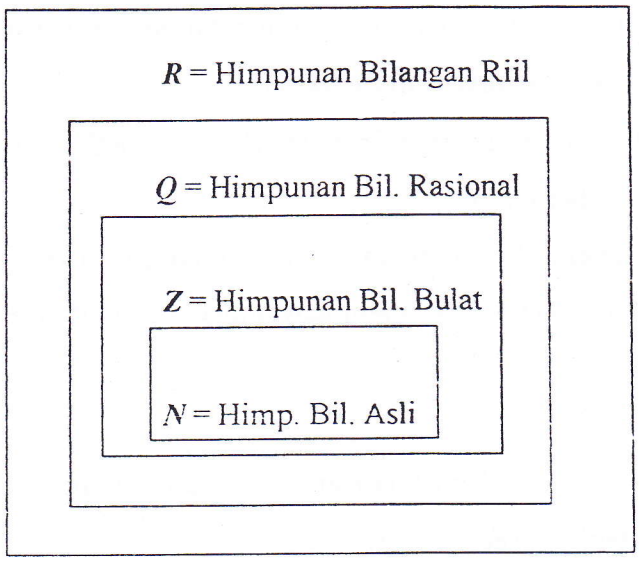
BAB I
SISTEM BILANGAN RIIL

1.1 Sistem Bilangan Riil

Semesta pembicaraan dalam matakuliah Kalkulus ini adalah Himpunan bilangan riil. Himpunan Bilangan Riil merupakan sekumpulan bilangan Rasional dan Irrasional. Secara lengkap dapat dilihat dari bagan berikut :



Gb. 1.1 Diagram Venn Himpunan Bilangan Riil

N = Himpunan Bilangan Asli : 1,2,3,...

Z = Himpunan Bilangan Bulat : ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...

Q = Himpunan Bilangan Rasional : $q \in Q, q = \frac{a}{b},\ a,b \in Z, b \neq 0$

Ir = Himpunan Bilangan Irrasional : $r \notin Q\ ;\ \sqrt{2}, \sqrt[3]{7}, \pi, \ldots$

R = Himpunan Bilangan Riil : $Q \cup Ir$

Sifat-sifat dalam himpunan bilangan riil memainkan peranan yang sangat penting dalam Kalkulus, oleh karena itu dalam sub bab ini akan dibahas beberapa sifat dari himpunan bilangan riil dan permasalahan yang menyangkut bilangan riil itu sendiri, misalnya nilai mutlak, persamaan dan pertaksamaan aljabar.

Sifat-sifat Bilangan Riil :

a. Sifat Medan

Jika x, y, z adalah anggota bilangan Riil, maka

i. $x + y = y + x$ dan $xy = yx$ (**hukum komutatif)**

ii. $x + (y+z) = (x+y) + z$ dan $x(yz)=(xy)z$ **(hukum asosiatif)**

iii. $x(y+z) = xy + xz$**(hukum distributif)**

iv. **Unsur Identitias.** Terdapat bilangan Riil yang berlainan 0 dan 1 sehingga $x + 0 = x$ dan $x.1 = x$.

v. **Unsur Invers.** Setiap bilangan x mempunyai invers penjumlahan ; $-x$ sehingga $x + (-x) = 0$ dan mempunyai invers perkalian; x^{-1} sehingga $x(x^{-1})=1$.

b. Sifat Urutan

i. **Trikotomi.** Jika x dan y bilangan, maka pasti berlaku salah satu $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.

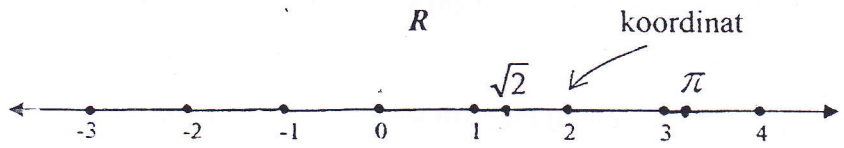
ii. **Transitif.** $x < y$ *dan* $y < z \Rightarrow x < z$

iii. **Penambahan.** $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$

iv. **Perkalian.** Jika z bilangan positif, $x < y \Leftrightarrow xz < yz$, jika z bilangan negatif, $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Garis bilangan : Interval dan himpunan

Himpunan Bilangan Riil (R) secara konkrit dapat dinyatakan dalam suatu garis bilangan.



Gb. 1.2 Garis bilangan Riil

Bilangan Riil yang bersesuaian dengan titik pada garis bilangan disebut **koordinat** dari titik tersebut.

Bagian yang lebih kecil dari garis bilangan dikenal sebagai interval (selang). Berikut beberapa interval ,cara penulisannya dalam bentuk himpunan, dan grafiknya dalam garis bilangan.

