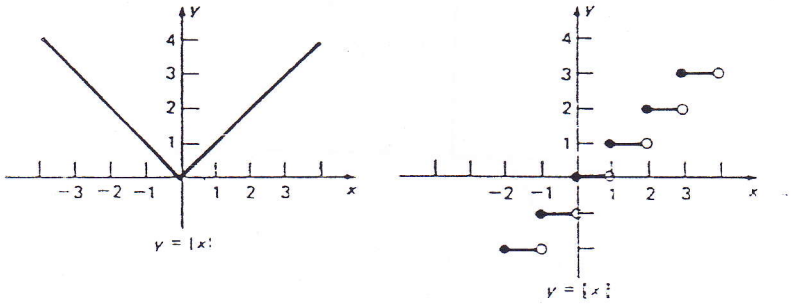
   Contoh 2.5 Grafik fungsi $f(x) = x^2$ adalah :



3. Fungsi Trigonometri : $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$



Contoh 2.6 Grafik fungsi $f(x) = |x|$ dan $f(x) = \| x \|$ adalah :



Dilihat dari bentuk grafiknya, maka fungsi $f(x) = \|x\|$ dikenal juga sebagai fungsi tangga.

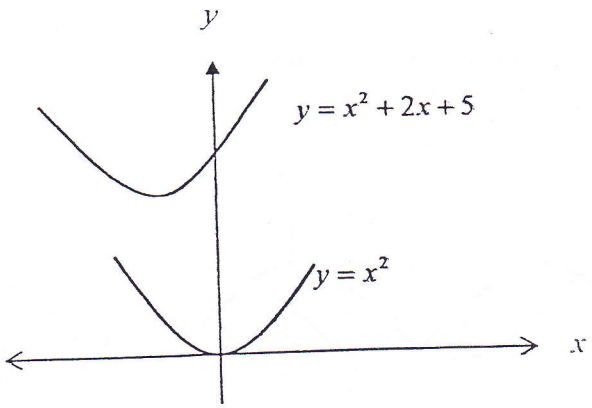
Menggambar Grafik Fungsi dengan Pergeseran

Jika diketahui grafik fungsi $y = f(x)$, maka

- Grafik $y = f(x-h) + k$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = f(x)$ sejauh h satuan ke $\frac{kanan}{kiri}$ jika h $\frac{positif}{negatif}$ dan k satuan ke $\frac{atas}{bawah}$ jika k $\frac{positif}{negatif}$

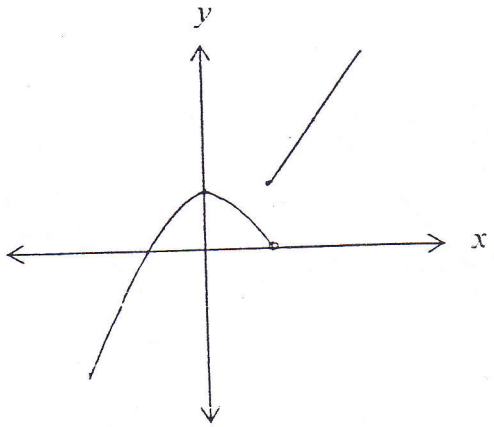
Contoh 2.7

Grafik $y = x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = (x - (-1))^2 + 4$ diperoleh dengan cara menggeser grafik $y = x^2$ sejauh 1 satuan ke kiri dan 4 satuan keatas.



Contoh 2.8 Gambarkan grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 , & x < 1 \\ 1 + x , & x \geq 1 \end{cases}$

Jawab :



2. 2 Operasi Fungsi

A. Opersi aljabar

Definisi 2.2 Misalkan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ mempunyai daerah asal D_f dan D_g, maka

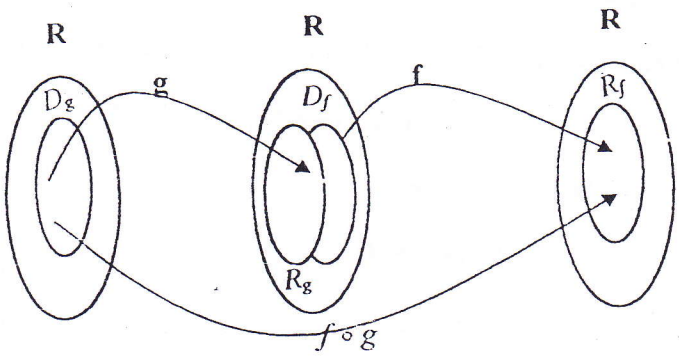
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ dan $D = D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x).\, g(x)$ dan $D = D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$, $g(x) \neq 0$ dan $D_{f\ g} = D - \{x \in R \mid g(x) \neq 0\}$

B. Fungsi Komposisi

Definisi 2.3 Komposisi dari fungsi $f(x)$ dengan $g(x)$ didefinisikan sebagai :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Syarat yang harus dipenuhi agar $f \circ g$ ada (terdefinisi) adalah $R_g \cap D_f \neq \varnothing$



Gb. 2.3 diagram fungsi $f \circ g$

Sifat-sifat fungsi komposisi :

1. $f o g \neq g o f$
2. $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$
3. $R_{f \circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t), t \in R_g\}$

Contoh 2.9 Diketahui $f(x) = \sqrt{x}$ *dan* $g(x) = x^2 - 1$

Tentukan (jika ada) a) $f \circ g$ *dan* $D_{f \circ g}$, $R_{f \circ g}$

b) $g \circ f$ *dan* $D_{g \circ f}$, $R_{g \circ f}$

Jawab : a) Syarat agar $f \circ g$ ada adalah $R_g \cap D_f \neq \phi$

$D_f = [0, \infty)$ $\quad R_f = [0, \infty)$

$D_g = R$ $\quad R_g = [-1, \infty)$

Disini didapat $R_g \cap D_f = [-1, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty) \neq \phi$,

maka $f \circ g$ terdefinisi.