$[a,b] = \{x \mid a \le x \le b\}$	a b	interval tutup
$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$	a b	interval buka
$[a,b) = \{x \mid a \le x < b\}$	a b	interval setengah buka (kanan)
$(a,b] = \{x \mid a < x \le b\}$	a b	interval setengah buka (kiri)
$(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$	a	interval tak terbatas
$(-\infty,a] = \{x \mid x \le a\}$	a	interval tak terbatas
$(-\infty,\infty) = R$		

1.2 Pertaksamaan

Satu hal yang menjadi permasalahan pokok disini adalah bagaimana mencari solusi (penyelesaian / jawaban) dari pertaksamaan aljabar. Solusi pertaksamaan aljabar diperoleh dengan mencari solusi persamaan terlebih dahulu. Pada umumnya **solusi** pertaksamaan berupa beberapa nilai (bilangan riil) atau mungkin berupa suatu interval (selang).

Sebelumnya dijelaskan kembali masalah suku banyak atau polinom.

Suku banyak berderajat n dinyatakan sebagai :

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ dengan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$.

Bentuk umum pertaksamaan aljabar adalah :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)} \qquad (1.1)$$

dengan $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ dan $D(x)$: suku banyak. (tanda < dapat diganti oleh : >, ≥, ≤).

Himpunan semua bilangan Riil x yang memenuhi pertaksamaan (1.1) disebut dengan **Himpunan Penyelesaian** (Hp) pertaksamaan.

Cara menentukan solusi / Hp pertaksamaan adalah sebagai berikut :

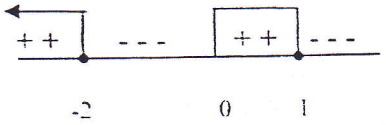
1. Buat ruas kanan (1.1) menjadi nol atau $\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} < 0$
2. Bentuk menjadi $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$
3. Faktorkan atau uraikan $P(x)$ dan $Q(x)$ menjadi faktor linier dan atau faktor kuadrat definit positif
4. Tentukan nilai pemisah (pembuat nol) dari masing-masing faktor linier dan atau kuadrat. Lalu gambarkan dalam garis bilangan.
5. Gunakan salah satu cara untuk menentukan tanda (+ atau -) interval pada garis bilangan

Contoh 1.1 Tentukan Himpunan Penyelesaian dari : $\frac{2}{x} \geq x+1$

Jawab : $\frac{2}{x} - x - 1 \geq 0$

$$\frac{2-x^2-x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(2+x)}{x} \geq 0$$

titik pemecah : x=1 , x=-2 , x=0



Maka $Hp = (-\infty,-2] \cup (0,1]$

Contoh 1.2 Tentukan Himpunan penyelesaian dari $2+3x < 5x+1 < 16$

Jawab : Pertaksamaan dapat dipecah menjadi dua bagian

$2 + 3x < 5x + 1$ dan $5x + 1 < 16$

$3x - 5x < 1 - 2$ $\quad$ $5x < 15$

$-2x < -1$ $\quad$ $x < 3$

$x > 1/2$

$Hp_1 = (1/2 , \infty)$ $\quad$ $Hp_2 = (-\infty,3)$

Sehingga Himpunan penyelesaian untuk pertaksamaan tersebut menjadi

$Hp = Hp_1 \cap Hp_2 = (1/2,\infty) \cap (-\infty,3) = (1/2,3)$

1.3 Pertaksamaan dengan Nilai Mutlak

Nilai mutlak didefinisikan sebagai bilangan yang bernilai non negatif. Secara geometris nilai mutlak dari x (notasi |x|) merupakan jarak antara x terhadap titik 0 pada garis bilangan. Secara formal definisi nilai mutlak adalah :

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \qquad (1.2$$

Sifat-sifat nilai mutlak :

1. $|x^2| = x^2$ dan $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

2. Jika $a \geq 0$ maka

   - $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \text{ dan } x \leq a$

     $\Leftrightarrow x^2 \leq a^2$

   - $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ atau } x \leq -a$

     $\Leftrightarrow x^2 \geq a^2$

3. $|x-y| \leq |x| + |y|$ (ketaksamaan segitiga)

4. $x^2 < y^2 \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Contoh 1.3 Tentukan Himpunan penyelesaian dari $\left|2+\frac{5}{x}\right| > 1$

Jawab : Dengan menggunakan sifat yang ke 2 bagian 2, kita dapatkan

$2-\frac{5}{x} > 1$ atau $2+\frac{5}{x} < -1$

Ini tak lain merupakan dua pertaksamaan yang akan dicari penyelesaiannya.