$(f \circ g)(x) = f(g(x) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1}$.

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$= \{x \in R \mid x^2 - 1 \in [0, \infty)\}$

$= \{x \in R \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in R \mid (x-1)(x+1) \geq 0\}$

$= (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

$$R_{f\circ g} = \{y \in R_f \mid y = f(t),\ t \in R_g\} = \{y \geq 0 \mid y = \sqrt{t},\ t \geq -1\} = [0,\infty).$$

b) Syarat agar $g \circ f$ terdefinisi adalah : $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

Karena $R_f \cap D_g = [0,\infty) \cap R = [0,\infty) \neq \varnothing$, maka $g \circ f$ terdefinisi.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1.$$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$= \{x \in [0,\infty) \mid \sqrt{x} \in R\}$$

$$= [0,\infty).$$

$$R_{g\circ f} = \{y \in R_g \mid y = g(t),\ t \in R_f\}$$

$$= \{y \geq -1 \mid y = t^2 - 1, t \geq 0\}$$

$$= [-1,\infty).$$

Contoh 2.10 Diketahui $f(x) = \cos x$ dan $g(x) = \sqrt{x-2}$

Tentukan (jika ada) $g \circ f, D_{g\circ f}$

Jawab : Syarat agar $g \circ f$ ada adalah : $R_f \cap D_g \neq \varnothing$

$D_f = R$, $R_f = [-1,1]$, $D_g = [2,\infty)$

Karena $R_f \cap D_g = [-1,1] \cap [2,\infty) = \varnothing$, maka $g \circ f$ tidak terdefinisi.

Soal Latihan 2

1. Diketahui : $f(x)=\begin{cases} 1/x & ,x>3 \\ 2x & ,x\le 3 \end{cases}$. Hitung :

   a. $f(-4)$

   b. $f(0)$

   c. $f(t^2+5)$

2. Nyatakan fungsi berikut tidak dalam nilai mutlak ($|x|=\begin{cases} x & ,x\ge 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$)

   a. $f(x)=|x|+|3x+1|$

   b. $f(x)=3+|2x-5|$

   c. $f(x)=3|x-2|-|x+1|$

3. Tentukan domain dan range dari :

   a. $f(x)=\sqrt{2x+3}$

   b. $g(x)=\dfrac{1}{4x-1}$

   c. $h(x)=\sqrt{(x+1)^{-1}}$

   d. $f(t)=t^{2/3}-4$

   e. $g(x)=\dfrac{x+1}{x}$

   f. $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

   g. $g(u)=|2u+3|$

   h. $h(y)=-\sqrt{625-y^4}$

   i. $f(x)=\dfrac{\cos(x+1)}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$

4. Tentukan $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h\neq 0$ dari fungsi berikut :

   a. $f(x)=2x-4$

   b. $f(x)=2x^2-x$

5. Periksa apakah fungsi berikut genap atau ganjil :

a. $f(x) = x^2 + 1$

b. $f(x) = x^3 - 1$

c. $f(x) = x^3 + 3x$

d. $f(x) = \sqrt{x}$

6. Gambarkan grafik fungsi berikut :

a. $f(x) = x^2 - 1$

b. $f(x) = (x-2)^2$

c. $f(x) = (x-2)^2 - 1$

d. $f(x) = |x - 2| + 2$

e. $g(x) = \begin{cases} 0 \ , & x < 0 \\ x^2 \ , & 0 \le x \le 2 \\ -x + 6 , & x > 2 \end{cases}$

f. $f(x) = \begin{cases} x + 2 \ , & x < -1 \\ x^2 \ , & x \ge -1 \end{cases}$

g. $f(x) = \left\| \frac{x}{2} \right\|$

h. $f(x) = \|5x\|$

i. $g(t) = t - \|t\|$

7. Tentukan $(f \circ g)(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ bila terdefinisi dari :

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$; $g(x) = \frac{2}{x}$

b. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$; $g(x) = 1 - x^2$

c. $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $g(x) = x^2$

d. $f(x) = \sqrt{x-4}$; $g(x) = |x|$

e. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \sqrt{x-1}$

f. $f(x) = 4x - x^2$; $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

8. Tentukan domain dan Range dari soal nomor 7 diatas.

9. Hitung $(f \circ g)(x)$. bila $f(x) = \begin{cases} 5x & ,x \le 0 \\ -x & ,0 < x \le 8 \\ \sqrt{x} & ,x > 8 \end{cases}$; $g(x) = x^3$

10. Carilah $f(x)$, bila :

a. $f(x+1) = x^2 + 3x + 5$

b. $f(3x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

c. $g(x) = 2x - 1$ *dan* $(gof)(x) = x^2$

d. $g(x) = \sqrt{x+5}$ *dan* $(gof)(x) = 3|x|$

e. $g(x) = \sqrt{x+5}$; $(fog)(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt{4-x^2}$

f. $g(x) = x^2$; $(fog)(x) = ax^2 + b$

11. Tuliskan $f(x)$ sebagai komposisi dari dua fungsi :

a. $f(x) = \sin\sqrt{1+x}$ b. $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$

12. Tuliskan $p(x) = \log\sqrt{x^2+1}$ sebagai komposisi dari tiga fungsi dengan dua cara berbeda.

13. Andaikan $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$. Buktikan bahwa $f(f(f(x))) = x$, dengan $x \neq -1$.

14. Andaikan $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Tenrukan dan sederhanakan tiap harga

a. $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ b. $f(f(x))$ c. $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$