$2+\frac{5}{x}-1>0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-x}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{x}>0 \Leftrightarrow x<-5 \text{ atau } x>0$

$2+\frac{5}{x}+1<0 \Leftrightarrow \frac{2x+5+x}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{3x+5}{x}<0 \Leftrightarrow -\frac{5}{3}<x<0$

Sehingga Himpunan penyelesaian dari pertaksamaan tersebut adalah :

$(-\infty,-5)\cup(0,\infty)\cup(-5/3,0) = (-\infty,-5)\cup(-5/3,0)\cup(0,\infty)$

Contoh 1.4 Tentukan Himpunan penyelesian dari $|2x-3| \leq |x+3|$

Jawab : Berdasarkan sifat nilai mutlak yang ke-4, maka

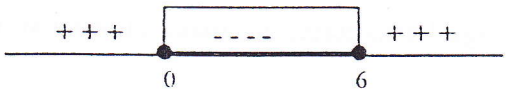
$(2x-3)^2 \leq (x+3)^2$

$\Rightarrow (2x-3)^2 - (x+3)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow [(2x-3)+(x+3)][(2x-3)-(x+3)] \le 0$

$\Leftrightarrow 3x(x-6) \le 0$

titik pemecah : **0** dan 6



Hp = [0,6]

Contoh 1.5 Tentukan Himpunan penyelesaian dari $3|x|-|x-1| \le 5$

Jawab : Hilangkan tanda nilai mutlak dari pertaksamaan tersebut dengan meggunakan definisi nilai mutlak (persamaan 1.2)

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{dan} \qquad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \ge 0 \\ -(x-1), & x-1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x-1, & x \ge 1 \\ -(x-1), & x < 1 \end{cases}$$

Jadi, terjadi perubahan tanda nilai mutlak di 0 dan 1.

$x < 0$	$0 \le x < 1$	$x \ge 1$
$\|x\| = -x$	$\|x\| = x$	$\|x\| = x$
$\|x-1\| = -(x-1)$	$\|x-1\| = -(x-1)$	$\|x-1\| = x-1$
substitusi ke pertaksamaan awal		
$3(-x)-(-(x-1)) \le 5$	$3x-(-(x-1)) \le 5$	$3x-(x-1) \le 5$
$-3x+x-1 \le 5$	$3x+x-1 \le 5$	$3x-x+1 \le 5$
$-2x \le 6$	$4x \le 6$	$2x \le 4$
$x \ge -3$	$x \le \frac{3}{2}$	$x \le 2$
$Hp_1 = (-\infty,0) \cap [-3,\infty)$	$Hp_2 = [0,1) \cap (-\infty,\frac{3}{2}]$	$Hp_3 = [1,\infty) \cap (-\infty,2]$
$= [-3,0)$	$= [0,1)$	$= [1,2]$

Perhatikan bahwa Himpunan penyelesaian masing-masing selang **harus selalu diiriskan** dengan ketentuan berlakunya selang. Karena proses penyelesaian pertaksamaan terjadi atas tiga kasus terpisah , maka Himpunan penyelesaiannya adalah gabungan ketiga Hp tersebut.

Jadi, $Hp = Hp_1 \cup Hp_2 \cup Hp_3 = [-3,0) \cup [0,1) \cup [1,2] = [-3,2]$.

1.4 Kuadrat dan Akar Kuadrat

Setiap bilangan positif mempunyai dua akar kuadrat. Misalnya, dua akar kuadrat dari 4 adalah 2 dan -2 ; dua akar kuadrat dari 16 adalah 4 dan -4. Untuk $a \geq 0$, lambang $\sqrt{a}$, disebut **akar kuadrat utama** dari a, yang menunjukkan akar kuadrat tak negatif dari a. Jadi $\sqrt{4} = 2$ dan $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{100} = 10$. Tidak benar menuliskan $\sqrt{9} = \pm 3$.

Jadi , penting untuk diingat bahwa , $\sqrt{x^2} = |x|$.

Soal Latihan 1

Tentukan Himpunan Penyelesaian dari pertaksamaan berikut :

1. $x^2 - 3x + \geq -4$
2. $4x - 7 < 3x + 5$
3. $-2 < 1-5x \leq 3$
4. $\frac{2x-5}{x-2} \leq 1$
5. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$
6. $\frac{6}{x} - 5 + x \leq 0$
7. $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$
8. $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$
9. $5|x| - 2|x-3| \leq 3$
10. $|2x-7| > 3$
11. $|x-2| < 3|x+7|$
12. $|x| - |x-1| \leq 5$
13. $2(x-1)^2 - |x-1| \leq 1$
14. $\left|\frac{3-2x}{1+x}\right| \leq 4$
15. $\frac{1}{|x-4|} < \frac{1}{|x+7|}$
16. $\frac{1}{|x-3|} - \frac{1}{|x+4|} \geq 0$
17. $\frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0$